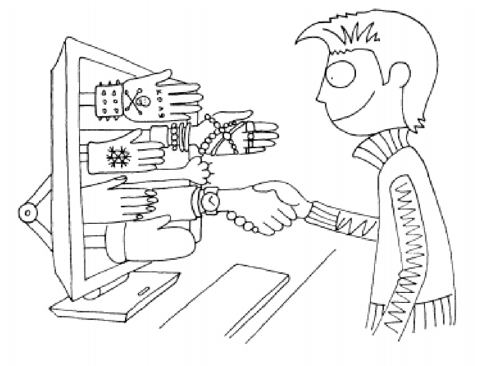
Люблинская Ирина Ефимовна

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ HTML5/JAVA SCRIPT ПРИ РЕШЕНИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ ПО КУРСУ АНАЛИЗА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Математика, как полагают многие, – наука экспериментальная. В экспериментальной математической деятельности существенна исследовательская составляющая. Неотъемлемой частью решения исследовательских математических задач в школьной математике всё больше и больше становится компьютерный эксперимент. Для проведения компьютерного эксперимента ученикам необходим доступ к специальным программным продуктам как в школе, так и дома. Однако не все семьи могут позволить затраты на установку программного обеспечения на домашние компьютеры. Альтернативой могут стать интерактивные HTML5/JavaScript апплеты, не требующие специального программного обеспечения.

В этой статье рассматриваются примеры использования HTML5/JavaScript апплетов, созданных в среде *Geometry Expressions*™ (http://geometryexpressions.com), для решения задач по курсу алгебры и начал анализа в средней школе. *Geometry Expressions* – это интерактивная программа символьной геометрии. В отличие от имеющихся программ динамической геометрии (*Живая Геометрия*, *Cabri*, *Geogebra*, и т. д.), построение объектов в этой программе основано на задании свойств геометрических и аналитических объектов. При заданных параметрах для геометрических и аналитических объектов программа может автоматически генерировать аналитические выражения, связанные с этими объектами. Встроенная в программу CAS позволяет производить преобразования полученных аналитических выражений.



...в интернете существует огромное количество интерактивных апплетов...

Даже при том, что в интернете существует огромное количество интерактивных апплетов, найти подходящий апплет для конкретной задачи чаще всего сложно, иногда даже невозможно. *Geometry Expressions* даёт учителю возможность создавать свои собственные апплеты для различных исследовательских задач.

В этой статье будет рассмотрено несколько исследовательских заданий на геометрические преобразования графиков функций. В них используется HTML5/JavaScript. Интерактивные апплеты для рассмотренных задач можно найти на приложенном компакт-диске.

ЗАДАНИЕ 1. ПАРАЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Цель задания:

Обобщить сведения о параллельном переносе (сдвиге) на плоскости, полученные учениками в разных математических дисциплинах.

Часть 1. Перенос вдоль оси ординат

В этой части задания ученики исследуют перенос графика функции вдоль оси ординат при помощи интерактивного апплета *Перенос1* (рис. 1).

Синяя кривая (1) изображает график функции $y = f(x)$. Красная кривая (2) получена переносом графика функции f на вектор $\overrightarrow{OB} = (0, b)$. График функции $y = g(x)$ изображён чёрным цветом и первоначально не виден, поскольку он совпадает с графиком функции f. В апплете можно двигать точку B по оси ординат и вводить выражения для функций f и g. Координаты вектора $\overrightarrow{OB}$ меняются динамически в зависимости от положения точки B.

Ученики начинают работу с графиком функции $y = \sqrt{x}$. Затем на основании наблюдений они формулируют гипотезу о том, что будет происходить с графиком функции f общего вида. Работая с компьютером, ученики приходят к выводу о том, что результатом переноса графика функции $y = f(x)$ на вектор $(0, b)$ является график функции $y = f(x) + b$.

