Ягунова Екатерина Борисовна

СТРАТЕГИЯ ПОВЕДЕНИЯ НА ЭКЗАМЕНЕ КАК ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

История из жизни. Пришлось как-то сопровождать на ЕГЭ по математике в центр тестирования одиннадцатиклассников нашей школы (лицей ФТШ). Сопровождающим учителям была отведена каморка где-то около гардероба. Не успели мы все, сопровождающие из разных школ, расположиться, достать книжки и прочую работу, как с экзамена вышел первый школьник – не из нашей школы. Ещё через несколько минут – второй, третий, …, а прошло лишь минут 30–40 от начала экзамена. До конца отведённого на экзамен времени продержались только наши ученики – они выходили под брюзжание дежурных по аудиториям: «пишут и пишут… все уже давно ушли, а они всё пишут… всё бумагу просят… бланков на них не напасёшься…». Ситуация эта была комична и типична. Почему-то именно более слабые школьники часто первыми сдают работы, решив в них далеко не всё. Призывы посидеть ещё – подумать, проверить – редко существенно изменяют ситуацию. Я обычно объясняла это себе «общим пофигизмом» более слабых учеников и недостатком у них силы воли. До тех пор пока однажды, отвечая школьникам на вопросы «Зачем? Зачем это всё?», я не изменила существенно эту точку зрения.

Вопросом «зачем?» в школьном курсе алгебры не очень-то принято задаваться. Зачем мы изучаем ту или иную тему? Какое отношение к жизни имеет эта тема? Используются ли где-нибудь осваиваемые нами на уроках навыки? Ответы на такие вопросы, если они вообще даются, обычно не вполне корректны, ибо не выводят нас за рамки процесса обучения. Чаще всего происходит формальная отсылка к будущему: «изучать/знать/уметь ЭТО надо, чтобы потом можно было выучить/научиться делать что-то СЛЕДУЮЩЕЕ». Давайте пофантазируем:

– Зачем уметь извлекать корни?

– Чтобы потом можно было решать квадратные уравнения[1].

– А зачем решать квадратные уравнения?

– Чтобы потом решать всякие прочие уравнения, которые к ним сводятся.

– А зачем решать все эти «прочие уравнения»?

Разговор зашёл в тупик. Можно, конечно ответить «чтобы хорошо сдать ЕГЭ», потом – «чтобы поступить в институт» и т. д. Это всё уже несерьезно. Никакой конкретной ощутимой пользы от умения извлекать корни нащупать не удалось.

Межпредметные связи могли бы помочь с ответами на такие вопросы, если бы не стояли на десятом (сто десятом?) месте среди учительских приоритетов. Да и дополнительных усилий они требуют не от одного учителя, а сразу от нескольких.

На этом пессимистичном фоне мы должны очень ценить те задачи, которые позво-

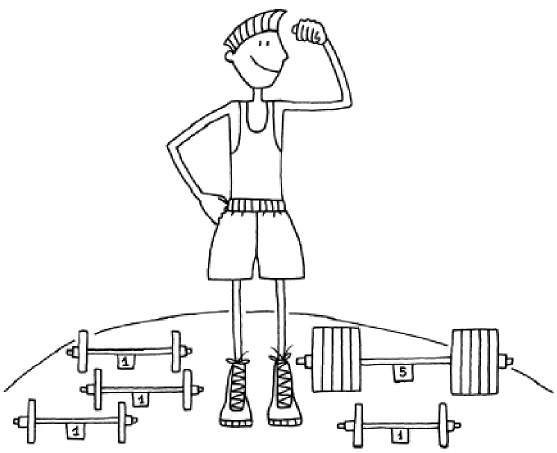
[1] Ответ явно несостоятелен, ибо уравнение $x^2 - 1 = 0$ решать и так умели, а решить уравнение $x^2 + 1 = 0$ корни нам не помогут.

ляют в рамках изучаемой темы поговорить о чём-то содержательном, применимом ВНЕ школьного курса. Один из таких примеров – задачи линейного программирования.

