Ягунова Екатерина Борисовна

ЖЁСТКОСТЬ, СТЕПЕНИ СВОБОДЫ, ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИЗВЕСТНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Внимание! Прежде чем начинать читать статью, нарисуйте параллелограмм. Если под рукой нет ни клочка бумаги, ни авторучки, то хотя бы представьте себе параллелограмм. Сделали? Теперь можно читать.

ПРЕДЫСТОРИЯ

У одной моей знакомой девочки однажды на контрольной «не решилась» задачка по геометрии. Девочка точно знала, что задачка простая и должна решаться. Я тоже точно знала, что девочка стандартные задачки из базового курса геометрии хорошо умеет решать. В чём же дело? Задача была такая: «высота, проведённая из вершины тупого угла параллелограмма, делит противоположную сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла. Найти…, если известно, что…». Начинаем разбираться. Диалог получается очень странный:

– Условие понятно?

– Да, но у меня не выходит.

– Что не выходит?

– *Так* не выходит.

– Что именно не выходит?

– Не получается.

– Что не получается?

– *Так* не получается.

– Что не получается?

– Да условие какое-то странное.

– ???

– *Так* не выходит. *Так* нельзя нарисовать.

Оказалось, что главным в диалоге было слово «так». Она не смогла нарисовать картинку ***так***, как того требовало условие задачи. Перечитываю ещё раз условие – не вижу проблемы. Берём листочек, начинаем рисовать. И тут выясняется удивительное: она умеет нарисовать ровно один параллелограмм (рис. 1). И у этого параллелограмма высота, проведённая из вершины тупого угла, делит противоположную сторону в от-

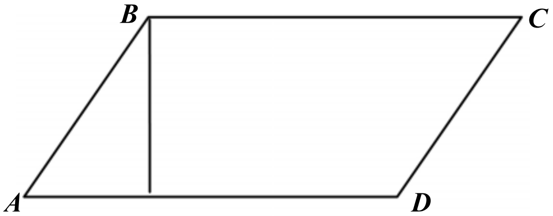
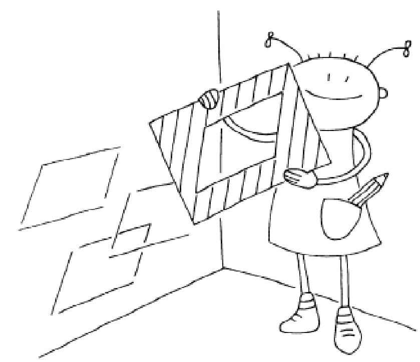


Рис. 1. Идеальный параллелограмм



...она умеет нарисовать ровно один параллелограмм.

