Иванов Сергей Георгиевич,
Рыжик Валерий Идельевич

КОМПЬЮТЕРНАЯ ПОДДЕРЖКА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

В книге [1] мы представляем математику (геометрию) как область интеллектуальной деятельности, не сводящуюся только к выведению следствий средствами формальной логики и к получению кем-то заданных результатов путём алгоритмических предписаний. Мы стоим за другой подход к математике.

1. В математической деятельности существенна исследовательская составляющая. Она включает в себя поиск гипотезы; для появления оной необходимы наблюдения, догадки, аналогии, индуктивные предположения, обобщения…

2. В математической деятельности далеко не все дороги ведут к успеху, возможны заблуждения, тупики и, разумеется, ошибки.

3. Наряду с исследовательской деятельностью, в занятиях математикой необходима деятельность критическая. Сомнение, необходимо сопутствующее появлению гипотез, можно устранять проверкой, в том числе и такой, которая может считаться доказательной. Тем самым поиск доказательства может быть отнесён к критической деятельности, а само доказательство – являться её результатом.

Элементом проверки может быть поиск контрпримеров. Тем самым, критическая деятельность включает в себя творческую составляющую.

Частью критической деятельности является также оценка сделанной работы, в том числе из эстетических соображений.

Постулаты для учителя

Прежде чем включать компьютерные технологии в собственную систему работы, учителю математики по существу необходимо скорректировать собственную установку, относящуюся к его образовательной деятельности. Нашу установку мы зафиксировали в следующих постулатах.

Первый постулат. Математическое образование – многогранная интеллектуальная деятельность, в которой важны не только логика, не только строгая дедукция, но ещё и пространственное мышление, работа интуиции, формулировка гипотез и многое другое.

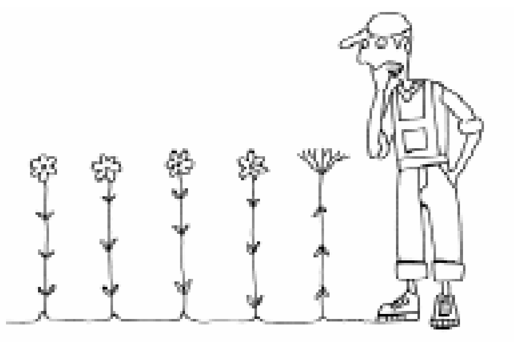
Второй постулат. Математика – наука экспериментальная.

Третий постулат. Компьютер играет ту же роль в математическом образовании, какую играет прибор для занятий физикой.

Четвёртый постулат. Компьютер многократно увеличивает возможности и роль математического эксперимента.

Пятый постулат. Есть два равноправных уровня использования компьютерных технологий в школьном математическом образовании: уровень пользователя и уровень теоретика (названия условные).

Шестой постулат. Результат, полученный с помощью компьютерной технологии,



Элементом проверки является поиск контрпримеров…

можно в определённых случаях (в частности, в зависимости от принятого уровня) считать доказанным.

Седьмой постулат. Возможности, которые появляются в школьном математическом образовании при использовании компьютера, оправдывают необходимые временные затраты.

Восьмой постулат. Использование компьютера сближает теоретическую и прикладную математику (если угодно – теоретическую и прикладную части науки).

МЕТОДОЛОГИЯ И/ИЛИ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Одна из проблем использования компьютера в математическом образовании школьников – включение этой технологии в дидактическую систему работы учителя. По нашему мнению, использование компьютера не должно быть неким довеском к традиционному курсу математики, его желательно вписать в методическую составляющую системы работы учителя. Если говорить о дидактике математики, то естественно встаёт вопрос о соединении в единое целое новых и старых методов при обучении решению задач. Мы предлагаем такое решение этой проблемы.

В книге [1] мы предлагаем в каждой задачной ситуации следующий примерный порядок (сценарий) действий.

1. Наличие сюжетной, внематематической части.
2. Создание геометрической модели сюжетной части задачи.
3. Наводящие соображения для поиска решения или появления гипотезы о возможном результате.
4. Формулировка гипотезы.
5. Компьютерный эксперимент.
6. Корректировка гипотезы по итогам эксперимента.
7. Неформальное подтверждение справедливости гипотезы.
8. Доказательство истинности гипотезы.
9. Поиск альтернативного решения.
10. Расширение задачи (обобщение, частные случаи).

