

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КНОПОК ДЕЙСТВИЯ ПРИ СОЗДАНИИ ДЕМОНСТРАЦИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ В «ЖИВОЙ МАТЕМАТИКЕ 5»

За последние 20 лет программы динамической геометрии, в частности «Живая Математика», нашли широкое применение в образовательном процессе средних школ. Доступность программ динамической геометрии миллионам преподавателей и учеников способствовала накоплению приемов их использования, в частности для реализации индуктивного подхода к изучению геометрии. Программа «Живая Математика» наиболее часто используется для поддержки геометрических построений. Геометрические конфигурации, которые обычно описываются на словах, в программе «Живая Математика» определяются путём последовательных построений. Геометрические построения являются важной частью курса геометрии. Новые возможности ПО «Живая Математика 5» обеспечивают создание динамических демонстраций и «визуальных доказательств» различных геометрических теорем. Эта статья поможет научиться создавать собственные динамические демонстрации в «Живой Математике 5», используя кнопки действия.

1. СОЗДАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ДЕМОНСТРАЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КНОПОК ДЕЙСТВИЯ

1.1. КНОПКА «СПРЯТАТЬ/ПОКАЗАТЬ»

Демонстрируемая тема математики

Площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h определяется по формуле

$$S = \frac{a+b}{2} h.$$

Чаще всего ученики пользуются этой формулой, не понимая, почему она правильная. В статье предлагается динамическая иллюстрация формулы площади трапеции, которая демонстрирует идею доказательства теоремы – сведение формулы площади трапеции к формуле площади параллелограмма. В этой демонстрации трапеция пересекается средней линией, и верхняя половина трапеции поворачивается вокруг средней точки боковой стороны, образуя параллелограмм. Этот пример демонстрирует многоуровневое встраивание кнопок действия в презентацию.

Шаги построения

1. Постройте трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD . Найдите середины сторон AD и BC и обозначьте эти точки E и F соответственно. Постройте EF – среднюю линию трапеции. Отрезок EF делит трапецию $ABCD$ на две трапеции, каждая с высотой равной половине высоты $ABCD$. Постройте отрезки ED , CF , BF и AE и скройте отрезки



Кнопка «Спрятать/Показать»

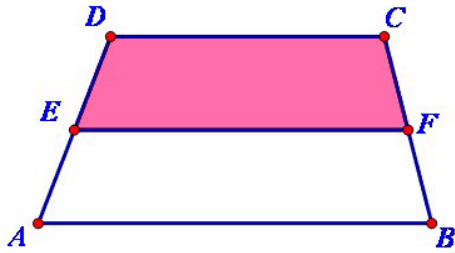


Рис. 1

AD и BC . Выделите точки F , C , D и E и постройте внутреннюю область трапеции $FCDE$. Для простоты будем называть эту трапецию $T1$ (рис. 1). Выделите всю фигуру $T1$, исключая её вершины, и создайте кнопку «Спрятать/Показать». Зайдите в свойства кнопки, введите имя кнопки «ВПо1» и выберите опцию «Всегда показывать объекты». (Кнопка «Спрятать/Показать» имеет три опции – «Всегда показывать объекты», «Всегда прятать объекты», и «Переключатель спрятать/показать»).

2. Выделите отрезки ED , DC , CF и внутреннюю область трапеции $FCDE$ и создайте кнопку «Спрятать/Показать» с опцией «Всегда прятать объекты». Введите «Т1пр» в качестве имени кнопки. Выделите отрезки ED , DC , CF , EF и внутреннюю область трапеции $FCDE$ и создайте кнопку «Спрятать/Показать» с опцией «Всегда показывать объекты». Введите «Т1по» в качестве имени кнопки. Отметьте точку F как центр поворота. Поверните трапецию $T1$ на -30° (включите внутреннюю область и стороны без вершин). Полученную поворотом трапецию обозначим $T2$. Создайте кнопки «Всегда прятать объекты» ($T2пр$) и «Все-