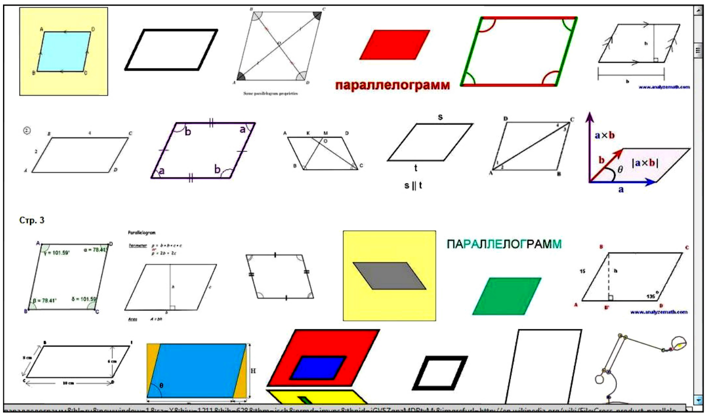


Рис. 2. Все параллелограммы – идеальные

ношении 2 : 1 от вершины ***тупого*** угла. Именно этот параллелограмм всегда рисуется в классе на доске учительницей. Подозреваю, что именно его Вы нарисовали перед тем, как начать читать эту статью. Видимо, это не случайно, ибо именно его предлагает нам и MS Word в качестве «идеального» параллелограмма – как бы Вы не шевелили его мышкой, ничего существенно нового не получите! Подозреваю, что в пропорциях именно этой фигуры есть что-нибудь от золотого сечения и прочей музыки сфер. Полистайте учебники-справочники-пособия! Везде параллелограмм изображён именно так. Наберите в поисковике «параллелограмм» и нажмите «искать в картинках» – все параллелограммы окажутся именно такими (рис. 2). С одной стороны, не так и плохо, что в голове у ребёнка имеется жёсткое представление о параллелограмме – это те самые базовые знания, которые остаются навсегда. С другой стороны, это представление, к сожалению, не архетип параллелограмма, а лишь пиктограмма. Пиктограмма безжизненна, а на базе архетипа можно понастроить самых разнообразных параллелограммов (рис. 3). Высота, проведённая из вершины тупого угла, может делить основание в отношении 2 : 1 от вершины тупого угла (параллелограмм 1), или от вершины острого угла (параллелограмм 2). Высота может попасть в вершину и стать диагональю (параллелограмм 3). Основание высоты может лежать вне параллелограмма, при этом отношение расстояний от неё до вершин всё равно будет равно 1 : 2 (параллелограмм 4)[1]. Можно нарисовать даже «очень длинный» параллелограмм – настолько длинный, насколько хватит листочка (параллелограмм 5)[2]. Но всё это, увы, «за страницами учебника математики».

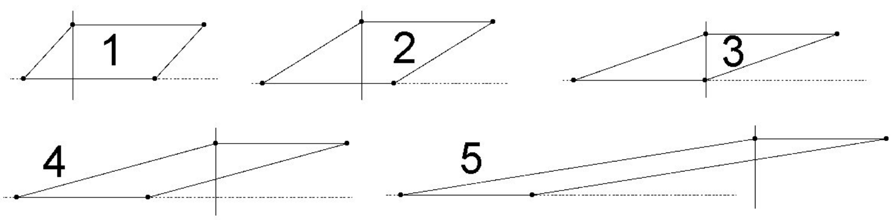


Рис. 3. Вариации на тему параллелограмма

[1] Условию «расстояния до концов отрезка относятся как 2:1» удовлетворяют 4 точки. Если указано, в каком порядке вычислять расстояние до вершин, то остаётся 2 точки. Одна из них привычна школьнику. Эта точка находится внутри отрезка на расстоянии трети от его конца. А вот вторая точка на отрезке не лежит, она – источник проблем и вторых случаев. Её существование для большинства школьников – неприятный сюрприз (вспомните про задачу С4 из ЕГЭ!). Про такие точки также шла речь в материале предыдущего номера при работе с уравнением прямой в векторной форме.

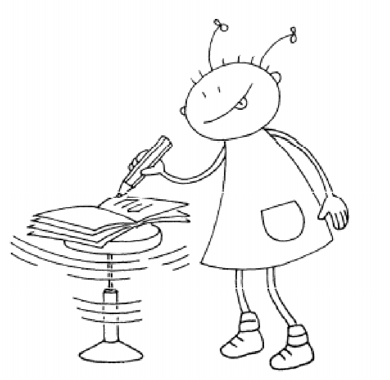
[2] При взгляде на эти картинки сразу становится понятно, что традиционный вывод формулы для площади параллелограмма, предлагаемый во многих школьных учебниках, никуда не годится. Получить из параллелограмма прямоугольник, путём перекладывания прямоугольного треугольника, отрезанного от него высотой, можно только в тех самых «идеальных параллелограммах». В «произвольном» параллелограмме такое построение не проходит.