В этой части задания предлагается следующая последовательность работы ученика с компьютером:

1. Двигая точку B по оси ординат, ученики исследуют положение кривой, полученной переносом графика $y = \sqrt{x}$ на вектор $\overrightarrow{OB}$ в зависимости от знака b. В результате исследования ученики приходят к такому выводу: **кривая, полученная переносом графика $y = \sqrt{x}$ на вектор $\overrightarrow{OB}$, выше графика $y = \sqrt{x}$, если $b > 0$, ниже графика $y = \sqrt{x}$, если $b < 0$ и совпадает с графиком $y = \sqrt{x}$, если $b = 0$.**

Ученикам предлагается подобрать функцию g так, чтобы её график совпал с кривой, полученной переносом графика функции f на вектор $\overrightarrow{OB}$ (кривая 2) для различных положений точки B на оси ординат. Меняя вектор $\overrightarrow{OB}$ и подбирая функцию g в каждом случае, ученики приходят к выводу: **при переносе графика $y = \sqrt{x}$ на вектор $\overrightarrow{OB} = (0, b)$ получается график функции $y = \sqrt{x} + b$.**

В заключение ученики обобщают полученный результат на произвольную функцию f. Для этого они меняют вид функций f и g и проверяют, что график функции $y = f(x) + b$ совпадает с графиком функции, полученным переносом графика $y = f(x)$ на вектор $\overrightarrow{OB} = (0, b)$.

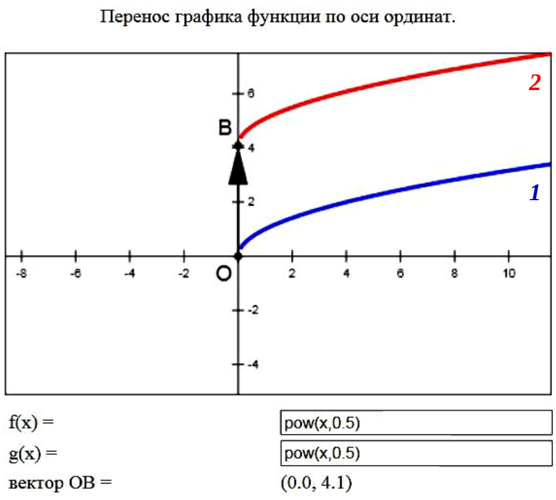


Рис. 1

Часть 2. Перенос вдоль оси абсцисс

В этой части задания ученики исследуют перенос графика функции вдоль оси абсцисс, при помощи интерактивного апплета *Перенос2* (рис. 2).

Синяя кривая (1) изображает график функции $y = f(x)$. Зелёная кривая (2) получена переносом графика функции f на вектор $\overrightarrow{OA} = (a, 0)$. График функции изображён чёр-

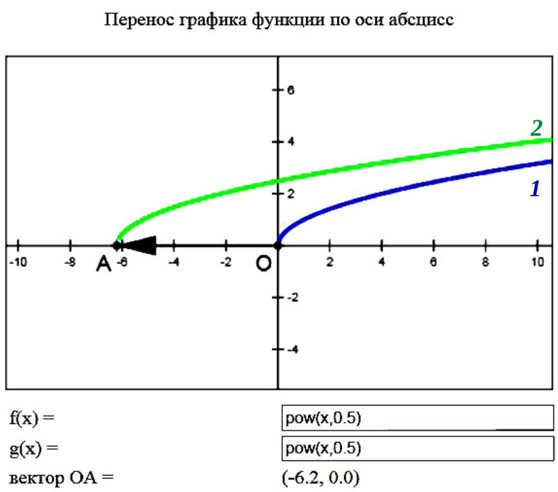


Рис. 2

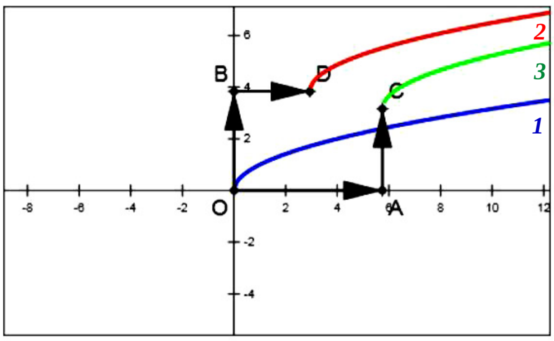
ным цветом и первоначально не виден, поскольку он совпадает с графиком функции *f*. В апплете можно двигать точку A по оси абсцисс и вводить выражения для функций f и g. Координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ меняются динамически в зависимости от положения точки A.