К концу восьмого класса школьник знает практически всё про «всё линейное» – линейные уравнения с одной переменной, линейные неравенства с одной переменной, системы линейных неравенств с одной переменной, системы линейных уравнений с двумя переменными. Давайте, пользуясь всеми этими знаниями, научимся решать задачу линейного программирования. «Транспортная задача» едва ли интересна школьникам, поэтому сочиним что-нибудь на «школьную» тему.

Задача. На экзамене по математике школьнику были предложены простые и сложные задачи стоимостью 1 балл и 5 баллов соответственно. На решение простой задачи школьник тратит 2 минуты, на решение сложной – 30 минут. При этом решение простой задачи отнимает у него 1 у.е. силы, а решение сложной – 4 у.е. силы[1]. На проведение экзамена отведено 5 часов. Для получения положительной отметки за экзамен необходимо решить не менее 5 простых задач и не менее одной сложной.

А. Как действовать школьнику, если силы у него только 30 у. е., а он хочет набрать как



...школьнику были предложены простые и сложные задачи, стоимостью 1 балл и 5 баллов.

можно больше баллов? Какое наибольшее число баллов он сможет заработать? Сколько времени он потратит на написание экзамена?

Б. Те же вопросы про школьника, у которого 60 у. е. силы.

В. Те же вопросы про школьника, у которого 100 у. е. силы.

При выработке стратегии поведения для нашего школьника мы должны учитывать три аспекта: затраты времени, затраты сил, набранные баллы. Если бы этих учитываемых параметров было всего два, мы могли бы справиться с задачей при помощи здравого смысла. Рассмотрим такие «редуцированные задачи».

Редуцированная задача 1. Забудем про силу. Будем учитывать только время. Тогда решение сложной задачи приносит 5 баллов на каждые потраченные 30 минут. Решение простой задачи приносит 1 балл на каждые 2 потраченные минуты, то есть 15 баллов на потраченные 30 минут. Значит, выгоднее решать простые задачи. Стратегия очевидна: решать только простые задачи. Дополнительное условие о том, что необходимо решить не менее 1 сложной задачи вносит незначительные коррективы в стратегию: решить сперва 1 сложную задачу, а потом решать только простые.

На решение 1 сложной задачи будет потрачено 30 минут. Оставшихся 4 часов 30 минут, равных 270 минутам хватит на решение 135 простых задач. Всего школьник заработает $1 \cdot 5 + 135 \cdot 1 = 140$ баллов. Заметим, что на экзамен будет затрачено $1 \cdot 4 + 135 \cdot 1 = 139$ у. е. Видно, что при полном условии исходной задачи эта стратегия не реализуема – такого количества единиц силы нет даже у самого сильного школьника.

Редуцированная задача 2. Забудем про время. Будем учитывать только силу и баллы. Тогда решение сложной задачи приносит 5 баллов за 4 потраченные единицы силы,

[1] «у.е. силы» – абсолютно понятный школьнику термин. Ассоциация с компьютерной игрой тривиальна. Нужно быть готовым отвечать на вопросы: «а сколько у нас жизней?», «а если я найду артефакт?», «а что будет на следующем уровне?». Все эти вопросы можно вспомнить чуть позже и разукрасить ответами на них условие следующей задачи.