ИСТОРИЯ С РИСОВАНИЕМ

Возвращаюсь к истории про девочку. Можно было, конечно, нарисовать ей правильный чертёж. Возможно, я так и сделала бы, если бы могла заранее предположить, сколько времени мы с ней потратим на рисование. Но, не догадываясь о глубине проблемы, я предложила ей попытаться нарисовать правильный чертёж самостоятельно, в моём присутствии. Первая страница тетради была изрисована «идеальными» параллелограммами. Они отличались по «размеру» и немного по пропорциям. Отношение варьировало в диапазоне от 1 : 2 до 1 : много, но всегда «считая от вершины острого угла». Она как бы двигала правую верхнюю вершину параллелограмма (вершину C) по горизонтали. И при этом параллелограмм всегда занимал «устойчивое положение», то есть лежал на длинной стороне[1]. После наводящих вопросов «а как ты рисуешь?», «а что можно ещё поменять на чертеже?» вдруг произошёл «эволюционный прорыв»: появились параллелограммы, «наклонённые в другую сторону». На рис. 2 парочка таких параллелограммов тоже присутствует. Однако довольно быстро стало понятно, что это «то же самое» и «опять не то»[2]. Следующий шаг был сделан довольно быстро: параллелограмм можно по-другому расположить в тетрадке. Поскольку рисовать непривычно расположенный параллелограмм очень неудобно, девочка стала при рисовании поворачивать тетрадку. Действительно, стали получаться параллелограммы, очень непривычные на вид. Но это был лишь непривычный ракурс, новый взгляд на старый, «идеальный» параллелограмм. На этот раз мы очень быстро поняли, что ничего нового не получили. Причём, даже с хорошей словесной формулировкой: «ну, да, рисую-то я опять то же самое. Просто листочек криво лежит». Следующий шаг – «а давайте поставим его на короткую сторону» опять же не привёл ни к чему новому, поскольку рисовался после предварительного поворота тетрадки на бок. А этот путь уже известен и никуда не ведёт. Тут я вмешалась в творческий процесс и запретила крутить тетрадку. Оказалось, что нарисовать «неправильно расположенный» параллелограмм в правильно расположенной тетрадке очень трудно. Чтобы это сделать, нужно от «рисования» перейти к «построению». Этот шаг – переход на принципиально иной уровень. Нарисовав горизонтальную коротенькую сторону, девочка задумалась, начала медленно проводить вторую сторону. Когда длины сторон стали примерно одинаковыми, случилось чудо: она поняла, что меняя длину второй стороны, мы можем регулировать «степень неправильности» параллелограмма. Тут же получился и тот параллелограмм, про который шла речь в нерешившейся задачке.

Чего же мы добились этими рисованиями? На что потратили целый урок?

- Придумали алгоритм построения (не рисования, а именно построения!) параллелограмма: рисуем отрезок AD, ставим точку B, находим точку C.
- Осознали границы своей власти над параллелограммом: три вершины паралле-



...девочка стала при рисовании поворачивать тетрадку.

[1] Может быть, дело именно в устойчивости? Как только основание высоты параллелограмма выходит за пределы стороны, параллелограмм должен «упасть». Может быть, нам подсознательно хочется, чтобы фигура, изображённая на чертеже, занимала устойчивое положение? Правда, это не объясняет отсутствие на типичных чертежах параллелограммов типа «2».

[2] Представляется очень важным момент осознания идеи «то же самое». Начинает работать «геометрическая интуиция». Происходит подсознательная классификация геометрических фигур по некоему признаку, который пока не сформулирован, но, очевидно, прочувствован.

лограмма нам подчиняются – мы можем расположить их, где нам угодно, четвёртая вершина нам не подчиняется – её положение полностью определяется правилами организации параллелограмма.

• Разделили «размер» и «форму»[1]: «размер» задаётся при выборе точек A, D, «форма» определяется положением точки C.

• Обнаружили, что имеется целое «семейство» параллелограммов, связанных между собой: один получается из другого изменением длины наклонной стороны.

• Поняли, как, «подогнать» чертёж под условие задачи: нужно перебирать последовательно параллелограммы из нашего «семейства».