Как и в первой части задания, ученики начинают работу с графиком функции $y=\sqrt{x}$ и потом обобщают результат на произвольную функцию *f*. В результате компьютерного эксперимента ученики приходят к выводу, что график функции $y=f(x-a)$ всегда получается переносом графика функции $y=f(x)$ на вектор (a; 0). Последовательность работы ученика с компьютером в этой части задания аналогична предыдущей части:

1. Двигая точку A вдоль оси абсцисс, ученики анализируют положение кривой, полученной переносом графика $y=\sqrt{x}$ на вектор $\overrightarrow{OA}$ в зависимости от знака a. В результате исследования ученики приходят к выводу, что **кривая, полученная переносом графика $y=\sqrt{x}$ на вектор $\overrightarrow{OA}$ всегда правее графика $y=\sqrt{x}$ если $a>0$, левее графика $y=\sqrt{x}$ если $a<0$ и совпадает с графиком если $a=0$.**

2. Ученики подбирают функцию g так, чтобы её график совпал с зеленой кривой (2)

Коммутативность Переноса



вектор OB =	(0.0, 3.8)
вектор OA =	(5.8, 0.0)
вектор BD =	(2.9, 0.0)
вектор AC =	(0.0, 3.2)

Рис. 3

для различных положений точки A на оси абсцисс. Меняя вектор $\overrightarrow{OA}$, ученики меняют выражение для функции g и приходят к выводу, что при переносе графика $y=\sqrt{x}$ на вектор $\overrightarrow{OA}=(a,0)$ получается график $y=\sqrt{x-a}$.

3. В заключение ученики анализируют возможность обобщения полученного результата на произвольную функцию *f*. Для этого они могут изменить вид функции f и проверить, что график $y=f(x-a)$ совпадает с графиком функции, полученным переносом графика $y=f(x)$ на вектор $\overrightarrow{OA}=(a,0)$.

Часть 3. Коммутативность переноса

В этой части задания ученики проверяют на коммутативность вертикальный и горизонтальный переносы (на векторы (0; b) и (a; 0)) при помощи интерактивного апплета *Перенос3* (рис. 3).

Синяя кривая (1) изображает график $y=f(x)$. Красная кривая (2) получена переносом графика функции f на векторы $\overrightarrow{OB}=(0,b)$ и $\overrightarrow{BD}=(d,0)$. Зелёная кривая (3) получена переносом графика $y=f(x)$ на векторы $\overrightarrow{OA}=(a,0)$ и $\overrightarrow{AC}=(0,c)$. Точки B и C можно двигать по вертикали, а точки A и D – по горизонтали.

Как и прежде, ученики начинают работу с графиком функции $y=\sqrt{x}$, а потом обобщают результат на произвольную функцию *f*. В этой части задания предлагается следующая последовательность работы:

1. Ученики сначала выдвигают гипотезу о взаимном расположении графиков функций, полученных двумя методами: 1) переносом графика $y=f(x)$ на вектор $\overrightarrow{OA}$ и последующим переносом полученного графика на вектор $\overrightarrow{OB}$, или 2) переносом графика $y=f(x)$ на вектор $\overrightarrow{OB}$ и последующим переносом полученного графика на вектор $\overrightarrow{OA}$. В результате компьютерного эксперимента ученики либо подтверждают свою первоначальную гипотезу, либо от неё отказываются.

2. На основе своих наблюдений и результатов исследования, проведённых в первой и второй частях задания, ученики находят уравнение кривой, полученной одним из двух способов. В качестве иллюстрации, ученики могут привести следующую запись

$$y = f(x) \xrightarrow{(0,b)} y = f(x)+b \xrightarrow{(a,0)}$$
$$\xrightarrow{(a,0)} y = f(x-a)+b\text{, или}$$
$$y = f(x) \xrightarrow{(a,0)} y = f(x-a) \xrightarrow{(0,b)}$$
$$\xrightarrow{(0,b)} y = f(x-a)+b.$$

Своё решение они могут проверить, введя функцию $g(x)=\sqrt{x-a}+b$ в апплет и убедиться в совпадении соответствующих кривых.

