Ягунова Екатерина Борисовна

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ: ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ НАВЫКИ

ВВЕДЕНИЕ. ИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ СПРАВОК[1]

Современные школьники совершенно не умеют решать текстовые задачи. На ЕГЭ 2010 года задача B12 – текстовая – была самой сложной из всех задач части B. Её правильно решили лишь 41.27 % школьников. В 2011 году ситуация, казалось бы, несколько улучшилась: текстовая задача B12 оказалась четвёртой по сложности, её решили около 60 % всех сдающих ЕГЭ. Однако улучшение было, скорее всего, случайным, связано с уровнем сложности задач конкретных вариантов. Подтверждением этому служит то, что на репетиционном ЕГЭ следующего 2012 года в Санкт-Петербурге текстовая задача B14 опять оказалась самой сложной – её решили всего 20 % учащихся базовых общеобразовательных школ и 30–40 % учащихся школ повышенного уровня.

В чём же проблема? Чем так сложны и неприятны текстовые задачи? И как помочь школьнику научиться их решать?

На вопрос «как решить текстовую задачу?» есть три «детских» ответа: «составить таблицу», «сделать чертёж» и «составить уравнение». Все эти три волшебных рецепта хорошо известны школьникам, но не приводят к желаемому результату. Дело в том, что грамотно ими воспользоваться сможет только тот, кто хорошо умеет решать текстовые задачи. Школьника, который может сам сделать информативный чертёж, грамотно организовать таблицу, правильно составить уравнение, не требуется учить решать задачу – он это уже умеет. Давайте подумаем, чем помочь тому, для кого «чертёж», «таблица» и «уравнение» – лишь загадочные заклинания или прихоть учительницы.

Начнём с самых простых (лучше всего алгоритмизируемых) задач – задач «про смеси и растворы». Содержание этих задач страшно далеко даже от взрослого человека. Попытайтесь вспомнить, когда Вам последний раз в Вашей обыденной жизни приходилось задумываться о концентрациях растворов? Если Вы не провизор в аптеке, не химик-экспериментатор, то едва ли Вы это делали хоть раз за последние годы. Разведение уксуса из уксусной эссенции давно ушло в прошлое вместе с временами спирта «Рояль». Наиболее привычный для нас раствор, изготавливаемый собственноручно и ежедневно, это растворимый кофе, крепость (то есть концентрация) которого зависит от соотношения кофе и воды. Пример этот весьма наглядный, но страшно неудобный для обучения. Разобравшись, чем плох этот пример, мы частично разберёмся и в том, откуда берутся трудности у школьников при решении задач «на смеси».

[1] Использованы данные «аналитического отчета предметной комиссии о результатах ЕГЭ по математике в Санкт-Петербурге в 2011 году» и данные из «Аналитической справки по результатам городской диагностической контрольной работы по математике для учащихся 11 классов образовательных учреждений Санкт-Петербурга (17.04.2012)».

КАК ПРАВИЛЬНО ВЫЧИСЛИТЬ КОНЦЕНТРАЦИЮ?

Итак, утренний кофе. Мы умеем определять его концентрацию на вкус, но едва ли сможем выразить её числом.

С этого и начнём – давайте потренируемся выражать концентрацию числом. Расположите по крепости: 1 ложка на чашку, 2 ложки на полчашки, половина ложки на полторы чашки, ложка на четверть чашки. В такой задаче здравый смысл спасает – появляется картинка: нарисованы рядышком чашки с нужным количеством воды и ложечки с кучками кофе (рис. 1, строка А).

Теперь возникает идея приведения к «одной чашке» или к «одной ложке». Устанавливаем, что наши концентрации такие: 1 ложка на чашку, 1 ложка на четверть чашки, 1 ложка на 3 чашки и 1 ложка на четверть чашки (рис. 1, строка Б). Или такие: 1 ложка на чашку, 4 ложки на чашку, 1/3 ложки на чашку, 4 ложки на чашку (рис. 1, строка В). Третий кофе самый слабенький, потом – первый, второй и четвёртый самые крепкие (одинаковые по крепости). Какой способ был лучше? Приведение «к ложке» или «к чашке»? В быту это определяется ситуацией. Если мы хотим побыстрее проснуться утром, то нас интересует количество кофеина, приводить концентрации нужно «к ложке». Если хочется пить, то приводить надо «к чашке», отслеживая количество воды. Это первое неудобство бытовых задач про смеси. В разных ситуациях мы приводим концентрации к разным единицам. В одном сборнике домашних рецептов мы увидим «… на десять килограмм огурцов потребуется... соли», в другом «… к килограмму соли добавьте… воды». В быту нас интересуют **соотношения** между компонентами смеси или раствора, то есть количества разных веществ на **единицу какого-либо одного вещества**. В текстовых задачах ситуация совершенно иная: нас интересуют количества веществ **на единицу раствора (смеси)**. Именно это выражение называется концентрацией. Оказалось, что оба способа определения концентрации, естественные для потребителя кофе, совершенно не годны для решения текстовых задач.