Остановимся на этом списке подробнее.

1. Коль скоро мы включаем ученика в исследовательскую деятельность, предлагаемая ему задача не может быть взята «с потолка». Либо она отражает какую-то прикладную проблему, либо она является развитием уже имеющихся результатов. Для создания прикладного оттенка задачи мы предлагаем в начальной её формулировке нечто вроде «сказочки».

2. Геометрическая задача появляется в результате анализа «прикладной» ситуации. Создание геометрической формулировки имеет смысл вначале предоставить ученикам. Самостоятельно найденная учеником формулировка собственно геометрической задачи способствует более полному её пониманию.

3. Прежде чем перейти к работе с компьютером, чрезвычайно полезны предположения относительно ответа. Ученикам предлагается (по возможности) мысленно представить ситуацию и предугадать возможный результат. Эти предположения могут возникнуть в результате правдоподобных рассуждений (у нас – наводящих соображений), как это советует делать Д. Пойа. Таковыми наводящими соображениями являются аналогия, разбор частных случаев, проверка обратного утверждения и т. д.

В некоторых случаях к наводящим соображениям мы относим рекомендации по решению задачи.

Результатом использования наводящих соображений может оказаться появление гипотезы относительно ответа на поставленный вопрос.

4. Компьютерный эксперимент либо опровергает возникшую гипотезу, либо корректирует её, либо подтверждает.

Если гипотеза уже возникла после наводящих соображений, то компьютер выступает как средство её проверки.

Если же гипотеза не появилась, то компьютер выступает как средство её генерирования.

Использование компьютера в геометрии особенно эффективно для:

а) поиска и конструирования объекта, удовлетворяющего условию, б) наблюдения за изменяющимися геометрическими объектами и за величинами, с ними связанными.

5. Если мы доверяем интуиции, использованию наводящих соображений и подтверждающей работе компьютера, то можем считать, что гипотеза доказана.

Предположим, однако, что и после компьютерного эксперимента остаются сомнения в справедливости гипотезы. Например, свойство, которое мы хотим обнаружить, отсутствует – непонятно, доказали ли мы его отсутствие перебором частных случаев. Другой пример – вычислительный эксперимент, когда неясность возникает из-за наличия погрешностей.

Тогда переходим к поиску рациональных рассуждений, подтверждающих гипотезу. Рациональное рассуждение использует наглядность, симметрии, непрерывность, постоянство, движения, а также соображения, взятые из механики.

Непрерывность используется в двух ситуациях:

а) если некоторое свойство фигуры выполняется в какой-то точке, то оно выполняется в малой окрестности этой точки (так называемый метод «малых шевелений»);

б) если при движении точки по некоторой непрерывной траектории некая величина, связанная с данной фигурой, может быть меньше определённого значения и больше его, то существует такое положение переменной точки, когда искомая величина равна этому значению.

Гипотеза о постоянстве определённой величины, связанной с данной фигурой, возникает тогда, когда эта величина принимает одинаковые значения в трёх разных положениях данной фигуры. В основе этой гипотезы лежит предположение о том, что исследуемая величина задаётся линейной или квадратичной функцией, что чаще всего встречается в геометрии.

А если и этого недостаточно, наши сомнения не исчезли, то воспользуемся традиционным геометрическим доказательством.

6. Поиск альтернативного решения желателен. В некоторых случаях, когда оно существенно отличается методом от начального решения, мы приводим таковое.

7. В исследовательской деятельности решённая задача порождает новые вопросы, поэтому мы предлагаем «расширение» исходной задачи. Эту часть исследования мы относим к проектной деятельности. В проекте ученику предлагается пройти все перечисленные выше этапы, за исключением формулировки собственно геометрической задачи – мы даём эту формулировку как отправную точку проекта. Ученику предлагается сочинить исходный сюжет, предложить наводящие соображения, сформулировать гипотезу, продумать компьютерный эксперимент, подтвердить полученные результаты рациональными рассуждениями и дедуктивным доказательством, искать альтернативные решения. Затем предложить дальнейшие расширения.

В книге [1] мы в большинстве сюжетов предлагаем по два расширения к каждой задаче. Первое расширение показывает, что исследование не заканчивается с получением ответа на поставленный вопрос – можно поставить новый вопрос. Второе расширение (которое в большинстве задач сложнее первого расширения) показывает, что и с первым расширением исследовательская деятельность не заканчивается, а продолжается.