3. На следующем этапе исследования ученикам предлагается найти возможность получения графика $y=\sqrt{x-a}+b$ из графика $y=\sqrt{x}$ одним движением. Ученики выдвигают гипотезу о переносе графика $y=\sqrt{x}$ на вектор $(a,b)=(0,b)+(a,0)$. Для проверки гипотезы ученики могут воспользоваться апплетом *Перенос4* (рис. 4).

Синяя кривая (1) изображает график функции $y = f(x)$. Фиолетовая кривая (2) получена переносом графика функции f на вектор $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. График функции g изображён чёрным цветом. В апплете можно двигать точки A, B и C и вводить выражения для функций f и g.

4. В заключение ученики анализируют возможность обобщения полученного результата на произвольную функцию f. Для этого они могут изменить вид функции f и проверить, что график $y = f(x-a)+b$ совпадает с графиком функции, полученным переносом графика $y = f(x)$ на вектор $(a;\, b)$.

Часть 4. Дополнительные задачи

В задачах 1–3 (рис. 5) даны две функции. Следующие вопросы и задания поставлены перед учениками в каждом случае:

a. Можно ли получить переносом график $y=g(x)$ из графика $y = f(x)$?

Возможно ли обратное?

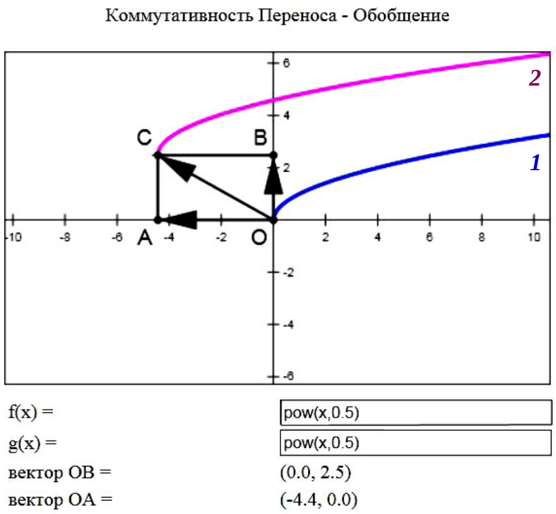


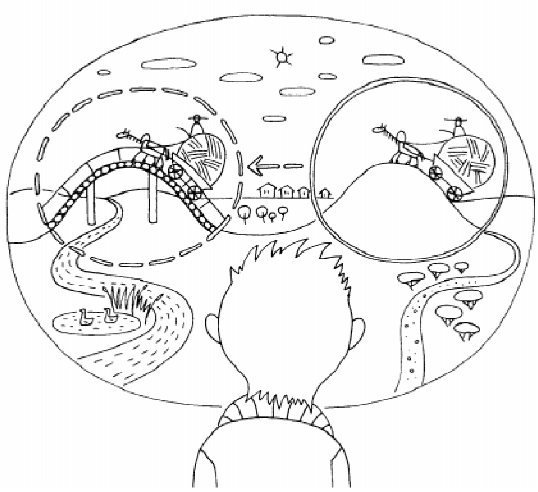
Рис. 4

b. Если ответ положительный, запишите вектор переноса для графика $y=g(x)$, полученного из графика $y = f(x)$, а также запишите вектор переноса для графика $y = f(x)$, полученного из графика $y=g(x)$.

c. Подтвердите ваш результат при помощи данного апплета.

1. $f(x)=\sqrt{x-a}$ и $g(x)=\sqrt{x+b}$, апплет *Перенос5* (рис. 5*a*).

Ответ: a) график одной функции можно получить из графика другой функции переносом вдоль оси абсцисс; b) если $a+b\neq 0$, то график $y = f(x)$ можно получить из графика $y=g(x)$ переносом на вектор



Можно ли получить переносом график $y = g(x)$ из графика $y = f(x)$?