Безжизненная пиктограмма, с которой мы начали рассказ (рис. 1), начала оживать. Чтобы завершить «оживление», надо научиться получать параллелограммы друг из друга непосредственно, преобразованием одного в другой, а не рисованием последовательных картинок.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

Есть два пути «оживления».

Первый – путь непосредственного моделирования из подручных материалов.

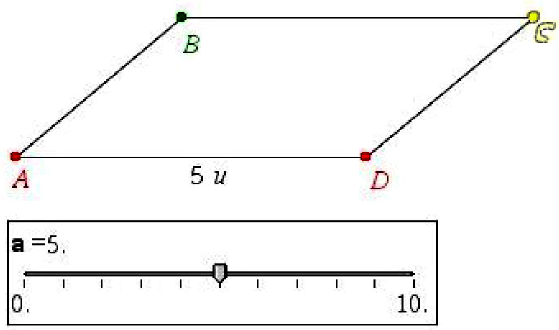


Рис. 4. Произвольный параллелограмм. Длина стороны AD определяется слайдером, вершину B можно двигать мышкой. (см. также интерактивный чертёж «произвольный параллелограмм»)

Складываем параллелограммы из спичек, выгибаем его из проволочки, натягиваем на пальцы нитяное колечко. Очень удобны магнитные детские конструкторы, позволяющие скреплять палочки магнитными шариками. Очевидное достоинство такого моделирования – задействованы тактильные каналы получения информации. Для кинестетиков, например, это главный и необходимый способ обучения. Также, что крайне важно, геометрическая фигура становится физической реальностью. Недостатков у такого моделирования довольно много. Вот самые очевидные: работая со спичками или магнитными палочками, мы получаем дискретное множество фигур вместо непрерывного (длина стороны фигуры всегда кратна длине спички) – рискуем слишком сильно привыкнуть к параллелограмму с соотношением длин сторон 2 : 1. Кроме того, небольшое изменение какого-либо параллелограмма требует перекладывания большого количества спичек (или магнитных палочек). Работая с куском проволоки или нитки, мы получаем непрерывное множество фигур (длина стороны может быть любой), но довольно сильно ограничены в варьировании «размеров» фигуры. Более того, теперь наши параллелограммы изопериметричны, а значит, длина второй стороны не произвольна. Параллелограммы, построенные из всех этих подручных материалов, не очень аккуратны и недолговечны – спички случайно сдвигаются, нитки прилипают к одежде, проволочка сгибается, магнитные шарики раскатываются по столу или липнут друг к другу. И, главное, подобного рода конструирование не позволяет проводить дальнейшие геометрические построения – высоты, окружности и т.п.

Второй путь – компьютерное моделирование. На интерактивном чертеже 1 точки A и D параллелограмма $ABCD$ неподвижны (то есть зафиксирован «размер» фигуры) – они окрашены в красный цвет, а вершины B и C подвижны. Вершина B полностью в нашей власти и потому покрашена в зелёный цвет, а вершина C, хоть и подвижна, нам не

[1] Мы на интуитивном уровне пришли к понятиям «форма» и «преобразования подобия». Причем «форма» возникает как некая противоположность «размеру». Тогда «преобразования подобия» – те преобразования, которые изменяют только «размер», но не изменяют форму.

подчиняется – она жёлтая. Двигая мышкой зелёную вершину, мы можем получить все те параллелограммы, которые уже удалось нарисовать в тетради. Заодно получаются и новые для нас параллелограммы, которые мы так и не смогли нарисовать. Становится понятно, что в тетради мы меняли сторону параллелограмма, оставляя без изменений угол, но можно было поступить и наоборот. Теперь, мы наконец-то описали множество ВСЕХ параллелограммов с заданной стороной. Описание получилось в виде рецепта: «чтобы достроить отрезок до параллелограмма, надо выбрать угол, под которым наклонена вторая сторона, и длину второй стороны».