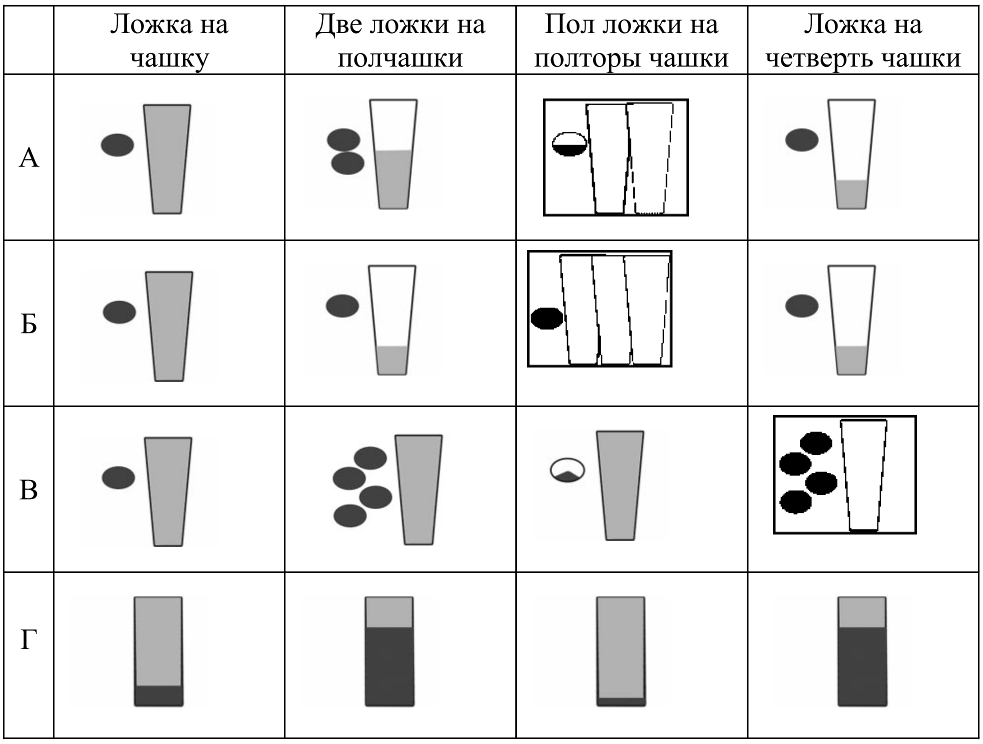
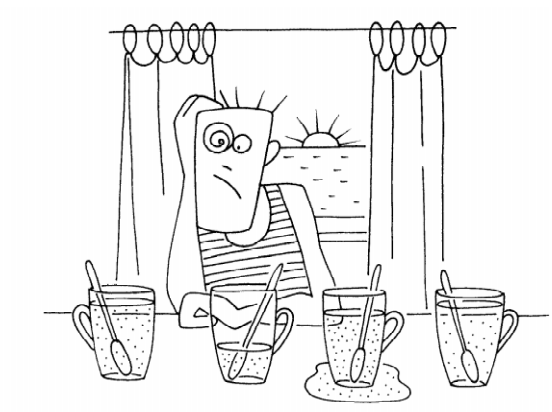


Рис. 1. Вычисляем концентрацию кофе: А – прямо по условию, Б – приведение «к одной ложке», В – приведение «к одной чашке», Г – приведение к «полосатому матрасу»

ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИЕ ТРУДНОСТИ

Давайте попробуем определить концентрации кофе в наших четырёх чашках «правильно» – как положено в текстовой задаче. Для этого надо высыпать кофе в чашки и вычислить количество кофе и количество воды в чашке …. кофе. Вот второй источник трудностей для школьника: в обыденной жизни словом «кофе» называется и порошок на ложке, и приготовленный из него напиток. В текстовой задаче первое будет называться «чистый кофе» или «собственно кофе», а второе – «раствор кофе в воде». Мы опять сталкиваемся с тем, что обыденный жизненный опыт скорее мешает, чем помогает нам разобраться в устройстве текстовой задачи.

