Ягунова Екатерина Борисовна

ПОМОЖЕМ ШКОЛЬНИКУ РАБОТАТЬ С ПРОГРЕССИЯМИ

НАШИ ПРОБЛЕМЫ

Арифметическая и геометрическая прогрессии – «страшилка» для современных школьников. Пожалуй, ни логарифмы, ни тригонометрия не вызывают такого отторжения у учеников. Казалось бы, задачки не самые сложные: зная a_1 и d, найти a_8, зная a_8 и a_1, найти d… – решение сводится к вычислению по готовой формуле. Казалось бы, не сложнее решения квадратного уравнения. Но почему-то, когда произносится слово «прогрессия», у них в глазах возникает панический ужас.

Мне видится несколько причин такого положения вещей.

1. Полное отсутствие «связи с жизнью» – даже с «жизнью» в пределах курса алгебры. После того как тема пройдена, встретятся ли нам прогрессии еще хоть раз? Затрудняюсь привести хоть один пример. С тригонометрией, например, не так, мы ее изучаем долго: решаем уравнения, неравенства, дифференцируем… Синусы и косинусы пугают нас не только на алгебре, но и на геометрии, и на физике. Прогрессии же в школьном курсе эфемерны – возникают неожиданно в самом конце девятого класса и очень скоро проваливаются обратно в небытие.

2. Обилие формул затмевает тривиальность обсуждаемых вопросов. Формулы «никуда не ведут» – позволяют лишь выражать друг через друга некие «буквы» с неясной сутью. Для сравнения, многочисленные свойства логарифмов позволяют превратить большое выражение в маленькое и компактное. «Выучить формулы, чтобы упрощать выражения» – это, конечно, смешное целеполагание. Но даже такое лучше, чем «выучить формулу, чтобы по одной букве находить значение другой буквы». В первом случае неправильно выученная формула не позволит преобразовать выражение к компактному ответу. Во втором случае значение буквы все равно будет найдено – какая разница, из какой формулы выражать!

3. Неотчетливость родственных связей между геометрической и арифметической прогрессией. Они изучаются последовательно, вне связи друг с другом. Каждая прогрессия имеет свой набор формул. Параллелизм между этими формулами не обсуждается. У школьников наступает состояние «déja vu» – вроде бы опять то же самое, но вроде бы и не совсем оно. Доходит до смешного: при сопоставлении арифметической прогрессии и геометрической в первую очередь указывается «арифметическая – это a_n, а геометрическая – b_n». Добивают учеников «смешанные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии» – для них это просто жонглирование формулами.

НАШИ ПЛА\НЫ

Попробуем скорректировать такое положение вещей при помощи современных средств обучения. Что именно мы попытаемся сделать?

1. Максимально связать прогрессии (как минимум, арифметическую – это проще сделать) с повседневным опытом.

2. Помочь школьникам научиться представлять прогрессию, создать ее наглядный, универсальный «портрет». Это поможет нам заменить работу «с буквами» «по формулам» расчетом определенных элементов этого нашего «портрета».

3. Заменить для арифметической прогрессии вычисления по формулам вычислениями на основании здравого смысла. Научиться использовать здравый смысл для проверки вычислений, проведенных по формулам.

4. Показать, что геометрическая прогрессия очень похожа на арифметическую. Но поскольку умножение – более сложная операция, чем сложение, то и геометрическая прогрессия оказывается более сложным объектом, чем арифметическая.

ЗАДАЧИ «ПРО ЛЕСТНИЦУ». АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Давайте рассмотрим типичную задачу. В некотором множестве число элементов меняется со временем. Пусть приращение числа элементов за единицу времени постоянно и ни от чего не зависит: $u_{n+1} - u_n = const = d$. Тогда $u_{n+1} = u_n + d$. В этом случае мы, зная количество элементов в начальный момент времени (a_1), легко можем установить размер множества в любой момент времени. Экспериментируя с числом d (интерактивный чертеж 1, рис. 1 A), мы выясним, что при $d > 0$ размер множества увеличивается, при $d < 0$ – уменьшается, при $d = 0$ количество элементов множества не изменяется. Последовательные значения образуют на чертеже бесконечную «лестницу», ведущую вверх или вниз в зависимости от знака числа d. Наклон, «крутизна» этой лестницы определяется высотой ступенек, то есть также числом d.