Для исследовательской деятельности в книге [1] используется среда «Живая математика», в которой можно работать с геометрическими фигурами.

Например, в этой среде можно имитировать построения циркулем и линейкой, делать геометрические преобразования, проводить вычисления. Последовательность построений (алгоритм) можно зафиксировать в памяти компьютера для дальнейшего использования. Например, надо вписать окружность в треугольник. Соответствующие элементарные построения (биссектрисы, перпендикуляр из точки их пересечения на сторону треугольника) можно собрать в одну операцию: построение вписанной в треугольник окружности (подробная последовательность действий будет указана в конце книги).

Компьютер может навести на способ решения. Для этого можно проследить за динамическим рисунком. Этот рисунок возникает тогда, когда при перемещении «мышкой» некоторых объектов на нём (как правило, точки) первоначально созданный рисунок частично меняется, но что-то и сохраняется. Требуется проследить за тем, что меняется, и обнаружить инварианты или закономерность. Например, закономерность может быть обнаружена в характере изменения геометрической величины (длины, угла, площади), в нахождении её экстремальных значений, инварианты обнаруживаются в определённом расположении фигур (коллинеарность в расположении точек, наличие неизменных точек, параллельность, перпендикулярность) или в сохранении значений величины. Тем самым, компьютер помогает провести исследование.

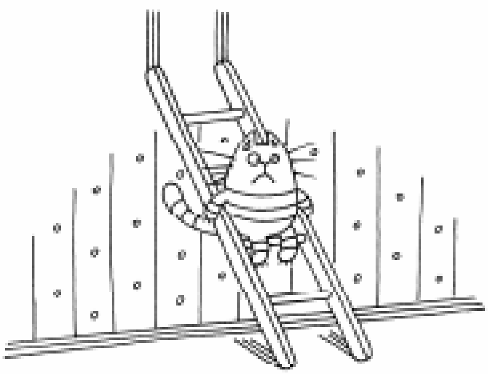
Кроме задач с решениями, мы показываем общие методы решения геометрических задач и без компьютера.

РЕАЛИЗАЦИЯ (ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ)

Приведём примеры решения задач в среде «Живая математика».

Пример 1. Котёнок на лестнице

Лестница вертикально стоит возле стены. На середину лестницы забрался котёнок, и вдруг нижняя точка лестницы начала скользить по полу, а верхняя точка – по стене. Найдите траекторию котёнка, если он всё это время будет сидеть на той же ступеньке.



Геометрическая формулировка

Дан прямой угол. Найдите множество точек, являющихся серединами отрезка данной длины, концы которого лежат на различных сторонах этого прямого угла (рис. 1).

Необходимые знания

1. Теорема Пифагора.

2. Расстояние между двумя точками в системе координат.

Наводящие соображения

Если взять отрезок длины 2, то в двух крайних положениях, когда он лежит на сторонах угла, расстояние от его середины до вершины угла равно 1. Такое же расстояние мы получим, когда концы отрезка равноудалены от вершины угла (рис. 2).

Возникает предположение, что при любом положении этого отрезка расстояние до вершины угла будет одним и тем же, то есть траекторией будет дуга окружности. Для доказательства можно ввести систему координат, оси которой совпадают со сторонами угла.

Компьютерный эксперимент

Постройте прямой угол, затем произвольный отрезок XY. Постройте отрезок CD с концами на сторонах угла, длина которого равна выбранному отрезку XY. В динамическом рисунке, перемещая один из концов отрезка CD, проследите за траекторией точки M – середины отрезка CD. Кроме того, измеряйте расстояние OM (рис. 3).

