ИНТЕРНЕТ-ШКОЛА ИНФОРМАТИКИ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

*Акимушкин Василий Александрович,*
*Поздняков Сергей Николаевич*

# ЗНАКОМСТВО С ГРАФАМИ: ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ, ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

## АЛГОРИТМ ОБХОДА ДОСКИ ШАХМАТНЫМ КОНЕМ: ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

Практически каждый хотя бы раз в жизни брался за задачу обойти конем все клетки шахматной доски так, чтобы в каждой клетке побывать ровно по одному разу.

У этой задачи есть интересная математическая трактовка и не менее интересный взгляд с точки зрения программирования.

Математическая трактовка связана с понятием графа. Графы появляются тогда, когда математики хотят описать ОТНОШЕНИЕ, в котором находятся объекты некоторого множества.

*Примеры отношений между людьми:* дружат, знакомы, являются родственниками.

*Примеры отношений между геометрическими фигурами:* подобны, равны.

*Примеры отношений между числами:* больше или меньше, равны или не равны, одно кратно другому.

При построении графа объекты изображаются точками плоскости, которые называют *вершинами* или *узлами* графа, а отношения между ними – направленными прямолинейными или криволинейными отрезками, которые называются *рёбрами* или *дугами графа*.

Если рассмотреть все клетки шахматной доски относительно ходов конем, то между ними будет естественное отношение: *клетка находится в отношении с другой клеткой, если из одной клетки ходом коня можно перепрыгнуть на другую клетку*.

Так для досок 3×3 и 4×4 графы отношений будет такими (см. рис. 1).

Когда мы обходим доску конем, на графе появляется *путь*, составленный из ребер графа и его вершин, которые соответствуют выполненным ходам и пройденным клеткам:

На рис. 2 показана неудачная попытка нарисовать путь для доски 4×4.

Хотя мы дважды не попадали в одну клетку, все клетки пройти не удалось.

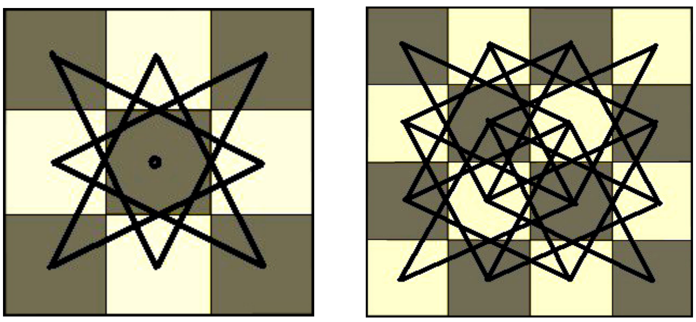


**Рис. 1**

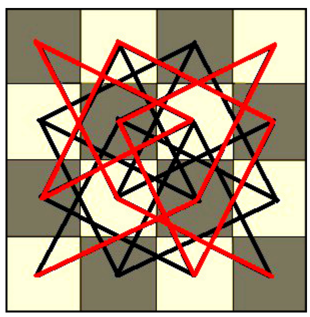


**Рис. 2**

Заметим, что если путь коня проходит по всем клеткам, то он содержит все вершины графа. Такой путь называется *гамильтоновым*. Не во всех графах такой путь существует, а графы, для которых он существует, называются *гамильтоновыми* графами.

Заметим, что графы досок 3×3 и 4×4 гамильтоновыми не являются. Для первого из них это очевидно, так как попасть в среднюю точку доски конем невозможно. Если же среднюю точку вырезать, то для оставшейся доски граф станет гамильтоновым.

Таким образом, вопрос о том, можно ли обойти шахматную доску конем, в теории графов формулируется следующим образом: *является ли соответствующий граф гамильтоновым?* В математике есть теоремы, которые говорят о том, что если из каждой вершины выходит достаточно много ребер, то граф является гамильтоновым. Однако в общем случае быстро ответить на вопрос, является ли граф гамильтоновым, нельзя.