Мы получили модель динамики количества элементов в множестве в предположении, что изменение числа элементов множества за единицу времени ни от чего не зависит. Можно придумать жизненную ситуацию, множество с такой динамикой. Например, так: «человек каждый день решает 3 задачи по математике». Подчеркнем, что ровно три задачи решаются абсолютно каждый день – и в выходные, и во время отпуска, и во время болезни… Тогда «число решенных задач» подчиняется обсуждаемому закону при $d = 3$. Пример для отрицательного d? Ну, пусть так: «Ребенок каждый день ломает 3 свои игрушки. Сломанные игрушки мама тут же выкидывает». Тогда «количество игрушек» подчиняется нашему закону при $d = -3$. Оба этих примера не идеальны. Человек не бессмертен, поэтому при некотором n последовательность «оборвется». Во втором примере все игрушки однажды окажутся сломаны и выброшены, больше ломать будет нечего[1]. Думаю, школьники с удовольствием напридумывают разнообразных забавных примеров и объяснят, почему их примеры годятся лишь частично. Все эти примеры мы сможем увидеть на нашем интерактивном чертеже, причем картинка почти не будет меняться. Изменяется **лишь высота «ступенек»** нашей «лестницы»[2].

Такие последовательности – арифметические прогрессии – довольно просто устроены. Вопросы «сколько задач будет решено через неделю, если сегодня решено 25?», «через сколько дней игрушек не останется?» легко решаются на основании здравого смысла – отсчитыванием по нашей «лестнице» нужного числа ступенек вверх или вниз. Правильность вычислений можно также проверить при помощи интерактивного черте-

[1] Заметим, что недостатки первого и второго примера существенно различны. В первом примере мы огорчаемся лишь тому, что не можем увидеть «в жизни» бесконечную последовательность. Во втором – последовательность обрывается, ее члены перестают иметь бытовой смысл. От первого недостатка можно избавиться формальным допущением бессмертия, что гораздо проще, чем представить себе отрицательное количество игрушек, которые, к тому же, ребенок продолжает ломать.

[2] Лестницы с «отрицательным» наклоном ничем не отличаются от лестниц с «положительным» наклоном. Можно вообще рисовать только «лестницы» с положительными d и разрешить ходить по ним не только вверх, но и вниз.

жа. «Высокая наука» и «расчеты по формулам» здесь, скорее, неуместны. Они маскируют тривиальность обсуждаемых вопросов. Возможно, полезным упражнением окажется придумывание задач к заданной, уже изображенной на чертеже прогрессии. «Сколько прошло дней, если число решенных задач увеличилось на 15?» «сколько задач в день решал школьник, если завтра их окажется решено на 20 больше, чем позавчера?», «сколько дней ребенок сможет ломать по 5 игрушек в день, если в начале их было 85?». Скоро мы увидим, что хоть детская фантазия и безгранична, но разнообразие задач крайне невелико. Теперь можно взять учебник и научиться «переводить» задачи с формального языка (n, d, a_n ...) на наглядный и обратно. Для задач такого уровня формулы не нужны. Они понадобятся для решения более сложных, запутанных задач, в которых в качестве «дано» фигурируют совершенно удивительные конструкции – отношения каких-нибудь членов арифметической прогрессии, суммы или произведения некоторых членов. Эти задачи искусственны, при их решении уже не обойтись без составления уравнений. Тут интерактивный чертеж поможет нам проверить, удовлетворяет ли найденная прогрессия условию задачи.