а решение простой – 1 балл за 1 единицу силы. Очевидно, что решать сложные задачи выгоднее. Стратегия: решать только сложные задачи. Дополнительное условие о том, что необходимо решить не менее 5 простых задач, опять уточняет стратегию: решить сперва 5 простых задач, а потом решать только сложные. На решение 5 простых задач будет потрачено 5 у. е. силы. Оставшихся 25 у.е. силы (в пунктах (б), (в) – 55 у.е. и 95 у.е. соответственно) хватит на решение 6 сложных задач (в пунктах (б), (в) – 13 и 23 соответственно). Всего школьник заработает $5 \cdot 1 + 6 \cdot 5 = 35$ баллов (в пунктах (b), (c) – $5 \cdot 1 + 13 \cdot 5 = 70$ и $5 \cdot 1 + 23 \cdot 5 = 120$ соответственно). Заметим, что на экзамен будет затрачено $5 \cdot 2 + 6 \cdot 30 = 190$ минут = 3 часа 10 минут (в пунктах (б), (в) – $5 \cdot 2 + 13 \cdot 30 = 400 =$ = 6 часов 40 минут и $5 \cdot 2 + 23 \cdot 30 =$ = 700 минут = 11 часов 40 минут соответственно). Видно, что в исходном условии задачи эта стратегия не реализуема – только слабый школьник, следуя такой стратегии, укладывается в отведённое на экзамен время. Более сильный и самый сильный школьники при выработке стратегии поведения на экзамене с необходимостью будут вынуждены учитывать затраты времени на решение задач разной сложности.

Отметим, что оптимальная стратегия, построенная на основании учёта затраченного времени, противоположна оптимальной стратегии, построенной на основании учёта силы школьника. По одной стратегии следует решать преимущественно простые задачи, по другой – сложные. Что же делать, если мы хотим учесть и силу, и время одновременно?

Давайте «решать задачу уравнением», или, как теперь модно говорить, «построим математическую модель задачи». Пусть x, y – количество простых и сложных задач, которые должен решить школьник, следуя оптимальной стратегии. Для решения этих задач ему потребуется $2 \cdot x + 30 \cdot y$ минут времени, а затрачено им будет $1 \cdot x + 4 \cdot y$ единиц силы. По условию задачи, затраченное время не должно превосходить 5 часов, то есть $2 \cdot x + 30 \cdot y \le 300$, а затраченная сила не должна превосходить имеющейся: $1 \cdot x + 4 \cdot y \le 60$ (для пунктов (а) и (в) $1 \cdot x + 4 \cdot y \le 30$ и $1 \cdot x + 4 \cdot y \le 100$ соответственно). Для успешной сдачи экзамена нужно решить хотя бы одну сложную задачу и хотя бы 5 простых, поэтому $x \ge 5, y \ge 1$. Требуется, чтобы количество заработанных баллов было как можно больше, то есть величина $1 \cdot x + 5 \cdot y$ принимала наибольшее значение.

Дано:

$$x, y \in Z$$
$$2 \cdot x + 30 \cdot y \le 300$$
$$1 \cdot x + 4 \cdot y \le 60$$
$$x \ge 5$$
$$y \ge 1$$

Найти:

$$\max\,(1 \cdot x + 5 \cdot y)$$

Что делать дальше? Линейное неравенство с двумя переменными – незнакомый школьнику объект, система таких неравенств – тем более. Работать с таким объектом школьники не умеют. Что же они делают?

Самый ассоциативно близкий объект – система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Довольно часто школьники начинают «по аналогии» решать и систему неравенств: «выражают» переменную из одного неравенства и «подставляют» её в другое – все эти операции проводятся с неравенствами. Действия абсурдные. При таких манипуляциях мы не «выражаем» одну переменную через другую, а лишь «оцениваем» её при помощи второй переменной. «Подстановка» имеет смысл только при удачном сочетании знаков наших двух неравенств, да и в этом удачном случае мы лишь оцениваем оставшуюся переменную. Однако объяснить всё это школьникам довольно трудно.

Второй вариант, также совершенно типичный: школьник просто игнорирует, не замечает то, что его пугает и ему неприятно, а именно – знаки неравенств. То есть вместо системы неравенств он решает систему уравнений. После чего полученные решения системы уравнений предлагаются в качестве ответа[1].

В обоих случаях лучше избегать разговоров о том, почему ***так*** неправильно решать. Дело в том, что решать эту систему неравенств, вообще говоря, не требуется. Обсуждая пути решения того, что решать не нужно, мы только уходим в сторону от нашей задачи. Принципиальным является не вопрос «как решать?», а вопрос «что решать?». Нам нужно не «решить систему неравенств», а найти наибольшее значение некоторого выражения. Линейные неравенства – это не то, что является целью нашей деятельности, а то, чем мы должны пользоваться при решении задачи.