Итак, договорившись, что употреблять термины надо очень аккуратно, продолжаем вычисление концентрации. Напоминаю, мы должны найти количества «чистого кофе» и воды в растворе «кофе с водой». Сделать это нам не удастся, поскольку, как только мы высыпаем 1 ложку «чистого кофе» в 1 чашку воды, на столе образуется лужа – объём раствора «кофе с водой» больше объёма чашки (см. рис 1В – в эту чашку уже ничего нельзя высыпать). Это ещё одна терминологическая проблема. Когда мы в жизни употребляем выражение «ложка кофе на чашку воды», мы, на самом деле, имеем в виду «ложка кофе на почти полную чашку воды». Чашка воды мыслится полной настолько, что после добавления ложки кофе



Наиболее привычный для нас раствор, изготавливаемый собственноручно и ежедневно, это растворимый кофе...

она станет полной в точности. Преодолев ещё и этот семантический барьер, мы с удивлением осознаём, что концентрация кофе (методом приведения «к чашке») была вычислена абсолютно правильно. Наши напитки действительно имеют концентрации 1 ложка на чашку, 4 ложки на чашку, 1/3 ложки на чашку, 4 ложки на чашку – на чашку «раствора кофе с водой». Мы искали не то соотношение и при этом неправильно понимали, что означают слова «чашка воды». Тем не менее, мы получили правильный ответ, как говорится, сделав «чётное количество ошибок».

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Итак, концентрации найдены, но они страшно неудобные – какие-то ложки, чашки... Давайте перейдём к каким-то стандартным единицам. Есть два очевидных варианта – литры и килограммы. Для воды более естественны литры, для порошка «чистого кофе» – килограммы (граммы). В быту мы можем так и работать: концентрация кофе 5 грамм на 100 мл раствора, то есть 50 г на 1 литр. В текстовых задачах так не принято – нужно всё перевести в одинаковые единицы. Только тогда можно будет указывать концентрацию в процентах. Нужно или взвесить литр раствора «кофе с водой», либо определить объём 50 граммов порошка кофе. Первое реально, но требуются весы, второе – вообще не понятно, как сделать. Итак, выразить на практике концентрацию нашего утреннего кофе в процентах (то есть так, как положено в текстовых задачах) мы так и не сумели. Так что оставим этот неудачный кофейный пример и обратимся к задачам для подготовки к ЕГЭ. В них речь идёт о «растворе некоторого вещества», «сплаве, содержащем никель», иногда уточняется «… в водном растворе некоторого вещества». Количества веществ, их сплавов и растворов даны в килограммах или в литрах. Тут нас подстерегает очередная неприятность. Каждый, кто хоть немного изучал химию (в школе или в жизни), знает, что при смешивании 1 литра воды и 1 литра спирта получается не 2 литра раствора, а несколько меньше. Закона сохранения объёмов (не путать с законом сохранения массы!) не существует, а потому некоторые задачи из ЕГЭ можно «решить» только полностью игнорируя жизненный опыт и законы химии.

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ИТОГИ

Итак, прежде чем переходить собственно к решению задач, перечислим ряд принципов, которым необходимо следовать.

1. Обыденный опыт и лишние знания при решении текстовой задачи «на смеси» лучше не привлекать.

2. Нужно тщательно различать «первое чистое вещество», «второе чистое вещество»… и сам «раствор» («смесь»). В случае необходимости следует подчёркивать, о чём идёт речь, используя, скажем, присказку «собственно»: «собственно кофе» в составе «раствора кофе с водой», «собственно грибы» в составе «грибов с водой»…

3. Нужно количества всех веществ выразить в одинаковых единицах, всё равно в каких.

4. Концентрация – доля чистого вещества от всего раствора. Вычисляем концентрацию, используя те единицы, к которым перешли в п. 3.