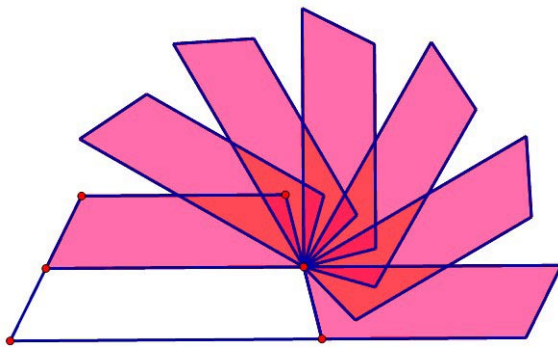


Рис. 2

гда показывать объекты» («Т2по»). Поверните трапецию $T2$ на -30° вокруг точки F , образуя трапецию $T3$, и создайте соответствующие кнопки «Т3пр» («Всегда прятать объекты») и «Т3по» («Всегда показывать объекты»). Продолжайте поворачивать трапецию и создавать соответствующие кнопки «Всегда прятать объекты» и «Всегда показывать объекты» до тех пор, пока последняя трапеция не повернется на -180° , образуя трапецию $T7$. Удалите имена для всех точек (рис. 2).

3. Выделите кнопки «Впо1» и «Т2пр», «Т3пр», «Т4пр», ..., «Т7пр» и создайте кнопку действия. Введите имя «Сброс» для кнопки и выберите опцию «Одновременно» для действия. Выделите кнопки «Т2по», «Т1пр», «Т3по», «Т2пр», «Т4по», «Т3пр», ..., «Т7по» и «Т6пр» в данной последовательности и создайте кнопку действия. Введите имя «Поворот» для кнопки и выберите опцию «Последовательно» для действия. Выберите кнопки действия «Сброс» и «Поворот» и создайте новую кнопку последовательного действия с именем «Демонстрация». Выделите кнопки «Т6по», «Т7пр», «Т5по», «Т6пр», «Т4по», «Т5пр», ..., «Т1по» и «Т2пр» в данной последовательности и создайте новую кнопку последовательного действия с именем «Возврат» (рис. 3).

4. Скройте все кнопки за исключением кнопок действия «Демонстрация» и «Возврат». Вершины трапеции можно передвигать, чтобы, изменяя её вид, убедиться в справедливости формулы для площади произвольной трапеции.

Динамический чертеж *Площадь Трапеции* можно найти на приложенном компакт-диске.

Обсуждение и дополнительные идеи для демонстраций

Ученики очень часто пользуются формулами для площадей фигур, не понимая, как они связаны между собой. Созданная демонстрация может помочь ученикам «увидеть» эту связь и помочь при выводе или доказательстве этих формул. Например, на основе формулы для площади прямоугольника $S = bh$ мы можем:

1) перенести часть параллелограмма с основанием b и высотой h так, чтобы образовался прямоугольник с такими же размерами, демонстрируя равные площади;

2) повернуть треугольник с основанием b и высотой h на 180° вокруг середины любой из сторон, образуя параллелограмм с основанием b и высотой h , или разрезать треугольник вдоль срединного отрезка и повернуть одну из полученных частей, образуя параллелограмм с основанием b и высотой $1/2h$, иллюстрируя формулу для площади треугольника $S = \frac{1}{2}bh$.

1.2. СОЗДАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВРАЩЕНИЯ

В предыдущем примере *Площадь Трапеции* мы использовали кнопки «Спрятать/Показать» в определённой последовательности для получения эффекта вращения. В этом примере мы используем само преобразование поворота.

Демонстрируемое утверждение

Если у треугольника все углы равны, то треугольник является равносторонним.

Для данной демонстрации мы построим инструмент поворота на фиксированный угол. Аналогично можно построить инструмент поворота на переменный угол.