Такая постановка задачи является совершенно новой для школьников. Нам нужно придумать, как использовать линейные неравенства. Естественно, в процессе такого придумывания мы вернёмся к аналогиям и вспомним про линейные уравнения с двумя переменными. Стоит вспомнить разные методы решения системы уравнений – сложение, «выразить-подставить» и графический. Первые два метода не адаптировать к нашей задаче – они позволяют только решить соответствующую систему. А вот последний метод нам подойдёт. Возникающие при применении этого метода картинки имеют самостоятельную ценность. Они позволяют «представить» наши уравнения и «увидеть» на картинке решения системы. Попробуем также поступить с нашими неравенствами. Нужно сделать всего один дополнительный шаг в рассуждениях: если линейное уравнение с двумя переменными задаёт прямую на плоскости, то линейное неравенство с двумя переменными задаёт полуплоскость. Изобразим полуплоско-

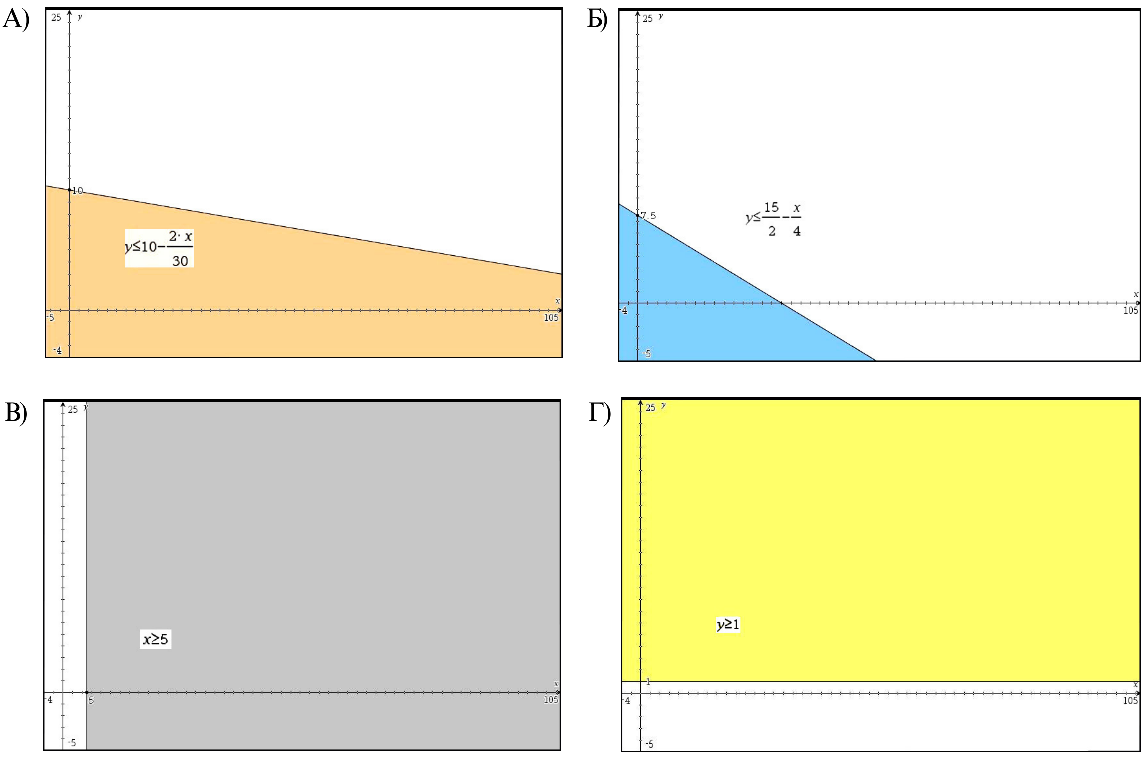


Рис. 1. Множества, соответствующие каждому из неравенств:
А) $2x + 30y \leq 300$, Б) $x + 4y \leq 60$, В) $x \leq 5$, Г) $y \geq 1$

[1] Именно так поступает большинство школьников при решении задачи B12 на ЕГЭ. Вместо данного в условии неравенства «….величина… не превосходит…» он работает с равенством «…величина …. равна….», просто подставляя граничное значение в соответствующие формулы. К сожалению, только в очень немногих задачах B12 это приводит к неправильному ответу.