Ограничение на одну из сторон (фиксированная сторона AD) легко объяснить: её положение – это положение тетради во время рисования, её длина задаёт «размер» всей фигуры[1]. Если нам нужна фигура определённого «размера», можем воспользоваться слайдером. Теперь можно потренироваться. Давайте придумаем какие-нибудь 2–3 условия и начнём их комбинировать:

1. Нарисуйте параллелограмм, у которого одна сторона в два раза больше другой. Такой параллелограмм единственный? Опишите все такие параллелограммы.

2. Нарисуйте параллелограмм, у которого острый угол равен 30°. Такой параллелограмм единственный? Опишите все такие параллелограммы.

3. Нарисуйте параллелограмм, у которого одна сторона в два раза больше другой, а острый угол равен 30°. Такой параллелограмм единственный? Опишите все такие параллелограммы [2].

4. Нарисуйте параллелограмм, у которого основание высоты лежит в середине стороны. Такой параллелограмм единственный? Опишите все такие параллелограммы[3].

5. Нарисуйте параллелограмм, у которого одна сторона в два раза больше другой, а основание высоты лежит в середине стороны. Такой параллелограмм единственный? Опишите все такие параллелограммы.

6. Нарисуйте параллелограмм, у которого одна сторона в два раза больше другой, острый угол равен 30°, а основание высоты лежит в середине стороны. Как это не получается? А почему?

7. Нарисуйте параллелограмм, у которого стороны равны, острый угол равен 60°, а основание высоты лежит в середине стороны. Само получилось? А почему?

8. И так далее.

Самые простые из таких задач хорошо бы решать «в уме». Если не получается, поэкспериментируем в тетрадке. Если всё равно не получается, воспользуемся интерактивным чертежом. Сначала будем подбирать параллелограммы «на глаз». Потом, произведя необходимые измерения, уточним результат. Отмечая найденные положения вершин, попытаемся найти закономерность в их расположении. Постепенно от случайного поиска приходим к идее конструирования искомой фигуры. Интересен не столько отдельный рисунок, сколько исследование разнообразия. Сформулируем ряд идей, к которым мы хотим подвести ученика.

- Чем больше условий наложено на фигуру, тем меньше разнообразие возможных фигур.
- Добавление новых условий сужает множество допустимых фигур.
- При некоторых сочетаниях условий фигура однозначно определяется.
- Бывают несовместные сочетания условий.
- Бывают избыточные описания.

Осознание этих идей напрямую связано с умением решать геометрические задачи.

[1] Во всех последующих чертежах также будет зафиксировано положение тетради и «размер» фигуры, то есть будет жёстко закреплён один из отрезков.

[2] Кстати, что тут считать правильным ответом? Можно нарисовать 4 картинки. Они отличаются тем, какая из сторон больше и какой из углов острый. То есть отличаются «размером» и обозначениями. Считать ли эти параллелограммы различными? Это повод для разговора.

[3] Тут получаются картинки двух типов. Параллелограммы одного типа легко находятся и описываются – у них вершина B лежит на серединном перпендикуляре к AD. У параллелограммов другого типа середина стороны AB (или CD) лежит на окружности с диаметром AD. Найти и описать эти параллелограммы – вполне содержательная задача.

Почему решается геометрическая задача с условием «Дано: … . Найти: … .» или «Дано: … . Доказать: … .»? В простых задачах это обычно, потому что множество фигур, удовлетворяющих указанным в «дано» условиям, чрезвычайно мало. Чаще всего такая фигура единственна. В задаче ЕГЭ С4 таких фигур обычно две. В более сложных задачах такая фигура не единственная, но наложенные в «дано» условия довольно сильно ограничивают разнообразие допустимых фигур. В этом ограниченном подмножестве у всех фигур обычно есть ещё одно общее свойство (кроме тех свойств, про которые сказано в «дано») – его-то обычно и требуется найти. Именно тут мы сталкиваемся с понятиями, вынесенными в название статьи: жёсткость, степени свободы, частные случаи известных геометрических фигур.