Шаги построения

1. Постройте равносторонний треугольник и центр описанной вокруг него окружности D . (Для быстрого построения можно использовать инструмент «3/Треугольник (Вписанный)», содержащийся в документе «Многоугольники», приложенном на компакт-диске. В этом документе вы также найдёте инструменты пользователя для построения других правильных многоугольников.)

2. Рядом с треугольником постройте окружность с центром в точке E . Постройте точку F на окружности (при этом не следует использовать точку, определяющую радиус окружности). Отметьте центр окружности E как центр поворота и поверните точку F на 120° , образуя точку G . Поверните

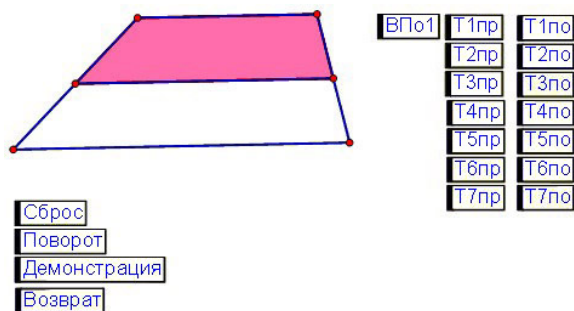


Рис. 3

точку G на 120° , образуя точку H . Поверните точку H на 60° , образуя точку I . Постройте дуги FG , GH , HI и IF на окружности. Скройте окружность E (не надо прятать точку E и дуги окружности) и поместите по одной точке на каждую дугу (J на дугу FG , K на дугу GH , L на дугу HI и M на дугу IF). Рядом с окружностью постройте отрезок NO длиной примерно в 1.5 см (рис. 4).

3. Постройте окружность с центром в вершине C и радиусом, равным длине отрезка NO . Постройте точки пересечения P и Q окружности C и сторон AC и BC соответственно. Постройте отрезки CP и CQ . Скройте окружность C .

4. Используя меню «Преобразования», отметьте $\angle FEJ$. Отметьте точку D как центр поворота. Выделите точки P , C и Q и отрезки CP и CQ и поверните все эти фигуры на отмеченный угол. Передвиньте точку J ближе к центру дуги FG и обозначьте угол, по-



Программирование с использованием динамического вращения

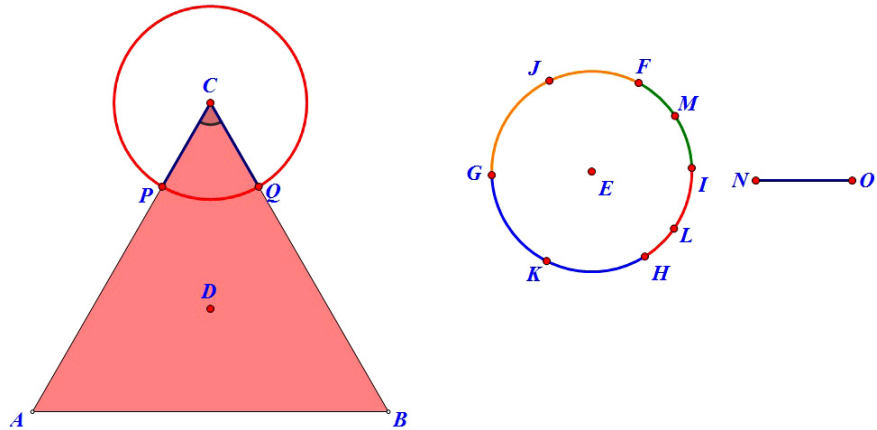


Рис. 4

лученный вращением при помощи инструмента «Маркер». Измерьте $\angle GEK$. Используя меню «Вычисления», найдите значение $-\angle GEK$. Отметьте точку D как центр поворота. Выделите точки P, C и Q и отрезки CP и CQ и поверните все эти фигуры на вычисленный угол (выделите эту величину на чертеже, не вводите её вручную). Передвиньте точку K ближе к центру дуги GH и обозначьте угол, полученный вращением при помощи инструмента «Маркер». Скройте точки P и Q и отрезки BP и BQ . Обозначьте $\angle ACB$ при помощи инструмента «Маркер».