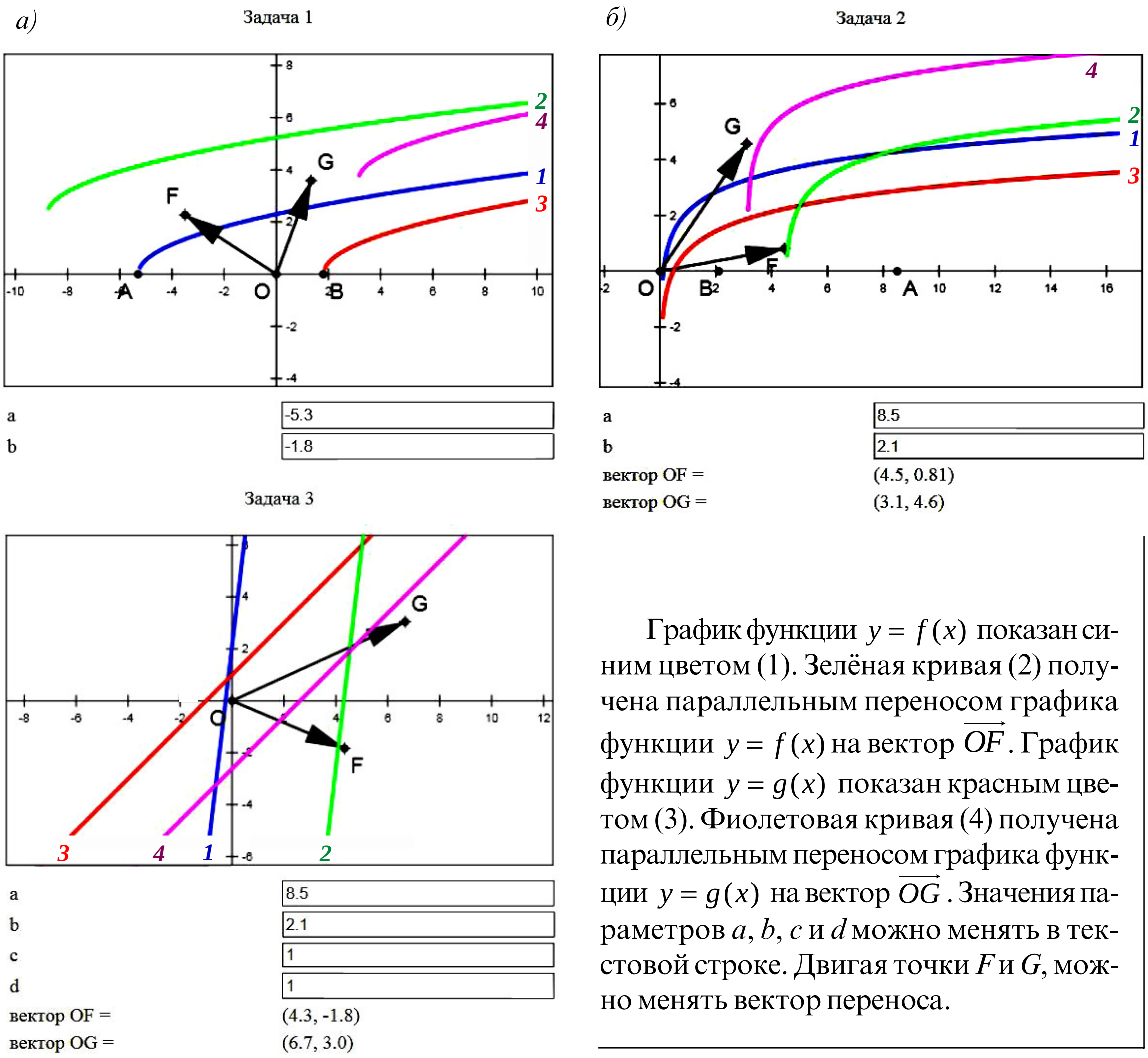


График функции $y = f(x)$ показан синим цветом (1). Зелёная кривая (2) получена параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на вектор $\overrightarrow{OF}$. График функции $y = g(x)$ показан красным цветом (3). Фиолетовая кривая (4) получена параллельным переносом графика функции $y = g(x)$ на вектор $\overrightarrow{OG}$. Значения параметров *a*, *b*, *c* и *d* можно менять в текстовой строке. Двигая точки *F* и *G*, можно менять вектор переноса.

Рис. 5

$(a + b; 0)$, график $y = g(x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ переносом на вектор $(-(a + b); 0)$, если $a + b = 0$, то графики совпадают.