сти, которые соответствуют каждому из четырёх неравенств[1] нашей задачи (решим задачу для среднего школьника – того, у которого 60 единиц силы). Это можно сделать в тетради, а можно и при помощи какой-либо программы[2] (рис. 1, А–Г). Известно, что для решения системы неравенств нужно решить каждое неравенство и взять общие точки решений. Поступим так же – возьмём общие точки построенных полуплоскостей – полученное множество[3] изображено на рис. 2.

Как это множество связано с нашей задачей? Формальный ответ: координаты каждой точки этого множества удовлетворяют системе неравенств, которую мы составили по условию задачи. Более подробно. Возьмём какую-либо точку с целочисленными координатами (все такие точки отмечены на рис. 2). Абсцисса такой точки – количество простых задач, ордината – количество сложных задач. Если точка лежит в выделенном множестве, то на решение этих задач уйдёт не более 300 минут времени и не более 60 единиц силы, при этом будет решена хотя бы одна сложная и хотя бы 5 простых задач. Это означает, что школьник, у которого 60 единиц силы может показать на экзамене такой результат. Если точка не лежит в выделенном множестве, то на решение такого количества простых и сложных задач школьнику не хватит либо сил, либо времени (либо не выполнено условие на минимальное число решённых задач каждого уровня сложности).

Мы перевели условие задачи из алгебраической формы в графическую. Как теперь найти ответ на вопрос? Для каждой целочисленной точки выделенной фигуры (то есть для каждого возможного сочетания числа простых и сложных задач, решённых на экзамене) можно вычислить заработанную сумму баллов. Та точка, для которой такая сумма максимальна, соответствует наилучшей стратегии нашего школьника. Осталось придумать, как избежать необходимости вычислять значение выражения $x + 5y$ для каждой точки.

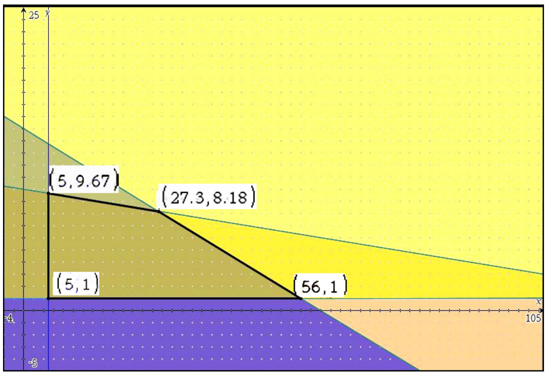


Рис. 2. Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, выделено жирной линией. Рассмотрен случай 60 у.е. силы

Выражение $x + 5y$ напоминает кусок уравнения прямой – без знака равенства и правой части. Правая часть – это именно то, что мы ищем, – сумма баллов, набранная школьником. Можно ли набрать сумму баллов 100? То есть, выполняется ли равенство $x + 5y = 100$ для координат какой-либо точки нашего множества? Чтобы это узнать, нарисуем прямую $x + 5y = 100$ и посмотрим, проходит ли она через точки нашего множества (рис. 3А). По рисунку хорошо видно, что эта прямая не пересекает выделенное множество. Значит, набрать 100 баллов у этого школьника (его сила – 60 у. е.) за отведённые на экзамен 5 часов не получится.