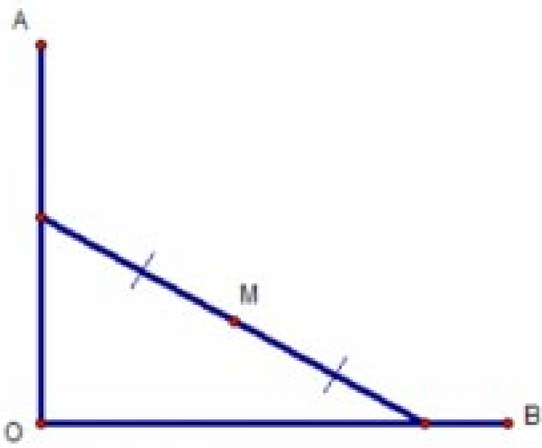


Рис. 1

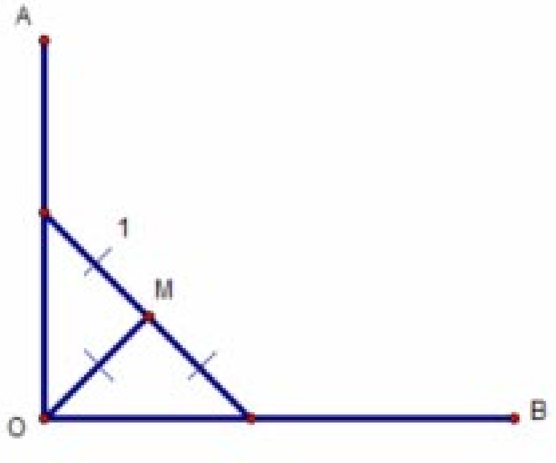


Рис. 2

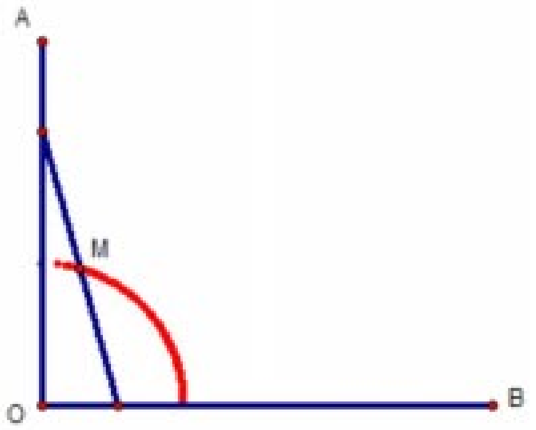


Рис. 3

Рациональное рассуждение

Если рассмотреть прямоугольник, две стороны которого находятся на сторонах данного прямого угла, а диагональю является переменный отрезок постоянной длины, то его середина является также серединой другой его диагонали, то есть она удалена от вершины угла O на одно и то же расстояние (рис. 4).

Решение

Способ I

Докажем, что OM – константа. На рис. 5 точка M имеет координаты (x, y), точка A имеет координаты $(0, 2y)$, точка B имеет координаты $(2x, 0)$. По формуле для расстояния между двумя точками имеем:

$$OM^2 = x^2 + y^2. \qquad (1)$$

Далее, из треугольника AOB по теореме Пифагора имеем: $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Отсюда,

$$AB^2 = (2y)^2 + (2x)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB^2 = 4(2y^2 + x^2). \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$OM^2 = \frac{1}{4}AB^2.$$

А так как AB постоянно, то OM – константа.

Способ II

Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы. Согласно условию, гипотенуза постоянна. Следовательно, и медиана является постоянной. Это означает, что перемен-

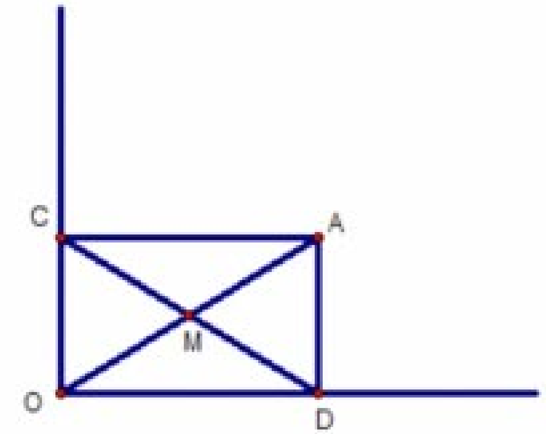


Рис. 4

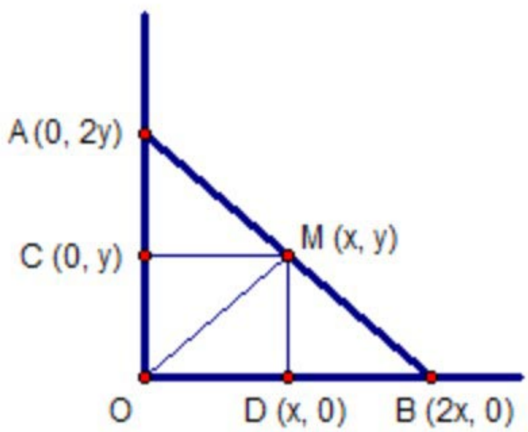


Рис. 5

ная точка M удалена от точки O на одно и то же расстояние (рис. 3). Поэтому искомое множество точек – это четверть окружности с центром в точке O и радиусом, равным $AB/2$.