2. $f(x) = \ln(ax)$ и $g(x) = \ln(bx)$, $a > 0$, $x > 0$, $b > 0$, $x > 0$, апплет *Перенос6* (рис. 5*b*)

Ответ: а) график одной функции можно получить из графика другой функции переносом вдоль оси ординат; b) если $a \neq b$, график $y = f(x)$ можно получить из графика $y = g(x)$ переносом на вектор $\left(0, \ln\frac{a}{b}\right)$, график $y = g(x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ переносом на вектор $\left(0, \ln\frac{b}{a}\right)$; если $a = b$, то графики совпадают.

3. $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, апплет *Перенос7* (рис. 5*c*).

Ответ: а) график одной функции можно получить из графика другой функции, если $a = c$; b) имеется бесконечное число векторов переноса; с) в качестве вектора переноса можно взять вектор, который имеет начало на одной прямой и конец на другой.

Расширение задачи

Даны две функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \frac{x + a}{x + 1}$. При каком условии на параметр a графики этих функций можно совместить переносом? Запишите вектор переноса в каждом случае из двух возможных. Исследуйте задачу с помощью апплета *Перенос8* (рис. 6).

График функции $y = f(x)$ показан синим цветом (1). Зелёная кривая (2) получена параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на вектор $\overrightarrow{OF}$. График функции $y = g(x)$ показан красным цветом (3). Фиолетовая кривая (4) получена параллельным переносом графика функции $y = g(x)$ на вектор $\overrightarrow{OG}$. Значение параметра a можно менять в текстовой строке. Двигая точки F и G, можно менять векторы переноса.

Ответ:

$g(x) = \frac{x+a}{x+1} = \frac{x+1+a-1}{x+1} = 1 + \frac{a-1}{x+1}$. Нужный перенос возможен только при условии $a = 2$, поэтому $\frac{a-1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$. В результате $g(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$. При этом условии график функции можно получить переносом графика $y = g(x)$ на вектор (–1, 1). Обратный перенос можно осуществить при помощи вектора (1, –1).

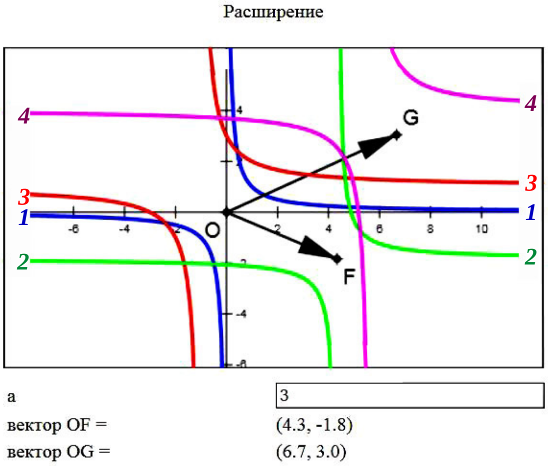


Рис. 6

ЗАДАНИЕ 2.
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Цель задания:

Напомнить ученикам графический способ решения и исследования уравнений, неравенств, систем с параметрами.

Задача: Исследуйте систему уравнений $\begin{cases} y = |x| + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ и найдите её решения. Для исследования этой задачи ученики используют интерактивный апплет *Система* (рис. 7).

Двигая точку A вдоль оси ординат ученики могут изменять параметр a в выражении для функции $y = |x| + a$. Значение параметра a показано под графиком. Радиус и центр окружности фиксированы.

Часть 1. Система уравнений не имеет решения

В этой части задачи ученики исследуют взаимное расположение двух кривых, при котором график функции не пересекает окружность. Двигая точку A вдоль оси ординат, ученики могут убедиться в том, что при условии $a > 1$ кривые не пересекаются, то есть система уравнений не имеет решений.