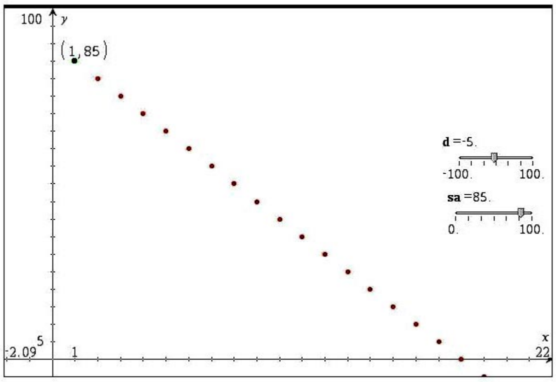
Давайте не будем сейчас пытаться суммировать прогрессию. Общее количество задач, решенных к текущему моменту – величина понятная: ко вчерашнему дню было

решено 200 задач, к сегодняшнему дню – 203 задачи, к завтрашнему дню будет решено 206 задач... Но сумма этих чисел абсолютно бессмысленна. Что мы узнаем, сложив 200 + 203 + 206? Такая сумма – число 609 – не имеет бытового смысла. Оставим вычисление суммы нашей арифметической прогрессии «на потом» и обратимся к следующей серии примеров.

«ЛЕСТНИЦА», ПО КОТОРОЙ НЕВОЗМОЖНО ХОДИТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ.

Вспомним расхожую фразу «деньги к деньгам». Проследим за изменением количества денег на банковском счете. Пусть некоторая сумма положена в банк под 10 % годовых. Это означает, что каждый год в конце года сумма на счете увеличивается

А)



Б)

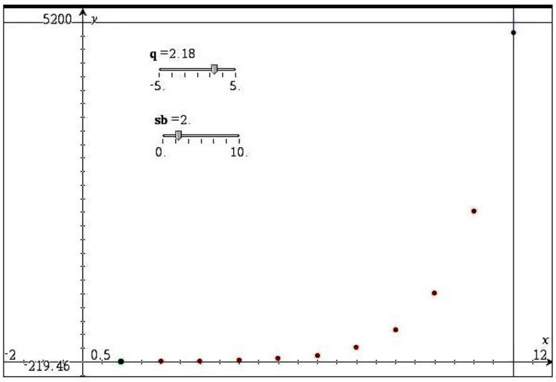


Рис. 1. А) Арифметическая прогрессия
(если каждый день ломать по 5 игрушек, то на 18-й день все 85 игрушек окажутся сломаны).
Б) Геометрическая прогрессия
(чтобы за 10 шагов попасть с 5 на 5000 значение $q = 2.18$ оказывается чуть-чуть маловато)

на 10 % от той суммы, которая была на счете в начале года: $u_{n+1} - u_n = 0.1u_n$. В этом случае увеличение суммы происходит тем сильнее, чем больше была первоначальная сумма. Для исходной суммы 10 рублей приращение составит всего 1 рубль, а исходная сумма 100 рублей увеличится уже на 10 рублей.

Ту же закономерность мы наблюдаем, анализируя численность бактерий в пробирке, если известно, что каждая бактерия делится пополам раз в минуту. При этом каждую минуту в пробирке появляется ровно столько бактерий, сколько было их там минуту назад: $u_{n+1} - u_n = u_n$. В обоих этих случаях мы получили схожие законы динамики – существенно сложнее, чем в предыдущем случае. Ранее изменение размера множества за единицу времени ни от чего не зависело, было постоянным. Теперь изменение размера множества зависит от его исходного размера: количество новых элементов, появившихся в множестве за единицу времени тем больше, чем больше элементов в нем уже имелось. Формула нашей зависимости $u_{n+1} - u_n = \mathrm{const} \cdot u_n$. Тогда $u_{n+1} = u_n + \mathrm{const} \cdot u_n = u_n(1 + \mathrm{const}) = u_n \cdot q$. Окончательная формула $u_{n+1} = u_n \cdot q$ отличается от формулы арифметической прогрессии только заменой знака сложения на знак умножения. Заданная таким образом последовательность называется геометрической прогрессией. В задаче про «вклад под 10 % годовых» $q = 1.1$, в задаче про бактерии $q = 2$. Воспользуемся интерактивным чертежом 2 для исследования такой динамики (рис. 1Б). Меняя значения параметра q, мы увидим, что при $q > 1$ значение нашей величины растет, при $q = 1$ значение не изменяется, при положительных q, меньших единицы, величина убывает[1]. То есть, как и в случае арифметической прогрессии, на чертеже появилась «лестница», но ходить по этой лестнице невозможно – ее ступеньки становятся все выше и выше (или, для $q \in (0; 1)$, все ниже и ниже).