Теперь перейдем к взгляду на проблему с позиции информатики.

Пусть граф является гамильтоновым, тогда *существует ли быстрый алгоритм, по которому можно построить путь обхода вершин*?

Оказывается, что в общем случае эффективного алгоритма нет, и для нахождения требуемого пути необходим перебор вариантов.

Однако в некоторых случаях эффективные алгоритмы обхода существуют. Например, в 1823 году Варнсдорф в брошюре «Простейшее и наиболее общее решение задачи о ходе коня» предложил следующее правило обхода доски размером 8×8.

*На каждом ходу ставь коня на такое поле, из которого можно совершить наименьшее число ходов на еще не пройденные поля. Если таких полей несколько, разрешается выбирать любое из них.*

Именно с этим алгоритмом мы предлагаем вам познакомиться, чтобы лучше понять, как устроены интерфейсы модулей в Школе КИО. Визуализатор алгоритма размещён на диске к журналу.

**ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ**

Второй сюжет мы посвятим задаче, положившей начало теории графов. Мы познакомимся с классическим алгоритмом, связанным с задачей Эйлера об обходе семи Кенигсбергских мостов. Об этой известной задаче многое можно узнать в сети Интернет, начав с википедии (http://ru.wikipedia.org/wiki/Проблема_семи_мостов_Кёнигсберга):

«Издавна среди жителей Кёнигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды. Многие кёнигсбержцы пытались решить эту задачу как теоретически, так и практически во время прогулок. Впрочем, доказать или опровергнуть возможность существования такого маршрута никто не мог. В 1736 году задача о семи мостах заинтересовала выдающегося математика, члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера, о чём он написал в письме итальянскому математику и инженеру Мариони от 13 марта 1736 года. В этом письме Эйлер пишет о том, что он смог найти правило, пользуясь которым, легко определить, можно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них. Поскольку мостов в городе было семь, то ответ был “нельзя”». Вот картинка из википедии к этой задаче (рис. 3).

Для решения задачи сначала нужно избавиться от несущественной информации,

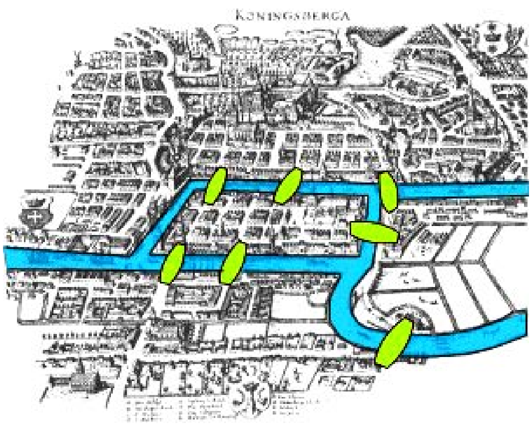



**Рис. 3**

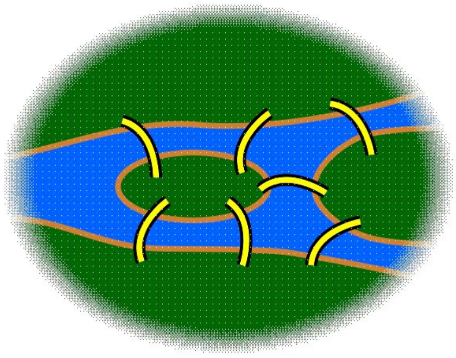
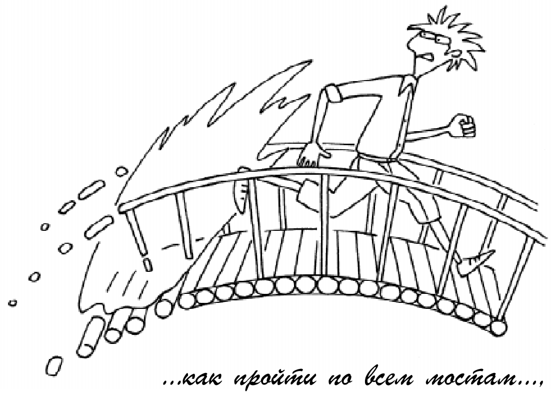


**Рис. 4**



*...как пройти по всем мостам..., не проходя ни по одному из них дважды...*

оставив только разделяемые рекой части города и связывавшие их мосты (рис. 4).

