Ягунова Екатерина Борисовна

РАДИУС-ВЕКТОРЫ: ОТ ПРАВИЛА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ДЕЙСТВУЮЩИЕ ЛИЦА: РАДИУС-ВЕКТОРЫ

Давайте выберем на плоскости некоторую точку O – начало координат. Из точки O в каждую другую точку плоскости проведём вектор, который будем называть радиус-вектором. Теперь между точками плоскости и радиус-векторами установлено взаимно-однозначное соответствие. Например, на интерактивном чертеже 1 (рис. 1) радиус-векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$, выделенные красным цветом[1], проведены из точки O в точки A, B, C, D соответственно.

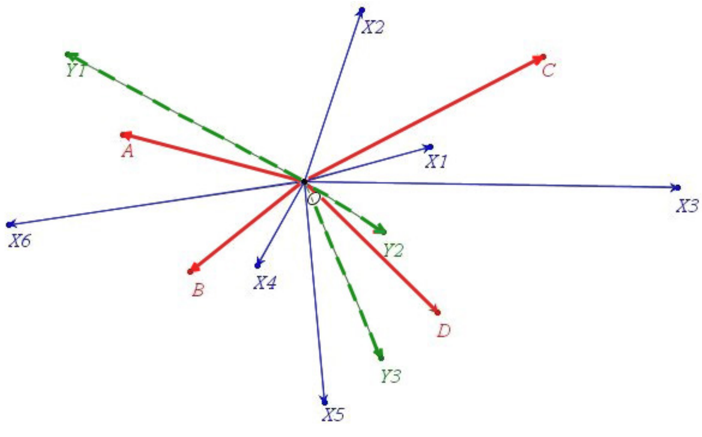


Рис. 1

Используя правило параллелограмма, можно получить векторы попарных сумм – они показаны синим цветом[2]. Дальнейшими сложениями имеющихся на чертеже векторов, а также их долей, можно сколь угодно усложнять картинку. Несколько полученных таким образом векторов – $\overrightarrow{OY_1}, \overrightarrow{OY_2}$ и $\overrightarrow{OY_3}$ – отмечены на чертеже зелёным цветом[3].

Упражнения для учащихся

1. Определить, сложением каких пар исходных векторов получены векторы $\overrightarrow{OX_1}, ..., \overrightarrow{OX_6}$.

2. Определить, сложением каких векторов, из уже имеющихся на чертеже, получены выделенные на чертеже зелёным цветом векторы $\overrightarrow{OY_1}, \overrightarrow{OY_2}$ и $\overrightarrow{OY_3}$.

Как работать с интерактивным чертежом?

Чертёж, с которым мы работаем, весьма насыщенный. Работать с ним можно по-разному.

Первое упражнение сильный школьник с развитым воображе-

[1] Поскольку полиграфические возможности не позволяют делать цветные иллюстрации, то приняты следующие обозначения: красные вектора изображены жирными линиями, синие вектора – тонкими, зеленые – пунктиром.

[2] Неожиданное повторение комбинаторики: количество возможных пар равно C_4^2, то есть 6.

[3] Если предложенный чертеж кажется слишком сложным, можно скрыть все зеленые векторы или уменьшить число исходных красных векторов.

Определить, сложением каких пар исходных векторов получены векторы...

нием, вероятно, сможет выполнить «в уме». Построим (мысленно или перерисовав чертёж в тетрадь) параллелограммы, «натянутые» на имеющиеся пары красных векторов. Четвёртая вершина каждого такого параллелограмма – какой-то из синих векторов $\overrightarrow{OX_i}$. Записываем, чему он равен, и переходим к следующему параллелограмму. Никакая «интерактивность» не потребовалась![1] Для упрощения картинки можем скрывать (или даже удалять) те векторы, про которые мы уже ответили на вопрос задачи. Такой путь очень хорош, если надо найти все синие векторы.

Если же нас интересует какой-то конкретный синий вектор[2], то, чтобы не тратить время на ненужные векторы, воспользуемся возможностями интерактивного чертежа. «Пошевелим» мышью два каких-то красных вектора по очереди. Найдём синий вектор, который «отреагировал» на оба движения – он равен сумме тех векторов, которые мы «шевелили». Убедимся в этом, построив соответствующий параллелограмм (мысленно или прямо на нашем интерактивном чертеже, используя соответствующие геометрические возможности программы).