ЖЁСТКОСТЬ. СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Разберём примеры.

Пример 1. Стороны параллелограмма равны 3 и 8; один из его углов равен 150°. Найти площадь параллелограмма.

Эта задача абсолютно «жёсткая»: сформулированные в «дано» условия однозначно задают параллелограмм[1]. Поскольку заданным условиям удовлетворяет единственная фигура, то для этой фигуры можно найти любой параметр. Мы установили, что задача РЕШАЕТСЯ, то есть данных достаточно для её решения. Осталась техническая часть работы – расчёты. Можем в дополнение к площади найти, например, длины диагоналей. Или сделать в этом параллелограмме какое-либо дополнительное построение и найти элементы получившегося усложнённого чертежа. Основная мысль: в жёсткой фигуре можно посчитать любой элемент.

Пример 2. Сторона параллелограмма равна 5, а высота, проведённая к этой стороне, равна 3. Найти площадь параллелограмма.

Не будем торопиться с применением хорошо известной формулы, подумаем лучше о той фигуре, площадь которой мы хотим найти. Нашими условиями параллелограмм не задаётся однозначно. Задав длину стороны AD, мы можем двигать точку B лишь по прямой, параллельной прямой AD, отстоящей от неё на расстояние 3. Получаем бесконечное семейство параллелограммов. На наше счастье, все они имеют одинаковую площадь. Догадаться об этом мы можем, исходя из «презумпции решаемости» задачи: если бы площади параллелограммов отличались, то задача была бы некорректна. В этой задаче, в отличие от предыдущей, длина стороны AB и величина угла BAD связаны соотношением $AB \cdot \sin BAD = 3$, поэтому мы можем выбрать произвольно лишь одну из этих величин. Наша задача является однопараметрической, фигура имеет одну степень свободы.

Эту задачу можно было бы сформулировать следующим образом: «докажите, что все параллелограммы, у которых сторона имеет длину 5, а проведённая к ней высота – длину 3, имеют одинаковую площадь». Отметим, что нашу задачу в исходной формулировке решит практически любой школьник, изобразив «идеальный» параллелограмм и подставив числа в соответствующую формулу. А задача во второй формулировке для того, кто знаком только с «идеальным» параллелограммом будет крайне сложной. Скорее всего, средний школьник просто не поймёт, что от него требуется.

Пример 3. Одна сторона параллелограмма с углом 60° в два раза больше другой стороны. Найти отношение длин его диагоналей и угол между диагоналями.

[1] На интерактивном чертеже можно получить 4 картинки: расположить горизонтально большую или меньшую сторону, «наклонить» параллелограмм влево или вправо. Всё это один и тот же параллелограмм в разных ракурсах. Тут пришло время договориться еще об одном ограничении (кроме положения тетрадки и размера) – стараться располагать параллелограмм так, чтобы горизонтальна была его большая сторона, и «наклонять его вправо». Хорошо бы при помощи моделей материальных параллелограммов (бумага, спички и т. п.) убедиться, что любой параллелограмм так расположить можно. Теперь, кстати, можно вводить в употребление оборот «не умаляя общности...». Обратите внимание, мы почти вернулись к «идеальному» параллелограмму.

При фиксированной длине стороны AD такой параллелограмм единственный. Все параллелограммы, удовлетворяющие условию, можно получить, изменяя длину стороны AD, то есть «размер» фигуры. В таком случае говорят, что фигура определена «с точностью до подобия». Наша задача оказалась однопараметрической. В такой задаче нельзя найти ни одного отрезка, зато можно найти все углы и отношение любых двух отрезков. Вычисления можно проводить для параллелограмма со сторонами, скажем, 1 и 2.