После чего в каждой части надо поставить по точке – вершине (узлу) графа и сопоставить каждому мосту дугу (рёбро) графа, соединяющую соответствующие вершины (рис. 5).

Теперь задача об обходе мостов свелась к задаче, которую в литературе называют *задачей об уникурсальной кривой*: «нарисовать фигуру, не отрывая руки и не проходя по одной дуге дважды».

Это не всегда можно сделать, так как, дойдя до одной вершины, мы далее должны выйти из неё (если только это не начальная или конечная вершины). Получается, что все промежуточные вершины должны иметь чётное число ребер, соединенных с ней (такие ребра называются ребрами, *инцидентными вершине*, а вершина – *инцидентной ребрам*).

Пути обхода графа, при котором каждое ребро встречается в этом пути и только один раз, в честь Леонарда Эйлера названы *эйлеровыми путями*. Заметим, что эйлеровы пути существуют только в *связных* графах, то есть таких, между любыми двумя вершинами которых существует путь (несвязные графы распадаются на несколько связных, которые называют *компонентами связности* графа). Граф, для которого существует эйлеров путь, проходящий по всем ребрам графа, называется *эйлеровым графом*.

Число ребер, инцидентных вершине, называется *степенью* этой вершины. Например, в изображенном графе левая крайняя вершина имеет степень 5, а остальные – степень 3.

В приведенном примере степени всех вершин оказались нечётными, а это означает, что в графе нет «промежуточных» вершин!

Все они являются либо начальными, либо конечными. Это значит, что обойти этот граф, пройдя только один раз по каждому ребру, не удастся. Иными словами, не удастся и нарисовать этот граф, не отрывая руки. А вот если разрешить один раз оторвать карандаш от бумаги, то задачу решить можно будет (попробуйте!).

Мы получили любопытную теорему:

**Теорема.** *Если в связном графе все вершины, кроме, может быть, двух, имеют чётную степень, то граф является эйлеровым.*

**Доказательство:** Приведенное выше рассуждение показывает, что все графы, у которых число вершин нечётной степени больше двух, эйлеровыми быть не могут. Однако это рассуждение не объясняет, почему все остальные графы обойти по эйлеровому пути можно.

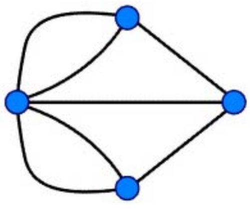


**Рис. 5**

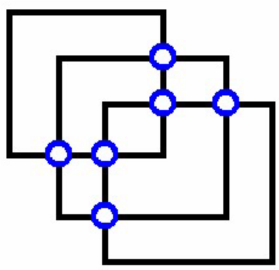


**Рис. 6**

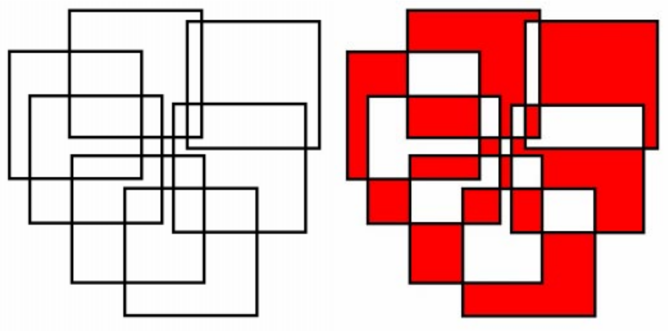
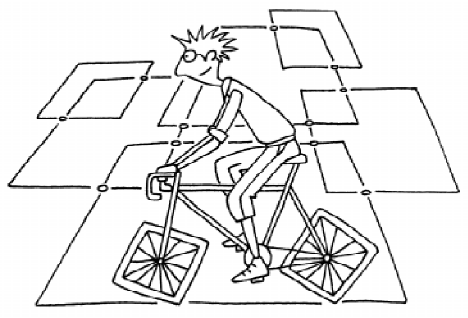