В рассматриваемом примере на «шевеление» одного красного вектора реагируют три синих – их несложно запомнить. При большем числе красных векторов чертёж станет гораздо сложнее. Тогда можно «прятать» на чертеже ненужные векторы – те, «шевеление» которых оставляет искомый синий вектор неподвижным. Когда красных векторов на чертеже останется всего два, задача будет решена.

Едва ли будет разумно просто сообщить школьникам приведённые выше способы решения задач. Вероятно, многие из них смогут решить задачу интуитивно, пользуясь собственными алгоритмами действий. Попытки сформулировать эти алгоритмы и последующее их обсуждение сами по себе полезны и могут стать подготовкой к выполнению второго упражнения.

Решение «в уме» второго упражнения едва ли будет доступно даже достаточно сильным школьникам. Именно теперь нам поможет проведённое ранее подробное обсуждение решения первого упражнения. Чтобы получить ответ в данном случае, придётся применять всё то, что обсуждалось выше, и придумывать дополнительные приёмы. Например решить задачу в частном случае, расположив векторы специфическим образом (сделать один из них 0-вектором или сделать два вектора равными)[3]. Отметим также, что возможны различные представления одного вектора. Скажем, вектор $\overrightarrow{OY_2}$ может быть представлен в виде суммы имеющихся на чертеже векторов тремя способами: $\overrightarrow{OY_2} = \overrightarrow{OX_2} + \overrightarrow{OX_5} = \overrightarrow{OX_3} + \overrightarrow{OX_6} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_4}$.

[1] Наиболее сильным школьникам часто не требуется проделывать манипуляции на чертеже – они легко выполняют эти манипуляции мысленно. Гораздо полезнее в таком случае развивать в них эту способность к мысленным построениям, чем заставлять их двигать точечки на экране.

[2] Например, при работе по вариантам: в одном варианте просим найти векторы $\overrightarrow{OX_1}$, $\overrightarrow{OX_2}$ и $\overrightarrow{OX_3}$, в другом – $\overrightarrow{OX_4}$, $\overrightarrow{OX_5}$ и $\overrightarrow{OX_6}$. Или, увеличив число исходных красных векторов, попросим каждого школьника найти его собственный вектор – $\overrightarrow{OX_i}$, где i – его номер по списку в классном журнале.

[3] Читатель, чертеж которого лишен интерактивности, и потому лишенный возможности применять все описанные выше «волшебные приемы», может попытаться получить правильные ответы для двух оставшихся векторов: $\overrightarrow{OY_1} = \overrightarrow{OX_3} + \overrightarrow{OX_6} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OY_2} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OY_3} = \frac{\overrightarrow{OB}}{2} + \overrightarrow{OD}$.

Однако это разнообразие при более пристальном рассмотрении исчезает, поскольку все три суммы приводят нас к выражению $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$. Можно также заметить (особенно легко это заметить, если исходные векторы «удобно» расположены), что красные векторы можно выражать друг через друга. Тем самым мы подходим к мысли об избыточности нашей системы векторов, что в дальнейшем понадобится нам для обсуждения понятие базиса.

Алгебраические аспекты

Обратим внимание на то, что при выражении одних векторов через другие требуется не ошибиться при приведении подобных слагаемых. В тривиальном случае такие преобразования можно выполнить в уме. А можно на этом тривиальном случае потренироваться работать с векторами при помощи CAS-калькуляторов или соответствующих программ, установленных на компьютере. В этом случае выкладки будут выглядеть так[1] (рис. 2).