«Прогнозирование» в случае арифметической прогрессии не представляет проблем. Ответы на вопросы «когда будут сломаны все игрушки?», «Сколько задач будет решено через неделю, если сегодня решено 200?» легко могут быть получены. Ответить на аналогичные вопросы для геометрической прогрессии («сколько денег будет на счете через 10 лет?, через сколько минут в пробирке окажется более 100000 бактерий?) гораздо труднее. Получаемые в процессе расчетов числа очень быстро «удлиняются» – либо быстро увеличиваются (при $q >> 1$), либо приходится работать с «длинными» дробями (при q близких к 1). Единственное q, с которым школьник может работать в уме или хотя бы на листочке, – это $q = 2$. Насколько далекие члены геометрической прогрессии мы сможем вычислить вручную, зависит от нашего умения работать с большими числами. Так же, как и воз-

[1] Попросите школьников придумать еще примеры геометрических прогрессий. Много ли их будет? Среди не очень надуманных примеров еще можно привести распространение слухов (то же самое – финансовые пирамиды). Последний пример хорош тем, что очень понятный смысл имеет сумма получившейся геометрической прогрессии. Заметим, что известная задача, часто рассматриваемая как «задача на геометрическую прогрессию», – «у каждого из 7 человек по 7 сундуков, в каждом сундуке по 7 шкатулок, в каждой шкатулке по 7… Сколько всего предметов?» – крайне неудачный пример. Здесь нет зависимости от времени, то есть нет последовательности как таковой. Возникающая в процессе решения сумма может быть вычислена при помощи формулы для суммирования прогрессии, но сами слагаемые членами прогрессии можно считать лишь на очень формальном уровне.

можность высоко подняться по нашей неудобной лестнице зависит от умения человека карабкаться на все более высокие отвесные стены. Возможно, для школьников окажется увлекательным соревнование «кто выше залезет?» – кто правильно вычислит член заданной геометрической прогрессии с самым большим номером. Или соревнование «кто быстрее?» – кто быстрее вычислит 10-й член прогрессии с не самым удачным знаменателем[1]. Интерактивный чертеж поможет нам проверить вычисления.

При проведении подобных вычислений полезно подчеркивать два момента. Во-первых, сходство алгоритмов вычисления членов арифметической и геометрической прогрессии – многократное повторение одного и того же преобразования предыдущего члена последовательности. Во-вторых, значительное увеличение сложности расчетов, возникающее при замене сложения умножением. В качестве вывода можно постараться придти к заключению, что вычислять «руками» для геометрической прогрессии слишком трудоемко, поэтому постараемся придумать какие-нибудь формулы для оптимизации вычислений.