**Рис. 7**



*...отыскать алгоритм эйлерова обхода для всех «квадратосоставленных» графов...*

Чтобы доказательство было понятнее, рассмотрим его на примере графа, который можно усложнить, добавляя новые квадраты и рассматривая в качестве вершин пересечения их сторон. Обойти этот граф не составит большого труда (однако попробуйте сделать это с первого раза!) (рис. 6).

Если такой граф будет достаточно большим, например, состоящим из 7 квадратов, случайно наложенных друг на друга, получить эйлеров обход с первого раза вряд ли удастся (впрочем, хорошей исследовательской задачей будет отыскать алгоритм эйлерова обхода для всех таких «квадратосоставленных» графов; в Интернете вы можете найти интересный прием, позволяющий строить такой обход на основе «шахматной» раскраски областей, на которые фигура разбивает плоскость) (см. рис. 7).

Мы же попробуем одновременно доказать такую возможность для всех указанных в теореме графов.

Доказательство будет конструктивным. Это означает, что на его основе можно построить алгоритм, решающий поставленную задачу.

Рассмотрим сначала граф, у которого степени всех вершин чётные.

Доказательство проведем методом математической индукции по $k$ – сумме степеней всех вершин. Если степени всех вершин имеют минимальное четное значение, то есть 2, решение задачи очевидно, так как в этом случае граф представляет собой замкнутый путь (рис. 8).

Продемонстрируем теперь индукционный переход. Предположим, что для графов с небольшими степенями вершин мы умеем строить эйлеровы пути, и нужно показать, что тогда мы сможем построить эйлеров путь для графа с большим значением $k$.

Начиная с любой вершины, строим путь, выбирая на каждом «перекрестке» ещё не пройденное ребро. На рис. 9 показан возможный результат этого шага.

Выбросим из графа все пройденные ребра. Обратите внимание, что при этом чётность степеней вершин не меняется, поскольку в пройденном пути все вершины имеют четную степень и удаление пройден-

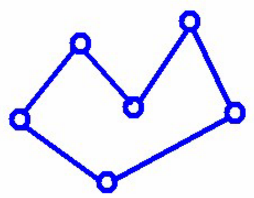


**Рис. 8**

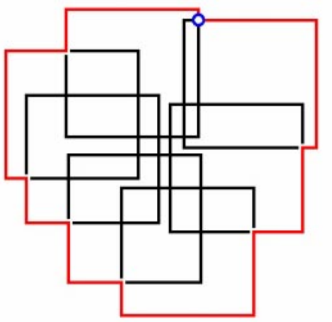


**Рис. 9**

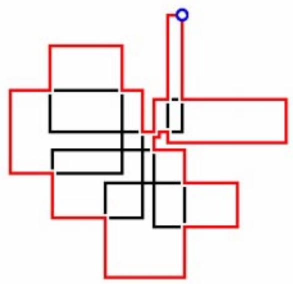


**Рис. 10**

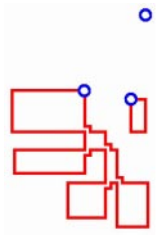


**Рис. 11**

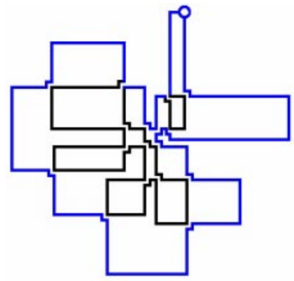


**Рис. 12**

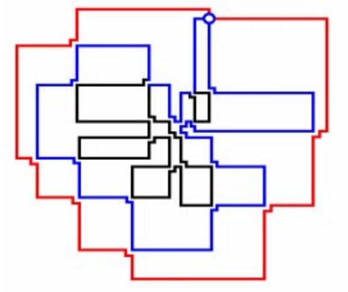


**Рис. 13**

ных ребер уменьшает степень каждой вершины на четное число.