5. Отметьте точку A как центр поворота. Используя меню «Преобразования», отметьте $\angle HEL$. Выделите отрезок AB и точку B и поверните эти фигуры на отмеченный угол. Измерьте $\angle IEM$. Используя меню Вычисления найдите значение $-\angle IEM$. Отметьте точку B как центр поворота. Выделите отрезок AB и точку A и поверните все

эти фигуры на вычисленный угол. Используя инструмент «Маркер», обозначьте равенство отрезков, поместив штрих на отрезок AB и на два отрезка, полученных поворотом отрезка AB (рис. 5).

6. Создайте кнопки перемещения: $J \rightarrow G, J \rightarrow F, K \rightarrow H, K \rightarrow G, L \rightarrow I, L \rightarrow H, M \rightarrow F$ и $M \rightarrow I$ (для каждой кнопки выделите две точки в указанном порядке). Нажмите кнопки $L \rightarrow H$ и $M \rightarrow I$, и выровняйте штрихи на отрезках, так чтобы они совпали.

7. Создайте кнопку последовательного действия с именем «Демонстрация» из следующей последовательности кнопок: $J \rightarrow G, K \rightarrow H, L \rightarrow I$ и $M \rightarrow F$. Создайте кнопку последовательного действия с именем «Возврат» из следующей последовательности кнопок: $M \rightarrow I, L \rightarrow H, K \rightarrow G$ и $J \rightarrow F$. При желании можно создать новую кнопку последовательного действия (с паузой 2 секунды между действиями) из кнопок «Демонстрация» и «Возврат».

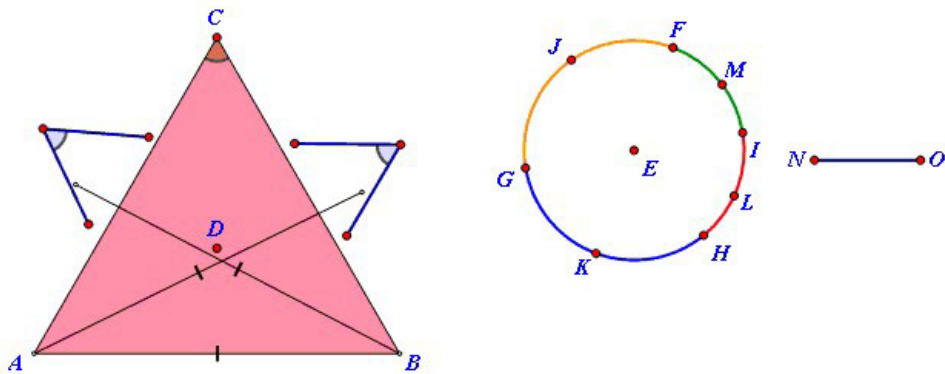


Рис. 5

8. Нажмите кнопку «Возврат». Измените стиль отрезков AB , BC и AC на сплошной. Скройте все точки, за исключением точек A , B и C , все дуги на окружности E , отрезок NO , все измерения на чертеже и все кнопки, за исключением кнопок «Демонстрация» и «Возврат» (или новой кнопки действия, созданной на основе этих двух кнопок).

Динамический чертеж *Равносторонний Треугольник* можно найти на приложенном компакт-диске.

Обсуждение и дополнительные идеи для демонстраций

Инструмент поворота, использованный в рассмотренном примере, позволяет контролировать преобразование поворота. Вместо мгновенного поворота, который получается при использовании команды «Повернуть» из меню «Преобразования», ученики могут наблюдать элементы поворота во время процесса преобразования. Это обеспечивает более ясную картину поворота, позволяющую ученикам понять происхождение элементов на чертеже, полученных поворотом. При помощи инструмента поворота вы можете исследовать повороты различных элементов в многоугольниках или окружностях. Эти исследования могут привести к новым подходам и объяснениям геометрических идей.