Давайте теперь нарисуем прямую для другой суммы баллов – 50, 30… – для лю-

[1] Тут место для весьма содержательного обсуждения связи между множеством на плоскости и алгебраическими соотношениями. Идея «числа $(x; y)$ удовлетворяют условию ⇔ точка с координатами $(x; y)$ лежит в нашей фигуре» известна школьнику (хотя бы на примере уравнения прямой), но обычно плохо осознается. Идея эта глубокая, требует неоднократного повторения. Прямые и полуплоскости (линейные уравнения и линейные неравенства с двумя переменными) – сами по себе довольно простые объекты. Увидеть по чертежу, лежит ли точка на прямой (в полуплоскости) довольно легко. Подстановка координат точки в линейное соотношение также не требует больших усилий. Можно (и нужно) потратить некоторое время на эксперименты с точками и их координатами: точка A принадлежит множеству? Координаты точки A удовлетворяют уравнению? Точка B принадлежит множеству? Координаты точки В удовлетворяют уравнению? …

[2] Автор использует TI-Nspire.

[3] Вид множества зависит от значений параметров.

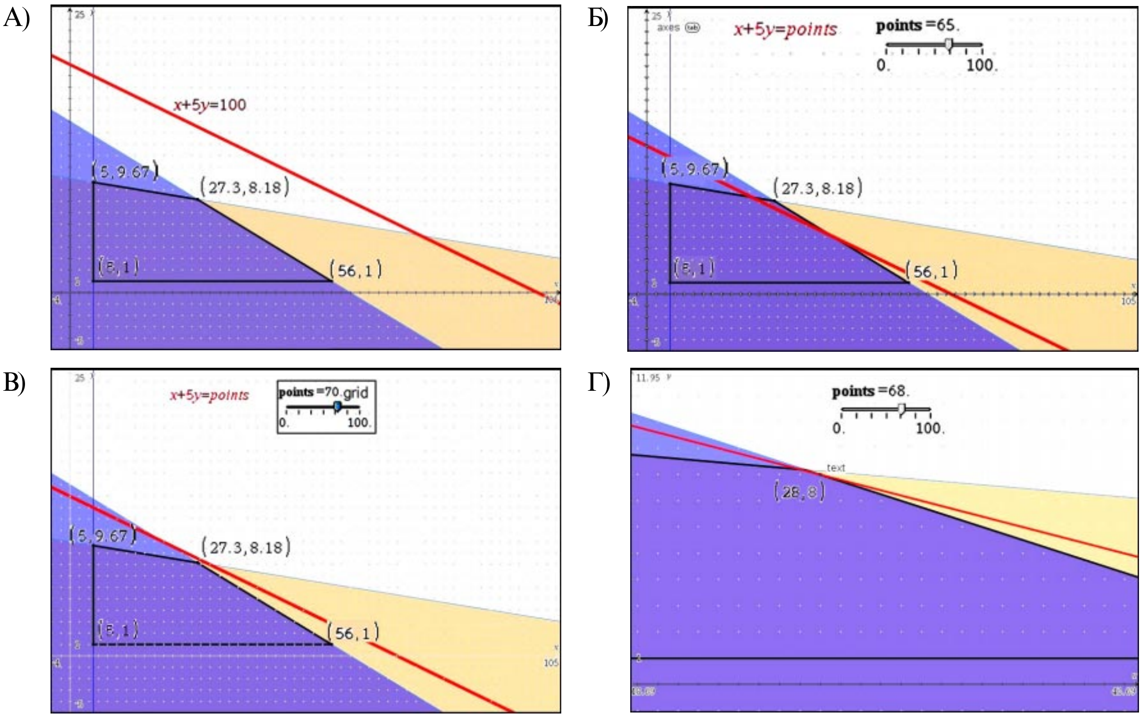


Рис. 3. Сколько баллов сможет набрать школьник?
А) 100 баллов? Нет, не может. Б) 65 баллов? Да, может.
В) 70 баллов? Нет, не может. Г) Наибольшее возможное число баллов – 68.