Далее применим тот же прием к оставшемуся графу. Поскольку после удаления пройденного пути сумма степеней вершин уменьшается, применимо индукционное предположение. Это означает, что для оставшихся частей графа строить эйлеровы пути мы умеем. При реализации алгоритма это означает рекурсию, то есть применение того же приема к более простому графу (рис. 10).

Так, применив тот же прием к получившемуся графу, мы найдем следующий эйлеров путь (рис. 11). (В примере на рисунке при построении пути мы выбираем очередные ребра по периметру фигуры. Когда граф представлен в компьютере, очередные ребра обычно выбираются по порядку их нумерации у вершины).

На очередном шаге мы строим эйлеровы пути оставшихся частей графа. Теперь двигаемся в обратном порядке и соединяем построенные эйлеровы пути следующим образом (рис. 12).

Сначала движемся по ранее построенному пути, до тех пор пока не достигаем первой вершины, лежащей на эйлеровом пути, построенном на следующем шаге. Затем проходим по этому пути, возвращаемся в исходную вершину и продолжаем движение по первому пути.

На последнем шаге получаем эйлеров путь исходного графа (рис. 13).

Теорема доказана.

*Замечание 1.*

Рассмотрим второй случай, когда в графе есть две нечетных вершины. Добавим в него новое ребро, соединяющее две вершины нечётной степени (рис. 14).

Теперь все вершины имеют чётную степень. По описанному выше методу можно построить замкнутый эйлеров путь обхода этого графа. Если из него удалить добавленное ребро, он превратится в путь от одной вершины нечётной степени до другой (рис. 15).

*Замечание 2.*

В теореме говорится о менее чем двух вершинах нечетной степени. Но мы рассмотрели только случай двух таких вершин. Может ли в графе быть одна вершина нечётной степени. Попробуйте нарисовать такой граф. Не получается? Почему?

Не получается потому, что у каждого ребра есть два конца, а когда мы складываем степени вершин, то получаем суммарное число концов ребер. Раз оно четное, то одной вершины нечетной степени быть не мо-

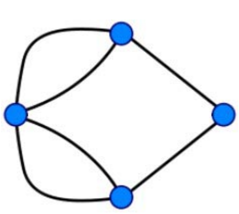


**Рис. 14**

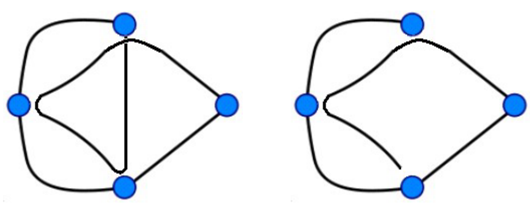


**Рис. 15**

жет (а может ли быть 3, 5, 7 … вершин нечётной степени?).

**ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗ МУЗЕЯ КАНТА (г. Калининград, бывший Кенигсберг)**

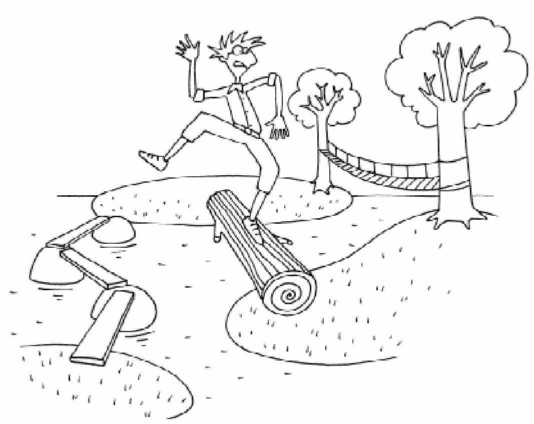
На острове, который изображен на рисунке задачи о семи мостах, находится музей философа Канта, который жил в Кёнигсберге и похоронен рядом с собором, стоящим с незапамятных времен на этом острове. В музее собраны интересные экспонаты, в том числе, связанные с задачей семи мостов.