Продолжая сравнивать арифметическую и геометрическую прогрессию, замечаем, что задача нахождения промежуточных членов прогрессии по двум известным крайним (пусть, по u_5 и u_{15}) легко решается для первой, но не для второй. В первом случае, глядя на картинку, заключаем, что разница между этими членами состоит из 10 одинаковых «ступенек» (по d каждая). Вычислим эту разницу, разделим ее на 10 и найдем высоту ступеньки. Теперь, прибавляя полученное значение d, получаем искомые члены. Такая задача решается для любых начальных данных. Вычисляемые числа (разницу между крайними членами и разность прогрессии) легко увидеть на картинке. Аналогичная задача в случае геометрической прогрессии для школьника неразрешима. Переход от аддитивного задания последовательности ($+d$) к мультипликативному ($\cdot q$) превращает привычное нам расстояние-разность в абсолютно неестественное расстояние-частное[2]. Школьник вынужден будет решать такую задачу уравнением: $u_{15} = u_5 \cdot q^{10}$. Найденное отсюда значение $q = \sqrt[10]{\frac{u_{15}}{u_5}}$ (давайте сейчас, как и наш школьник забудем про $\pm$) совершенно не радует. Это число нельзя «понять», нельзя «увидеть» на чертеже. Полагаю, в такой задаче был бы очень полезен для понимания происходящего предварительный компьютерный эксперимент. Пусть нам известны u_5 и u_{15}, скажем, $u_5 = 2$ и $u_{15} = 5000$. Давайте попытаемся при помощи интерактивного чертежа подобрать такое q, чтобы u_{15} приняло нужно значение (рис. 1Б). Мы легко устанавливаем (даже и без компьютера!), что $q = 2$ слишком мало, а $q = 3$ слишком велико. При первом «не дотягиваемся» до нужного значения пятнадцатого члена, при втором – его «перепрыгиваем». Попробуем $q = 2{,}5$ – тоже много. Тут уже расчеты в столбик будут только отвлекать нас от сути происходящего, вычисления будем проводить при помощи компьютера – на интерактивном чертеже, меняя слайдером значение q, или просто на калькуляторе[3]. После того как число q установлено с некоторой точностью ($q \approx 2.187$), можно попытаться его найти аналитически. Теперь полученное уравнение гораздо лучше привязано к сути происходящего: подбираем такое q, чтобы его десятая степень ***в точности*** равнялась от-

---

[1] Заодно повторим правила действий с десятичными дробями. Обычно к концу девятого класса уже мало кто помнит, куда надо ставить запятую при умножении дробей.

[2] Наша привычка к аддитивным шкалам делает неожиданно трудными некоторые задачи. В пробирку посадили бактерию. Каждую минуту число бактерий в пробирке удваивается. Через 10 минут пробирка оказалась полной. В какой момент она была заполнена ровно наполовину? На пруду растет кувшинка, площадь листьев которой каждый день удваивается. В воскресенье листья покрыли весь пруд. Какой день недели был, когда листья покрывали ровно половину пруда? Если Вы впервые встретились с этой задачей, не торопитесь с ответом!

[3] Автор использует программное обеспечение TI-Nspire, позволяющее в рамках одной программы как строить графики, так и производить вычисления, в том числе «в буквенном виде».

ношению $\frac{u_{15}}{u_5}$. Можно возвести в десятую степень найденное приближенное значение (естественно, считать будем не в столбик) и убедиться, что оно «почти подходит» – пятнадцатый член оказался чуть больше, чем 5006.

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ

Мы изучили две разные последовательности – арифметическую и геометрическую прогрессии. Мы научились вычислять члены последовательности, используя рекуррентное соотношение – это не трудно идеологически, а вычислительные трудности в случае геометрической прогрессии мы преодолели с помощью калькулятора. Мы научились восстанавливать пропущенные члены прогрессии. Для арифметической прогрессии мы это сделали, опираясь на чертеж. Для геометрической прогрессии мы сначала решили задачу приближенно, а потом получили точные значения, составив и решив сложное уравнение. Мы нарисовали «портрет» каждой последовательности. Для арифметической прогрессии получилась аккуратная лестница из одинаковых ступенек, ходить по ней – одно удовольствие. Для геометрической прогрессии лестница тоже получилась, но длина ее ступенек все время меняется (увеличивается или уменьшается), ходить по такой лестнице невозможно. Мы поняли, что для вычислений, связанных с арифметической прогрессией, хватает здравого смысла и листка бумаги. Ответы всегда получаются рациональные. В вычислениях, связанных с геометрической прогрессией, часто получаются неудобные, иррациональные, ответы, для получения точных ответов необходимы расчеты по формулам.

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ФОРМУЛАХ

Приходится сделать вывод о том, что геометрическая прогрессия – более сложный объект, чем арифметическая. Очевидные параллелизмы, аналогии (см. табл. 1) облегчают понимание и запоминание формул.