бой. Воспользуемся возможностью изменять положение прямой при помощи слайдера. Видно, что 65 баллов набрать ещё можно (рис. 3Б), а 70 баллов – уже нельзя (рис. 3В). Кроме того, стало понятно, что большему количеству набранных баллов соответствуют более высоко расположенные прямые[1]. Чтобы найти наибольшее достижимое количество баллов, рассмотрим картинку в более крупном масштабе – рис. 3Г. Самая «высокая» прямая, всё-таки пересекающая наше множество в целочисленной точке, – прямая $x + 5y = 68$. Координаты целочисленной точки нашего множества, лежащей на ней, – (28; 8). Это значит, что решив 28 простых и 8 сложных задач, школьник уложится в отведённое время и наберёт 68 баллов. Для школьника, у которого 60 единиц силы, задача полностью решена.

Чтобы найти ответ для слабого школьника (30 у. е. силы) и сильного школьника (100 у. е. силы) нет необходимости повторять все построения заново. Можно также воспользоваться возможностью изменять значение силы при помощи слайдера. Оптимальными оказываются следующие стратегии:

При силе 30 у. е.: решить 6 простых и 6 сложных задач. Школьник наберёт 36 баллов, потратит 192 минуты.

При силе 60 у. е.: решить 28 простых и 8 сложных задач. Школьник наберёт 68 баллов, потратит 296 минут

При силе 100 у. е.: решить 81 простую и 4 сложных задачи. Школьник наберёт 101 балл, потратит 282 минуты.

Задача полностью решена, осталось обсудить полученные результаты и возможные варианты дальнейшего развития сюжета.

Чего мы достигли в учебном плане? Элементарными методами решили задачу с нетривиальным условием. Научились работать с линейными неравенствами с двумя переменными. Познакомились с понятием наибольшего значения функции многих переменных на множестве.

Что мы выяснили «по жизни»? Для слабого школьника лимитирующим фактором является сила. Для него увеличение време-

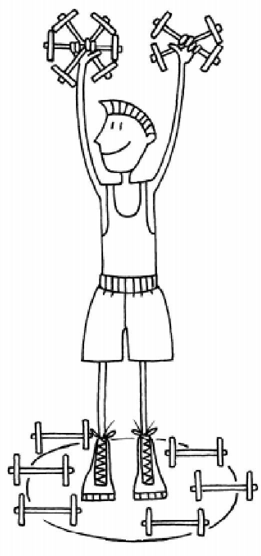
[1] Естественно, это можно увидеть не только из чертежа, но и из уравнения, приведя его у виду $y = \ldots$

ни, отведённого на экзамен (или времени, проведённого им на экзамене), не приведёт к улучшению результата. Его задача – использовать максимально эффективно то небольшое количество сил, которое у него есть. Давайте вспомним про слабых учеников, первыми выходящих с экзамена. Они действительно сделали «всё, что могли» – силы кончились, дальше сидеть на экзамене смысла нет.

Для сильного школьника лимитирующим фактором оказывается время. Оказалось, что сильному школьнику выгоднее набирать баллы решением большого числа простых задач, чем решением сложных. Некоторые сильные школьники приходят к этому выводу интуитивно. Наверное, каждый преподаватель слышал что-нибудь типа: «а зачем мне решать задачу "со звёздочкой"? – я свою "пятёрку" и так получу». Это означает: «на решение задачи "со звёздочкой" я потрачу кучу времени; более эффективно для меня было бы потратить это время на что-нибудь другое».