Расширение 1.

Какая траектория получится, если первоначальная точка не будет серединой отрезка?

Расширение 2.

Найдите геометрическое место вершин равносторонних треугольников ABC, при том что его сторона AB скользит его концами по сторонам прямого угла. При этом вершина C и вершина данного прямого угла расположены по разные стороны от прямой AB.

Пример 2. Археологическая находка

Во время раскопок археологи обнаружили остатки фундамента древнего строения. В результате дальнейшего исследования удалось найти жертвенник и два фрагмента на границе фундамента. Археологи предположили, что строение имело форму квадрата, два обнаруженных фрагмента находились на противоположных сторонах квадрата, а жертвенник находился в его центре. Они хотят уточнить расположение здания на местности, чтобы определить границу раскопок.

Геометрическая формулировка

Требуется построить квадрат, если известны его центр и две точки на противоположных сторонах.

Необходимые знания

1. Квадрат.
2. Центральная симметрия.

Наводящие соображения

Если есть центр квадрата и одна точка в середине какой-либо его стороны, то задача решается, так как известна половина стороны квадрата. Чуть сложнее решение, когда есть центр квадрата и точка в его вершине, тогда известна половина диагонали квадрата.

Если есть центр квадрата и две точки на одной из его сторон, то квадрат можно построить, так как можно построить перпендикуляр из центра квадрата на эту сторону, а он равняется половине стороны квадрата.

Так как согласно условию одна точка на стороне квадрата есть, то (в общем случае) вторую точку на этой стороне можно получить, отразив симметрично относительно центра квадрата точку на противоположной его стороне.

Компьютерный эксперимент

Пусть точка O – центр квадрата, а точки K_1 и K_2 лежат на его противоположных сторонах. Постройте точку K'_1, симметричную точке K_1 относительно O (рис. 6). Проведите прямую K'_1K_2, содержащую сторону квадрата. Опустите перпендикуляр из точки O на эту прямую, затем от основания проведённого перпендикуляра отложите на