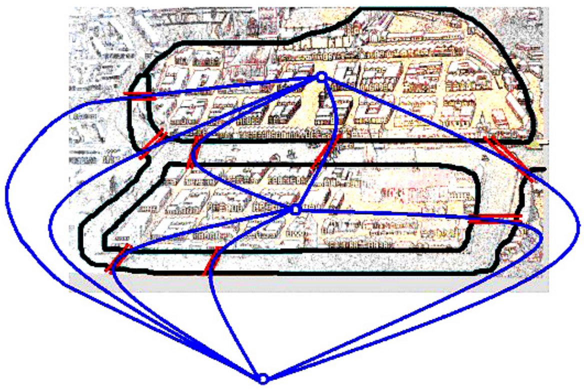
**Рис. 16**


**Рис. 17**

Попробуйте, например, найти все семь мостов на янтарной модели этой задачи (рис. 16).

Оказывается, однако, что в разные времена город имел разное число мостов, и задача Эйлера относится только к некоторой части водной системы города (рис. 17).





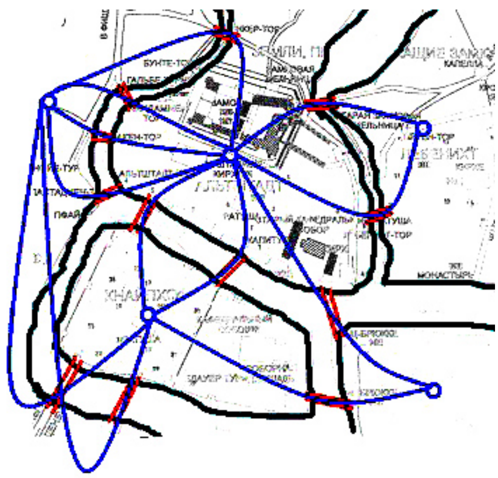


**Рис. 18**

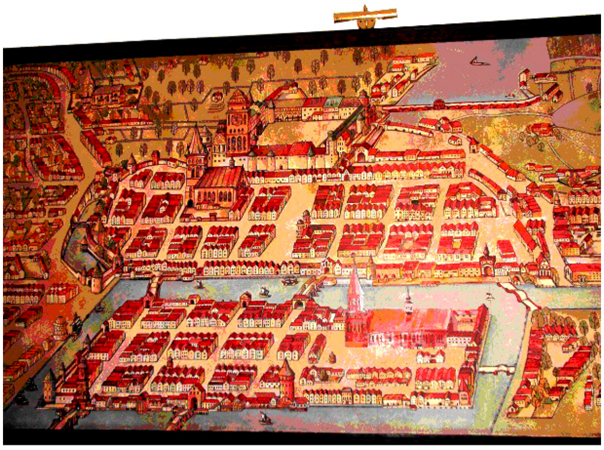


Рис. 19

На схемах (рис. 18) и картине (рис. 19) представлены другие изображения того же места. Попробуйте ответить на вопрос исходной задачи для этих графов.

Визуализатор алгоритма размещён на диске к журналу.

*От редакции*: На сайте Интернет-школы современной информатики и дискретной математики http://kioschool.eltech.ru/, открытой Факультетом компьютерных технологий и информатики Санкт-Петербургского электротехнического университета (ЛЭТИ) совместно с Центром информатизации образования «КИО» – учредителем одноименного конкурса КИО («Конструируй, исследуй, оптимизируй»), можно зарегистрироваться на обучение в Школе и получить доступ к тренажёрам и модулям контроля.

***Акимушкин Василий Александрович,*** ***аспирант математико-механического факультета СПбГУ, программист АНО «КИО»,***

***Поздняков Сергей Николаевич,*** ***доктор педагогических наук, профессор кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ «ЛЭТИ», научный руководитель Интернет-школы современной информатики и дискретной математики.***