Следует спросить учеников: существуют ли другие значения параметра a, при которых система не имеет решений? При движении точки A вниз, можно убедиться, что такие значения параметра существуют. Используя апплет, ученики могут найти взаимное положение кривых, при котором ветви графика функции являются касательными к окружности. Поскольку при этом условии

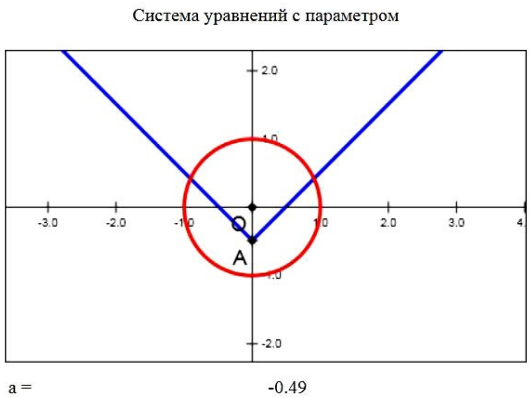


Рис. 7

расстояние от центра окружности до точки касания равно радиусу окружности, достаточно решить уравнение $\left|\frac{\sqrt{2}\cdot a}{2}\right| = 1$. Это приводит к условию $a < -\sqrt{2}$, при котором система также не имеет решений.

Часть 2. Исследование числа решений системы уравнений.

В этой части задачи ученики исследуют условие, при котором система уравнений имеет одно, два, три, четыре решения. Нахождение самих решений не является целью этой части задачи.

Ученикам предлагаются следующие вопросы:

1. Сколько решений может иметь данная система уравнений?

Ответ: 1, 2, 3, 4 в зависимости от значения параметра a.

2. Каковы значения параметра a, при которых система уравнений имеет одно, два, три , четыре решения?