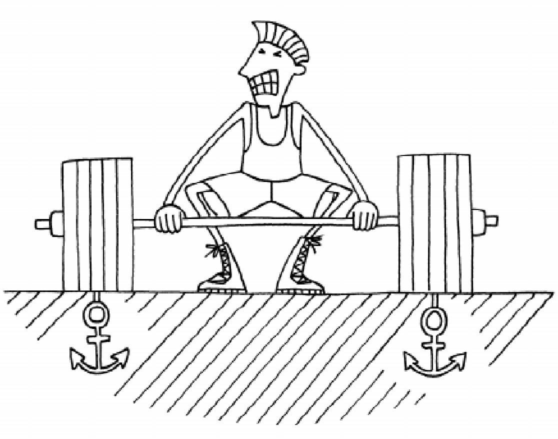
Весьма неожиданным, заслуживающим обсуждения, оказывается то, что больше всего сложных задач выгодно решить школьнику средней силы, – кто из читателей предугадал такой результат? Мы подсознательно, «по жизни», ожидаем везде монотонных зависимостей: «чем дальше, тем дольше», «чем дороже, тем лучше», «чем больше занимаешься, тем выше результат» и т. п. Но в данном случае оказалось, что зависимость числа сложных задач в оптимальной стратегии не монотонно зависит от силы школьника[1]. Выше были рассмотрены две полярные стратегии, возникающие при рассмотрении «редуцированных» задач. По одной стратегии надо было решать простые, по другой – сложные задачи. Если бы мы решали одну из этих редуцированных задач (то есть учитывали лишь один фактор), меняя силу школьника, мы бы, естественно, получили монотонную зависимость от силы числа задач разной сложности в оптимальной стратегии. Эффект немонотонности возник при попытке решить комбинированную задачу, то есть учесть оба фактора (время и силу). Для этого не годится ни одна из стратегий, которые были получении при решении редуцированных задач. Стратегия, полученная нами при решении полной задачи, не является их комбинацией или модификацией. Задача, в которой учтены оба фактора, является принципиально иной, чем «редуцированная» однофакторная задача. Для её решения нам пришлось применить иной аппарат. Полученные стратегии неожиданным для нас образом реагируют на изменения начальных данных. Теперь можно задуматься о том, сколь неожиданные эффекты возникнут, если мы попытаемся ещё приблизить задачу к жизни и ввести в условие ещё несколько факторов!

Ещё один заслуживающий внимания результат – малое варьирование числа трудных задач в оптимальной стратегии. Число простых задач в стратегиях сильного и слабого школьника отличается более чем в 10 раз, а число сложных – лишь в 1.5–2 раза. Это связано с тем, что сложные задачи оказались «слишком сложными» – они требуют



...сильному школьнику выгоднее набирать баллы решением большого числа простых задач.

[1] Кстати, а что будет с числом простых задач? На основании трех разобранных значений силы нет оснований заподозрить немонотонность зависимости числа простых задач в оптимальной стратегии от силы школьника. Но и монотонность пока не доказана. Чтобы выяснить, как же все-таки обстоит дело, необходимо провести более детальное исследование.



...сложные задачи оказались «слишком сложными»...

слишком много времени для решения, но приносят относительно мало баллов. Как исправить ситуацию? Можно поразмышлять об этом, анализируя устройство нашей картинки. Возможные варианты: подобрать другую стоимость сложных задач – такую, при которой ученикам будет более выгодно их решать; «упростить» сложные задачи, чтобы на их решение требовалось меньше времени. Есть и «жёсткий» вариант: чтобы заставить школьников решать сложные задачи, можно просто ограничить количество простых задач на экзамене. Все эти несложные соображения удивительно легко поясняют интуитивно известное каждому преподавателю понятие «неудачно составленной контрольной».

Итак, решены некоторые учебные задачи, получены некоторые практически применимые результаты. Если хочется дальше позаниматься этим сюжетом, то можно пойти по пути модификации условия и сконструировать сколь угодно сложные правила организации и сдачи экзамена и подсчета баллов – вспомним вопросы про «что будет на следующем уровне». Найдите оптимальные стратегии для такого сложно организованного экзамена! Или будем далее анализировать уже решённую задачу – построим график зависимости числа простых и сложных задач в оптимальной стратегии от силы школьника, подберём параметры, стимулирующие к решению сложных задач… Ну, и, конечно, можно познакомиться с огромным количеством других задач, которые решаются методами линейного программирования – можно, благодаря возможностям, которые предоставляет ученику и учителю применение компьютерных инструментов.

Ягунова Екатерина Борисовна,
кандидат биологических наук,
доцент биолого-почвенного факультета СПбГУ;
преподаватель математики Академического университета (лицей ФТШ).