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ДЕМОНСТРАЦИЙ

Демонстрируемое утверждение

Противоположные углы вписанного четырёхугольника в сумме равны 180° .

Для демонстрации мы объединим преобразования поворота и переноса, создав динамические инструменты для обоих преобразований.

Шаги построения

1. Постройте окружность с центром в точке A и вписанный в окружность четырёхугольник $BCDE$. Рядом с окружностью постройте отрезок FG длиной примерно в 1 см. Постройте окружность с центром в каждой вершине четырёхугольника $BCDE$ и радиусом FG . Соедините отрезками точки B , C , D и E и точки пересечения соответствующих окружностей и сторон четырёхугольника. Обозначьте точки пересечения, как показано на рис. 6.

2. Скройте окружности с центрами в точках B , C , D и E . Постройте отрезок BD и поместите точку H на отрезок BD . Отметьте вектор \overrightarrow{BH} . Выделите точки B , B_1 и B_2 и отрезки BB_1 и BB_2 и перенесите все выбранные объекты на отмеченный вектор, образуя $\angle B_1'HB_2'$. Создайте кнопки перемещения $H \rightarrow D$ и $H \rightarrow B$. Скройте отрезок BD .

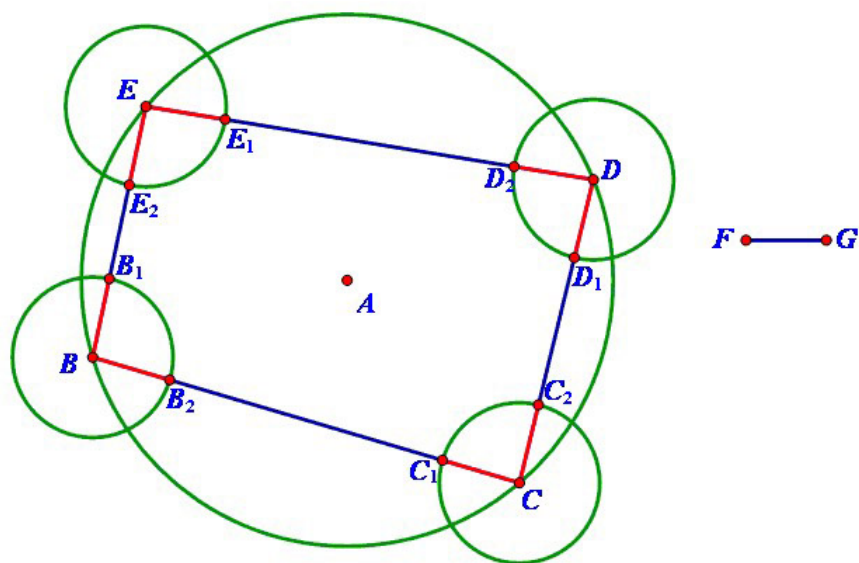
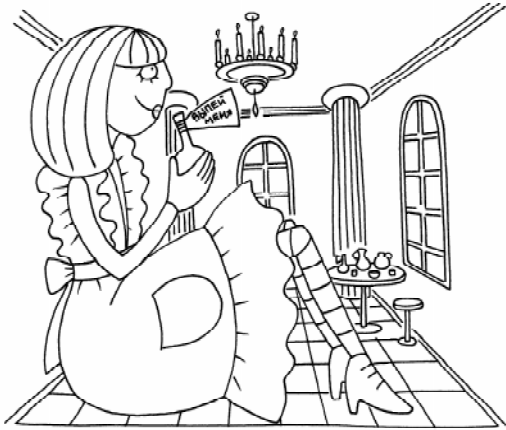