Как и в предыдущем случае, поскольку фигура задана не однозначно, задача может быть переформулирована в виде: «докажите, что у всех параллелограммов с острым углом 60° и длинами сторон, из которых одна сторона в два раза больше другой, угол между диагоналями одинаков».

Пример 4. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены высоты AM на BC и AN на CD. P – точка пересечения BN и DM. Найти угол между прямыми AP и MN.

В этой сложной задаче про параллелограмм ничего не известно – задача с тремя степенями свободы. Исходя из «презумпции решаемости», можем переформулировать задачу так: «… Доказать, что угол между прямыми AP и MN одинаков для всех параллелограммов и найти его». Чтобы найти угол, можно рассмотреть удобный параллелограмм – например, ромб. В нём искомый угол очевидно, равен 90°. Задачу мы пока не решили, но ответ нам уже известен.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

В разобранных выше примерах исходная фигура – параллелограмм – задавалась тремя элементами – «размером» (то есть длиной стороны AD), длиной стороны AB, величиной угла BAC. Условия рассмотренных задач накладывали ограничения непосредственно на эти элементы – задавая их значения или указывая соотношения между ними. В более сложных задачах ограничения носят конфигурационный характер. Вспомним задачу, с которой мы начали эту статью: в ней из всех параллелограммов выделено подмножество «параллелограммы, в которых высота делит противоположную сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла». Самыми известными подмножествами множества параллелограммов являются «параллелограммы с равными сторонами», «параллелограммы с перпендикулярными диагоналями», «параллелограммы с равными диагоналями», «параллелограммы, диагонали которых являются биссектрисами его углов». Они занимают столь значительное место в жизни и в школьном курсе, что даже имеют собственные названия – это ромбы и прямоугольники. Если всё же посмотреть на них как на параллелограммы, то становится понятно, что прямоугольник – параллелограмм с двумя степенями свободы (в нашей власти его размер и длина стороны AB), ромб – тоже параллелограмм с двумя степенями свободы (в нашей власти его «размер» и величина угла BAD). Также отдельно изучаются «описанные четырёхугольники» и «вписанные четырёхугольники».

В задачах регулярно встречаются частные случаи и других геометрических фигур. Поскольку ограничения задаются конфигурационно, для школьника часто трудно даже сделать чертёж[1]. Стандартный путь построения (обычно это не построение, а рисование!) может привести к искомому частному случаю лишь случайно. Часто получается зауженное множество. Скажем, в качестве описанного четырёхугольника очень часто рисуют прямоугольник, равнобедренную трапецию, хотя множество допустимых фигур ими не исчерпывается. Использование такого чертежа может привести к разбору частного случая задачи вместо её решения. Проверьте себя и своих школьников – изобразите следующие частные случаи трапеции:

1. Прямоугольная трапеция
2. Равнобедренная трапеция
3. Трапеция с заданной высотой

[1] Не говоря уж о «сделать аккуратный чертеж».

4. Трапеция с заданным углом при основании
5. Описанная трапеция
6. Вписанная трапеция
7. Трапеция с перпендикулярными диагоналями
8. Прямоугольная трапеция с перпендикулярными диагоналями
9. Трапеция, диагональ которой перпендикулярна боковой стороне
10. Трапеция, диагональ которой является биссектрисой её угла

Возможные варианты чертежа для каждого частного случая приведены на рис. 5. А с помощью компьютерного моделирования можно правильно показать всё разнообразие фигур, в пределах каждого частного случая. На соответствующих интерактивных чертежах все приведённые на рис. 5 трапеции могут быть модифицированы. Цветовые обозначения показывают, насколько нам подчиняются детали чертежа. Красные точки неподвижны, зелёные полностью подчиняются нам, жёлтые двигаются вслед за зелёными. Иногда мы можем перемещать точку ограниченно – в таком случае точка отмечена синим цветом (рис. 5).