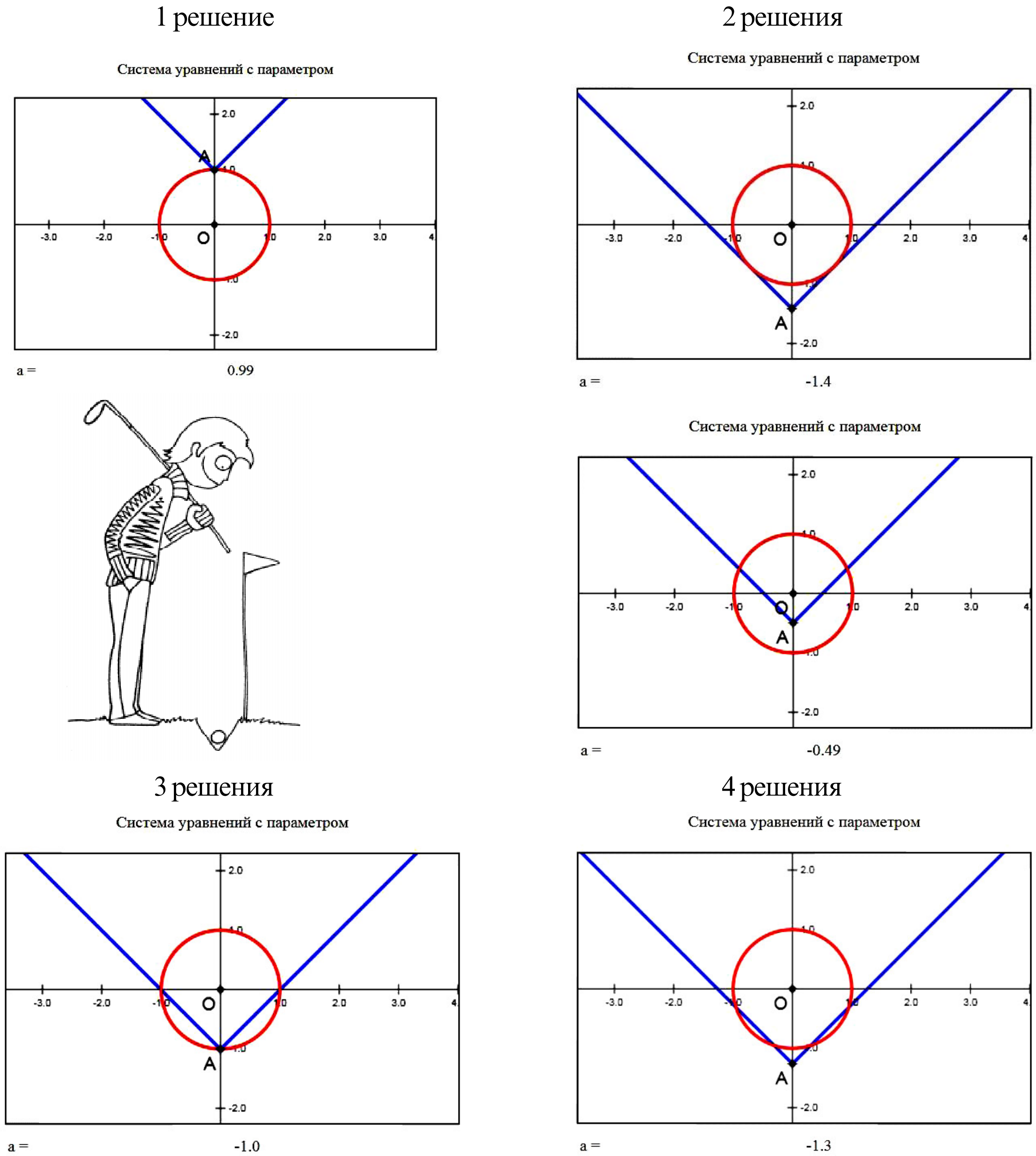


Рис. 8

Ответ: при исследовании с помощью апплета *Система* ученики двигают точку A и определяют значения параметра a для каждого случая (рис. 8). Из предыдущей работы ученики уже знают, что при условии $a=-\sqrt{2}$ имеются два решения. Две точки пересечения также существуют при условии $-1<a<1$. При условии $a=-1$ имеется три точки пересечения и при условии $a=1$ имеется одна точка пересечения. Система уравнений имеет четыре решения при условии $-\sqrt{2}<a<-1$, когда каждая ветвь графика функции пересекает окружность дважды.

Часть 3. Решение системы уравнений

В заключение ученикам предлагается решить задачу аналитически.

Расширение задачи

Аналогичный подход можно использовать:

1) при решении неравенств и систем неравенств с параметром: $|x|+a\le\sqrt{1-x^2}$; $|x|+a\le-\sqrt{1-x^2}$; $|x|+a\ge\sqrt{1-x^2}$; $|x|+a\ge-\sqrt{1-x^2}$; $\begin{cases}|x|+a\ge-\sqrt{1-x^2},\\ |x|+a\le\sqrt{1-x^2}.\end{cases}$

2. При решении систем уравнений

a. $\begin{cases} y=|x|,\\ x^2+(y-a)^2=1.\end{cases}$

b. $\begin{cases} y=|x-a|,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

c. $\begin{cases} y=|x|,\\ (x-a)^2+y^2=1.\end{cases}$

СОЗДАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ АППЛЕТОВ

Особенности программы, позволяющие создание HTML5/JavaScript апплетов, включают:

– ввод численных параметров через текстовую строку или слайдер;

– ввод функций при помощи алгебраических выражений;

– возможность двигать точку вдоль кривой или прямой;

– поддержка технологии Multi-Touch для JavaScript апплетов;

– генерация исходного кода Lua;

– цвет фона;

– графическое окно с независимыми масштабами для координатных осей;

– задание точности вывода численных результатов либо при помощи фиксированного числа цифр, либо при помощи фиксированного числа знаков после запятой.

Для создания HTML5/JavaScript сначала требуется создать динамическую модель в программе, имея в виду, что:

– для построения свободно передвигаемых точек, их координаты нужно задать переменными;

– для построения точек, которые можно передвигать вдоль данной кривой или прямой, нужно использовать ограничение пропорциональности вдоль кривой, заданное переменной;

– для вывода результатов измерений в апплет измерения должны быть сделаны в символьном виде.

После создания динамической модели необходимо экспортировать документ в виде HTML5/JavaScript. Полученный html документ можно открыть в любом браузере.

Интерактивные HTML/Javascript апплеты можно создавать для исследовательских задач по любому разделу школьной математики. Эти апплеты придают задачам наглядность, позволяют ученикам исследовать условия задач, подтверждать гипотезы и находить решения. В связи с доступностью апплетов, ученики могут работать с исследовательскими задачами не только в школе, но и дома.

Irina Lyublinskaya,
Ph.D., Professor of Mathematics and Science Education, College of Staten IslandCollege of Staten Island,
City University of New York, USA.