Рис. 6



Использование геометрических преобразований для создания демонстраций

3. Измерьте $\angle BCD$. Рядом с окружностью с центром в точке A постройте окружность с центром в точке I . Поместите точку J на эту окружность под углом примерно 0° . Отметьте точку I как центр поворота и поверните точку J на $\angle BCD$, образуя точку K . Постройте дугу JK на окружности I и поместите точку L на эту дугу. Создайте кнопку перемещения $L \rightarrow K$ и $L \rightarrow J$. Измерьте $\angle JIL$ и вычислите величину $-\angle JIL$. Отметьте точку H как центр поворота и поверните $\angle B_1'HB_2'$ на $-\angle JIL$, образуя $\angle B_1''HB_2''$. Скройте отрезки HB_1' и HB_2' и обозначьте $\angle B_1''HB_2''$, используя инструмент «Маркер» (рис. 7).

4. До того как собрать все кнопки в одну демонстрацию, мы повторим тот же процесс

построения, для того чтобы переместить $\angle C_1CC_2$ к $\angle BED$.

5. Постройте отрезок CE и точку M на этом отрезке. Выделите точки C , C_1 и C_2 , и отрезки CC_1 и CC_2 . Отметьте вектор CM и перенесите выделенные объекты на отмеченный вектор, образуя $\angle C_1'MC_2'$. Создайте кнопки перемещения $M \rightarrow E$ и $M \rightarrow C$. Скройте отрезок CE .

6. Измерьте $\angle EBC$. Отметьте точку I как центр поворота и поверните точку K на $\angle EBC$, образуя точку N . Постройте дугу KN на окружности с центром I и поместите точку O на эту дугу. Постройте кнопки перемещения $O \rightarrow N$ и $O \rightarrow K$. Измерьте угол $\angle KIO$. Отметьте точку M как центр поворота и поверните $\angle C_1'MC_2'$ на $\angle KIO$, образуя $\angle C_1''MC_2''$. Скройте отрезки MC_1' и MC_2' и обозначьте $\angle C_1''MC_2''$, используя инструмент «Маркер» (рис. 8).

7. Выделите по порядку кнопки $H \rightarrow D$ и $L \rightarrow K$ и создайте кнопку последовательного действия с именем «Демо1». Выделите по порядку кнопки $M \rightarrow E$ и $O \rightarrow N$ и создайте кнопку последовательного действия с именем «Демо2». Выделите по порядку кнопки $H \rightarrow B$ и $L \rightarrow J$ и создайте кнопку последовательного действия с именем «Сброс1». Выделите по порядку кнопки $M \rightarrow C$ и $O \rightarrow K$ и создайте кнопку последовательного действия с именем «Сброс2». Выделите по порядку кнопки «Демо1» и «Демо2» и создайте кнопку последователь-