Все построенные фигуры – не жёсткие. То есть даже при фиксированном «размере» (заданной длине горизонтальной стороны) их разнообразие достаточно велико, что и позволяет им появляться в качестве действующих лиц в огромном количестве задач. Работая с интерактивным чертежом, мы легко можем понять, сколько степеней свободы «осталось» у фигуры, то есть, сколько числовых данных мы должны иметь в условии, чтобы задача решилась.

ЕСЛИ В ЗАДАЧЕ «ОКАЗАЛОСЬ, ЧТО…»

Последнее, на чём хотелось бы отдельно остановиться – геометрические задачи с «неожиданностью» в конце условия. Эта неожиданность обычно состоит в указании на конфигурационные особенности чертежа и вводится оборотом «оказалось, что». Отметим, что задача, с которой началась эта статья, тоже относится к этому типу. Совершенно правильно будет прочитать её так: «в параллелограмме провели высоту, и ОКАЗАЛОСЬ, ЧТО она делит сторону в отношении….». Ситуация – как в цирке, когда зритель складывает в пустой мешок одни предметы, а фокусник потом достаёт из этого мешка совершенно другие. Так и школьник, который, читая условие, строил чертёж, должен в конце, будто фокусник, получить на чертеже вовсе не то, что он там нарисовал, а то, что придумано в задаче. В таких

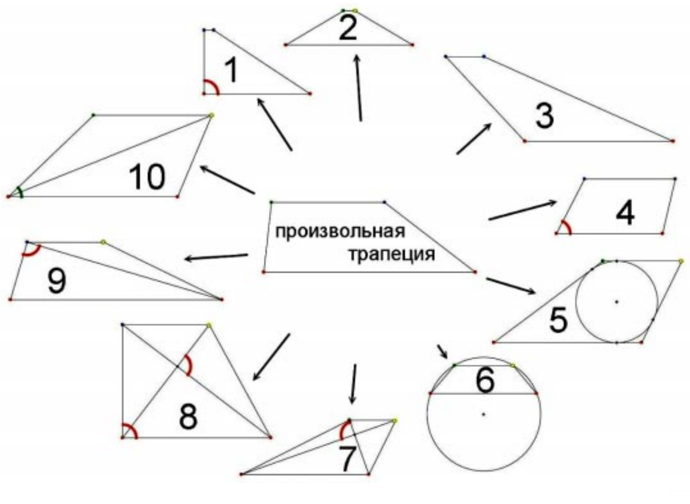


Рис. 5. Частные случаи трапеций. Номера трапеций соответствуют перечисленным выше десяти частным случаям (см. также соответствующие интерактивные чертежи)

задачах правильно нарисованный чертёж – большое продвижение. Такие задачи тем сложнее, чем дальше от начала задачи отстоит «оказалось, что». Простую задачу про параллелограмм с равными диагоналями[1] так формулировать не интересно – слишком близок фокус к началу представления.

Такие задачи достаточно редки в школьных учебниках. В сборнике задач для подготовки к устному экзамену по геометрии в 9 классе их всего около 5 % среди задач для базовых школ, около 7 % среди задач для углублённого изучения[2]. При этом среди геометрических задач районных и городских олимпиад Санкт-Петербурга по математике их около 50 %. То есть умение решать именно такие задачи характеризует высокий уровень знания геометрии.

В действительности, речь опять идёт о частных случаях геометрических фигур, просто определены эти частные случаи ещё более сложно.

Интерактивные чертежи в таких задачах предоставляют школьнику бесценную возможность поэкспериментировать с геометрическим объектом, разобраться в наложенных на него ограничениях, получить требуемый частный случай.

[1] Построили параллелограмм, и оказалось, что у него равны диагонали….
[2] Различия между базовыми и углубленными школами недостоверны ($p = 0.2$).

Ягунова Екатерина Борисовна, кандидат биологических наук, доцент биолого-почвенного факультета СПбГУ; преподаватель математики Академического университета (лицей ФТШ).