Однако не стоит убеждать школьника, что это так уж «совсем одно и то же». Тем более, что при вычислении суммы прогрессии все эти аналогии полностью рушатся. Формулы суммы и устроены совершенно по-разному, и доказательства их основано на совершенно разных идеях. Можно проделать хорошее упражнение по развитию интуиции: получить формулу суммы арифметической прогрессии (последняя строка второй колонки табл. 1) и попросить школьника заполнить соответствующую клеточку в третьей колонке – проделайте сами такое упражнение. Переходя от суммы к произведению, а от умножения – к возведению в степень, мы получим из выражения $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ выражение $\left(\sqrt{b_1 \cdot b_n}\right)^n$. Теперь самое интересное – надо понять, что это за формула. Ответ становится ясен, если вспомнить доказательство, – это формула для вычисле-

Табл. 1

	арифметическая	геометрическая
Чтобы получить следующий член из предыдущего, надо	**прибавить** число d	**умножить** на число q
Следующий член отличается от предыдущего	**на** d	**в** q
Средний член равен среднему	**арифметическому** крайних	**геометрическому** крайних
Чтобы получить n-ый член из первого нужно	**прибавить** d, **умноженное** на $(n-1)$	**умножить** на q, **возведенное в степень** $(n-1)$
	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	???

ния ***произведения*** *n* первых членов геометрической прогрессии. Удивительна такая формула лишь на первый взгляд. Со второго взгляда становится очевидно, что, переходя от сложения к умножению, мы должны были перейти к нему и в формулировке задачи: вместо «найти сумму членов» – «найти произведение членов». Увы, такая формула в школе не изучается[1]. Изучаемая формула – ***суммы*** членов геометрической прогрессии – «не родная» для прогрессии. Возможно, поэтому она так тяжело дается школьникам.

В заключение этого раздела отметим, что сама прогрессия – и геометрическая, и, особенно, арифметическая – достаточно естественные объекты. А вот их суммы менее привязаны к повседневному опыту. Придумывание задач, в которых требуется суммировать прогрессии, может быть полезным и увлекательным упражнением[2].

---

[1] К аналогиям между арифметической и геометрической прогрессией надо бы возвращаться при изучении логарифмов. Логарифмирование и потенцирование превращают сумму и произведение друг в друга. График геометрической прогрессии, нарисованный в полулогарифмических координатах (вместо осей n и a_n введем оси n и $log(b_n)$) – хорошо знакомая нам «лестница» со ступеньками равной высоты.

[2] Вот задача, придуманная коллегами. Спортсмен хочет попасть в книгу рекордов Гиннесса. Для этого он планирует совершить в общей сложности миллион подтягиваний. Он собирается подтягиваться каждый день на 3 раза больше, чем в предыдущий день.Через какое время после начала эксперимента он подтянется миллион раз? Сколько времени в день будут занимать подтягивания в конце эксперимента, если предположить, что одно подтягивание занимает 3 секунды? Прежде чем вычислять ответы на эти вопросы попробуйте ответить «на глаз» – запишите ответы на листочке. Найти число дней можно из неравенства $\frac{3+3k}{2}\cdot k > 1000000$. Оказывается, что миллион подтягиваний будет сделан за 816 дней, то есть меньше, чем за два года и три месяца тренировок. В последние дни перед достижением цели придется подтягиваться около 800 раз в день, что будет занимать примерно 40 минут. Эти числа совсем не так велики, как казалось. Именно таковы количества подтягиваний, совершаемых чемпионами по подтягиваниям на перекладине. Вероятно, каждый из этих чемпионов совершил более чем по миллиону подтягиваний (http://www.turnikpedia.ru/turnikmen-statji/raznoe/mirovoj-rekord-po-podtyagivaniyu.html).

Ягунова Екатерина Борисовна,
кандидат биологических наук,
доцент биолого-почвенного
факультета СПбГУ;
преподаватель математики
Академического университета
(лицей ФТШ).