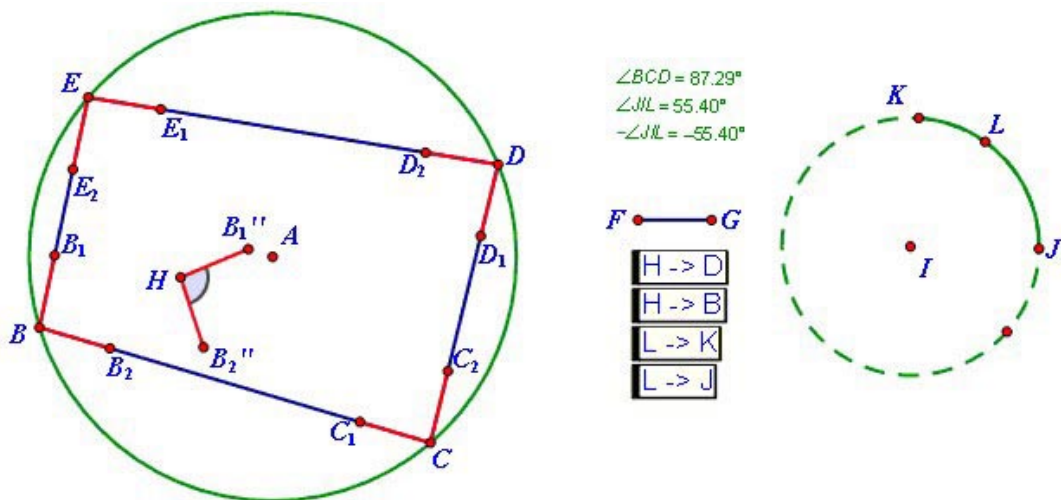


Рис. 7

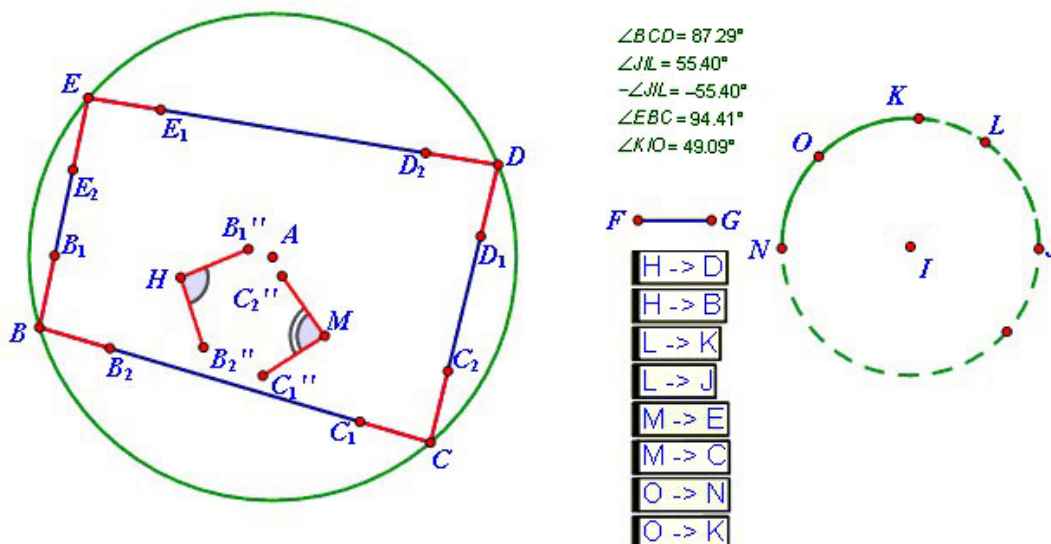


Рис. 8

ного действия с именем «Демонстрация». Выделите по порядку кнопки «Сброс1» и «Сброс2» и создайте кнопку последовательного действия с именем «Сброс». При желании можно создать новую кнопку последовательного действия (с паузой 2 секунды между действиями) из кнопок «Демонстрация» и «Сброс».

8. Скройте все ненужные детали.

Динамический чертеж *Описанный Четырёхугольник* можно найти на приложенном компакт-диске.

Обсуждение и дополнительные идеи для демонстраций

В приведённом примере мы построили отрезки для представления углов в четырёхугольнике. Демонстрация включает плавное перемещение и поворот этих отрезков. При

использовании демонстраций обратите внимание, насколько легко ученики следуют идеям, представленным в создаваемых сюжетах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Помните, что ключом к созданию интересных и динамических демонстраций ваше воображение является. Начните с определения цели презентации. Обдумайте различные способы создания сюжета, и претворите вашу идею хотя бы двумя разными способами.

В следующем выпуске журнала планируется вторая часть этой статьи, в которой вы сможете ознакомиться с применением логики Буля для создания геометрических демонстраций.

От редакции: выход 5-ой версии среды «Живая Математика» планируется в марте 2013 года. Подробности на сайте Института новых технологий www.int-edu.ru.

*Irina Lyublinskaya,
Ph.D., Professor of Mathematics and
Science Education, College of Staten
Island College of Staten Island,
City University of New York, USA.*

© Наши авторы, 2012.
Our authors, 2012.