Осталось каким-то образом визуализировать задачу, получить возможность оценить концентрацию «на глаз». Нужно сделать последний шаг **от** бытового опыта и совсем забыть о том, что вещества растворяются или смешиваются. Пусть наш «чистый кофе» так и лежит тонким слоем на дне чашки с «раствором кофе с водой» (рис. 1, строка Г). Теперь мы легко можем сравнивать концентрации по картинке. Получившийся на рис. 1 (строка Г) «полосатый матрас» – самое главное. Любая задача про смеси и растворы – всегда задача про «полосатый матрас». Число полосок – количество компонентов в смеси. К каждой полосе «матраса» прилагаются два числа – абсолютное (штуки, кг, л, …) и относительное (доли или проценты). Ещё одно важное число (абсолютное) – количество всего раствора. Итого к двухкомпонентному раствору (смеси) на картинке должно быть приложено 5 чисел. Если мы научимся по условию текстовой задачи такой «матрас» правильно рисовать, то и решать задачи мы тоже научимся. Давайте потренируемся.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ НАВЫКИ РАБОТЫ СО СМЕСЯМИ. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ. ТРЕНИРУЕМ ГЛАЗОМЕР

Итак, чтобы осмысленно решать задачи «на смеси», нужно чтобы учащийся умел:

– рисовать «полосатые матрасы» по условию задачи;

– вычислять концентрации веществ в смесях (растворах) по данному «полосатому матрасу»;

– оценивать «на глаз» концентрацию вещества по данному «полосатому матрасу»;

– рисовать «на глаз» «полосатый матрас» по заданным концентрациям.

Чтобы этого добиться, воспользуемся возможностями современных компьютерных средств обучения.

Интерактивный чертёж 1 (рис. 2) представляет собой универсальный двуцветный «полосатый матрас», то есть двухкомпонентную смесь. Количества каждого «чистого» вещества в составе смеси указано в условных единицах (это могут быть литры, килограммы, штуки – то, о чём идёт речь в условии). Каждое из количеств можно задать, просто напечатав его значение в соответствующем поле. Можно изменять общее коли-

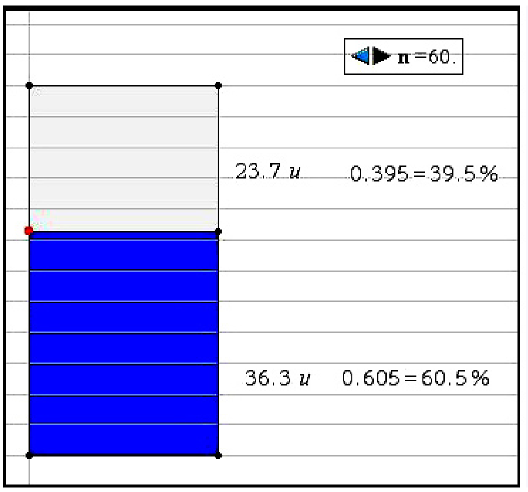


Рис. 2. Двухкомпонентная смесь

чество смеси (при помощи слайдера) или соотношение компонентов (передвигая мышкой красную точку). Обратим внимание на то, что из трёх величин (количество первого вещества, количество второго вещества, общее количество смеси) задать произвольно можно только две. Значение третьей величины однозначно определяется по значениям двух других. Рядом для нашего «матраса» указаны доли каждого вещества (десятичной дробью и в процентах). Доли вычисляются автоматически. Задать долю численно нельзя, изменить её можно только изменяя соотношения полос в «матрасе».

Предлагается проделать со школьником четыре упражнения.

1. Читаем условие задачи, находим в нём описание «матраса», рисуем соответствующий «матрас» (или несколько «матрасов»). Важно, чтобы данные в условии числа попали в нужные места картинки. Решать задачу на этом этапе не требуется. Например, в задаче «смешали 5 литров 20%-го и 10 литров 30%-го раствора…» описаны два «матраса». В каждом из них задано общее количество вещества. Школьник может попытаться экспериментально подобрать соотношение веществ, которое даст требуемую концентрацию. Стандартные задачи про

Любая задача про смеси и растворы — всегда задача про «полосатый матрас».

сушку грибов и выплавку стали из руды тоже позволяют нарисовать соответствующие «матрасы». В первом случае полоски будут соответствовать «собственно грибам» и «воде», во втором случае – «собственно стали» и «примесям». Вот задача, которая, на первый взгляд, не имеет отношения к смесям и растворам: «В лесу 1% берёз, остальное – ёлки. К новому году браконьеры вырубили несколько ёлок, после чего берёзы стали составлять 2% всего леса. Какую часть леса вырубили?» Но и по этой задаче легко рисуется два матраса (предновогодний и постновогодний), полоски которых соответствуют ёлкам и берёзам.