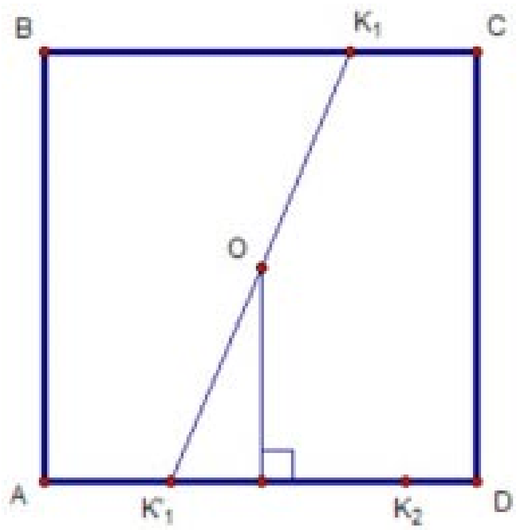


Рис. 6

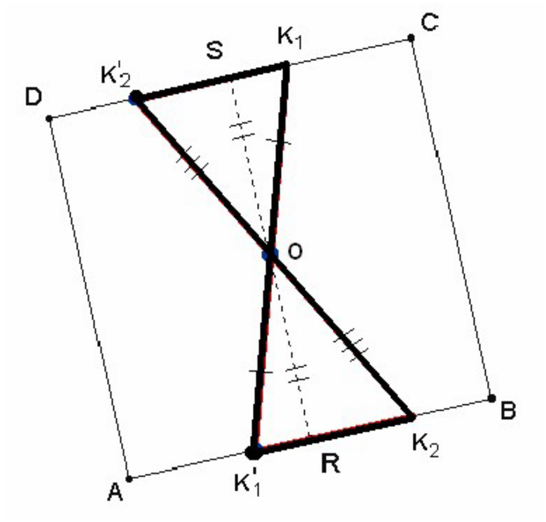


Рис. 7

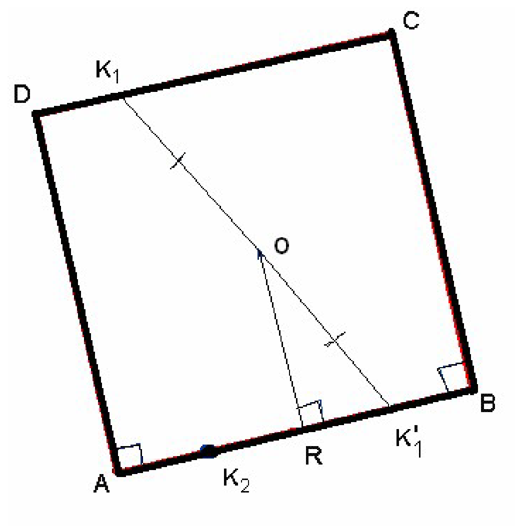


Рис. 8

прямой K'_1K_2 два отрезка, равных этому перпендикуляру. Получим две соседние вершины квадрата. С помощью поворота полученной стороны на 90° вокруг центра квадрата получим три оставшиеся стороны квадрата.

Поменяйте исходные данные. Всегда ли существует решение?

Решение

Пусть O – точка расположения жертвенника, обозначим K_1 и K_2 – точки на границе фундамента (рис. 7).

1. Построим точку K'_1, симметричную точке K_1 относительно точки O.

2. Построим прямую $K_2K'_1$.

3. Построим перпендикуляр OR на прямую $K_2K'_1$.

4. Отметим на прямой $K_2K'_1$ точки A и B такие, что $RA = RB = RO$.

5. Проведём перпендикуляры AD и BC к прямой AB, равные длине отрезка AB, с одной стороны от AB.

Докажем, что $ABCD$ – квадрат (рис 8).

То, что $ABCD$ – квадрат, следует из построения. Так как точки K_1 и K'_1 центрально симметричны относительно точки O, как и сам квадрат, то точка K_1 лежит на стороне CD.

Замечание

Решение единственно, если точки O, K_1 и K_2 не лежат на одной прямой. Если эти три точки лежат на одной прямой, можно построить бесконечно много квадратов, удовлетворяющих условиям задачи (рис. 9).

Расширение 1

Допустим, что точки находятся на смежных сторонах квадрата. Центр квадрата известен. Сможете ли вы восстановить квадрат?

Расширение 2

Можно ли построить квадрат по четырём точкам на сторонах?

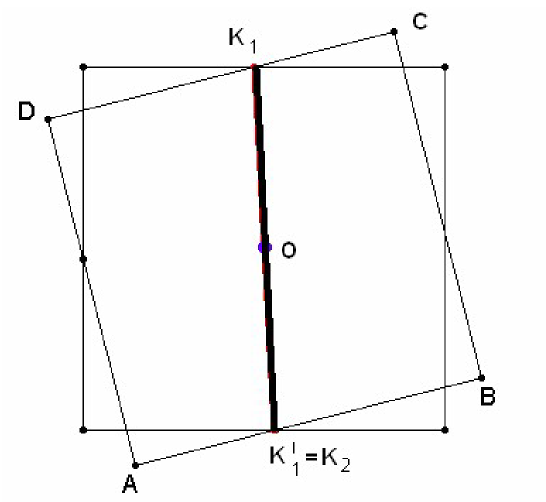


Рис. 9

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы убеждены в том, что в организации математической деятельности существенную роль могут играть компьютерные инструменты, то есть созданные программные продукты. Наш более чем десятилетний опыт использования компьютера в математическом образовании школьника – основа этого убеждения.

Литература

1. *Иванов С.Г., Рыжик В.И.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика». М.: «Просвещение», 2012.

2. *Рыжик В.И., Люблинская И.Е., совместно с Ron Armontrout, Lauire Boswell, Tim Corica.* Исследовательские сюжеты для среды «The Geometer's Sketchpad». СПб.: Изд-во ЦПО «Информатизация образования», 2003.

3. *Иванов С.Г.* Сочетание дискуссии с экспериментом на уроке математики // Компьютерные инструменты в школе, 2009. № 2. С. 66–72.

Иванов Сергей Георгиевич,
кандидат педагогических наук,
кафедра высшей математики-2
СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина),

Рыжик Валерий Идельевич,
кандидат педагогических наук,
Лицей «Физико-техническая школа» Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургского Академического университета – научно-образовательного центра нанотехнологий РАН.