Чего мы хотим добиться этим рисованием? Умения выделить в тексте задачи «смесь» и её «компоненты». Умения правильно установить соответствия чисел в тексте условия и объектов на картинке. Привычки к тому, что получающиеся картинки весьма однообразны.

На этом шаге не стоит торопиться – именно тут формируются правильные привычки, на которые мы будем опираться, решая задачи.

2. Школьник получает уже готовый «матрас»[1], то есть указаны количества веществ и всей смеси[2]. Нужно вычислить концентрацию каждого вещества (в долях и/или в процентах). Естественно, на это время нужно скрыть ответы на интерактивном чертеже (возможности программы это позволяют). На этом этапе мы тренируем наш базовый алгоритм – «найти, какую долю/сколько процентов одно число составляет от другого». Дополнительно привыкаем к тому, как «на глаз» выглядят 50%, 25%, 30%, …

3. Школьник опять получает готовый «матрас», но указано на нём только общее количество раствора (смеси) и концентрации веществ (в долях процентах). Решаем задачу, обратную к предыдущей: находим по концентрациям абсолютные количества составляющих раствор веществ. Для этого вспоминаем следующий базовый алгоритм – «найти процент (долю) от числа?». Чуть-чуть

[1] Упражнение годится для работы в парах – пусть школьники рисуют «матрасы» друг другу и проверяют друг у друга ответы.

[2] Точнее, две из этих трех величин. Третья тогда легко находится.

усложняем эту же задачу: оставляем только общее количество вещества и концентрацию одного из веществ. Концентрацию второго школьник должен будет установить самостоятельно (вычитанием из 100 % или из единицы).

4. Школьник получает «матрас», в котором приведена информация лишь про одну полоску – количество и доля одного из веществ. Нужно найти остальные числа (количество и долю второго вещества, количество всего раствора). При этом повторяется базовый алгоритм «найти число по его проценту».

Чего мы хотим достичь этими упражнениями?

1. Формирования стереотипа «смесь/раствор → “матрас” → пять чисел». Часть из этих чисел известна, остальные будем искать.

2. Уверенности в том, что по двум числам из этих пяти мы можем найти остальные три (единственный плохой случай – известны доли каждого вещества, но нет никаких вообще абсолютных чисел).

3. Умения найти оставшиеся три числа.

ОБЩИЙ АЛГОРИТМ И ЧАСТНЫЕ ПРИЁМЫ

Благодаря возможности незамедлительно проверить правильность полученного ответа, школьники могут сами контролировать корректность применения стандартных алгоритмов или изобретать собственные способы вычислений. Последнее особенно ценно, поскольку развивает тот самый «здравый смысл», наличия которого должно хватать для решения подобных задач. Гораздо лучше, если школьник будет находить 50 % делением числа на 2, а 25 % – делением на 4, а не по стандартному алгоритму «разделить на 100 и умножить на 50». Часто «круглые» проценты школьники ищут не «через 1 %», а «через 10 %» (то есть находят сперва десятую часть, а потом умножают её на нужное число), чем, несомненно, упрощают вычисления по сравнению со стандартным алгоритмом. Так же можно найти 5 % – делением на два десяти процентов, 15 % – прибавлением к 10 % их половины, и т. д. Способы, предлагаемые (и применяемые!) школьниками зачастую весьма экзотические. Они практически всегда не универсальны, но часто корректны в подходящих частных случаях. Если разнообразие предложенных упражнений достаточно велико, то удастся выяснить «границы применимости» всех этих способов, сравнить их между собой, дополнить при необходимости стандартными методами.

КОГДА «МАТРАСОВ» БОЛЬШЕ ОДНОГО

Если манипуляции с одним «матрасом» освоены, то задачи, связанные с несколькими «матрасами», редко вызывают существенные трудности. Не будем подробно обсуждать «двухматрасные» задачи про сушку грибов или выплавление стали из руды, в которых фигурируют «исходный матрас» и «получившийся матрас». Обратимся сразу к «трехматрасным задачам» из серии «смешали два раствора…». В этих задачах предполагается составлять уравнение «по каждому из веществ»[1], то есть по полоскам каждого цвета. Интерактивный чертёж 2 (рис. 3) представляет собой «подсказку» к

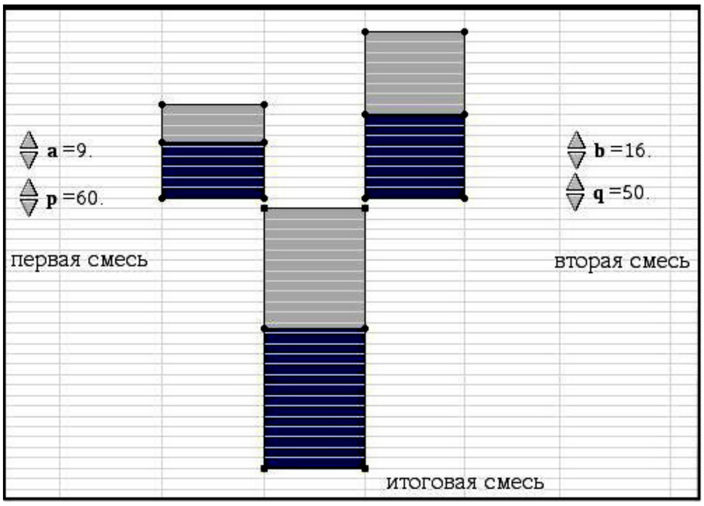


Рис. 3. Смешали два раствора...

[1] Либо по одному из веществ и по всему раствору (см. сноску 2 на с. 10).

такой задаче. С его помощью можно просто узнать правильный ответ в такой задаче. Но важнее, что можно попытаться «почувствовать», как зависит ответ от исходных данных. Было бы очень здорово, если бы в результате взаимодействия с этим интерактивным чертежом у школьника возникли полезные «привычки»: концентрация смеси – всегда промежуточная относительно исходных концентраций; концентрация смеси «ближе» к тому из исходных растворов, которого больше. Эти правильные привычки помогут в дальнейшем избежать заведомо неверных ответов, возникающих из-за арифметических ошибок в вычислительной части работы. Вероятно, на первом этапе знакомства с подобными задачами было бы полезно решать задачи без расчётов, на качественном уровне. То есть научиться исключать заведомо невозможные варианты ответов. Зададим, например, такой вопрос: «смешали 5 %-й и 22 %-й растворы. Какие из концентраций заведомо нельзя получить: 4 %, 5 %, 6 %, 20 %, 50 %?» Или такой: «смешали 5 %-й раствор с 20 кг 22 %-го раствора. Полученный раствор имеет концентрацию больше 15 %. Могло ли 5 %-го раствора быть 0.1 кг? 20кг? 30 кг?» Возможность использования интерактивного чертежа при ответе на вопросы оговаривается «правилами игры». На этапах обучения или при работе над ошибками это, несомненно, полезно. Во время самостоятельных работ – по ситуации[1]. Следующий этап в освоении таких задач – попытка «прикинуть на глаз», какой ответ должен получиться. Такой навык тоже тренируется при помощи интерактивного чертежа. Если всё вышеизложенное удалось проделать, то составление уравнений и проведение необходимых вычислений «под контролем здравого смысла» будет освоено достаточно легко.

РЕЗЮМЕ

При решении любой текстовой задачи ученик должен проделать три этапа работы: (1) анализ условия и планирование вычислений, (2) проведение вычислений и (3) проверку правильности решения. Чаще всего школьники пропускают первый этап – сразу начинают что-то считать. Расчёты часто ничем не кончаются (поскольку цель расчётов не определена) или приводят к абсурдному ответу (ибо третий этап отсутствует). Время оказывается потраченным, а задача – нерешённой. Именно поэтому мы и акцентировали внимание на первом и третьем этапах решения задачи. На первом этапе интерактивные чертежи помогали представить условия в наглядной графической форме, определить «роли» всех имеющихся в условии чисел, осознать, что именно нужно найти, прикинуть, какой ответ мы ожидаем. На заключительном этапе интерактивные чертежи помогут проверить правильность полученного ответа.

Отметим также, что после некоторой тренировки необходимость в интерактивном чертеже отпадёт, поскольку школьник научится представлять в уме подобную картинку и совершать необходимые ее преобразования. С этого момента, вместо интерактивного чертежа, будет использоваться наработанная интуиция. Если это произойдёт, то можно считать, что обучение решению текстовых задач «про смеси и растворы» прошло абсолютно успешно.

[1] Отметим, кстати, что TI-Nspire позволяет подобные вопросы организовать в качестве тестов, результаты которых будут обрабатываться автоматически.

Ягунова Екатерина Борисовна,
кандидат биологических наук,
доцент биолого-почвенного факультета СПбГУ;
преподаватель математики Академического университета (лицей ФТШ).