Действительно, мы получили одинаковые выражения для всех трёх сумм. В более сложных случаях можно допустить, а иногда и порекомендовать, выполнение действий с векторами именно таким образом, чтобы не отвлекать силы учащихся от осмысления геометрического содержания (мы к этому ещё вернёмся при решении задач).

ox1:=oc+ob	ob+oc
ox2:=oa+oc	oa+oc
ox3:=oc+od	oc+od
ox4:=oa+od	oa+od
ox5:=ob+od	ob+od
ox6:=oa+ob	oa+ob
ox1+ox4	oa+ob+oc+od
ox2+ox5	oa+ob+oc+od
ox3+ox6	oa+ob+oc+od

Рис. 2

Замечание. Сложение векторов по правилу параллелограмма – дело нехитрое. Задачи на эту тему, которые правильнее называть упражнениями, удивительно однообразны и, будем откровенны, скучны. Аккуратное рисование параллелограммов по линейке формирует навык аккуратного рисования параллелограммов, а вовсе не сложения векторов. Интерактивный чертёж поможет слабому школьнику «почувствовать», как устроена сумма векторов, а сильному – потренировать навык сложения векторов, решая и придумывая (!) упражнения разной сложности. Видоизменяя исходную картинку и варьируя сложность заданий, можно сконструировать любой урок: знакомство с темой, повторение, контрольная работа, самостоятельная работа, индивидуальное или командное соревнование.

Между делом формируется необходимый нам для дальнейшего стереотип: все наши радиус-векторы, начинаются в одной и той же выбранной заранее точке.

ОСНОВНАЯ ОПЕРАЦИЯ: РАЗЛОЖЕНИЕ ПО БАЗИСУ

Выделим какие-либо два неколлинеарных вектора на плоскости – $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – и назовём их базисными векторами. При помощи интерактивного чертежа (рис. 3) научимся раскладывать произвольный вектор по выбранному базису[2], то есть представлять его в виде $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{y}$. Выражение $\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{y}$ называется линейной комбинацией векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а числа α и β – ко-

[1] Используемая автором программа TI-Nspire не позволяет ни на чертежах, ни при вычислениях использовать для обозначения векторов привычные нам «стрелочки».

[2] Алгоритм разложения вектора $\vec{a}$ по базису $\{\vec{x};\vec{y}\}$ следующий. Проведем через точку A прямые, параллельные базисным векторам, найдем вспомогательные точки P_x и P_y. Тогда $\vec{a}=\overrightarrow{OP_x}+\overrightarrow{OP_y}=\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{y}$. Коэффициенты α и β показывают доли, которые составляют длины отрезков OP_x и OP_y от длин соответствующих базисных векторов. Числа α и β положительны, если векторы $\overrightarrow{OP_x}$ и $\overrightarrow{OP_y}$ сонаправлены с соответствующими базисными векторами, и отрицательны, если противоположно направлены.

ординатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{x};\vec{y}\}$. Такое разложение единственно, то есть при фиксированном базисе координаты α и β вектора определены однозначно (рис. 3).

Меняя положение раскладываемого вектора, можно следить за изменением его координат. Как сами базисные векторы, так и положение начала отсчёта можно изменять. Поскольку разложение вектора по базису является основным для всей нашей последующей деятельности, выполним ряд упражнений.

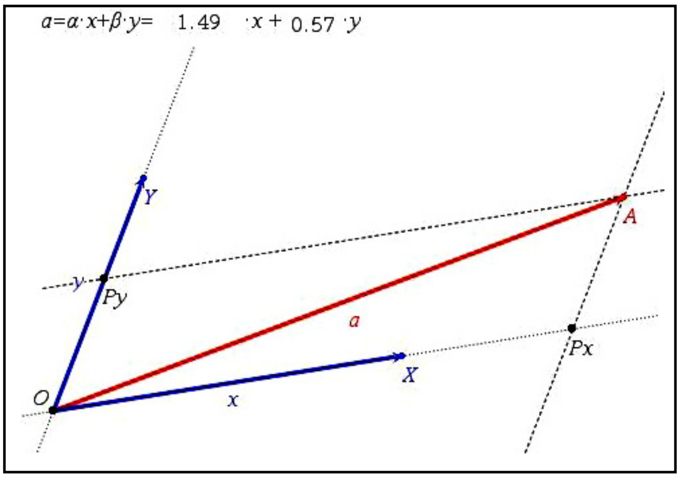


Рис. 3

Упражнения:

1. «Прячем» строку с координатами вектора. Меняем вектор $\vec{a}$, определяем его координаты «на глаз». Проверяем свой ответ, возвращая спрятанную строку.

2. Мысленно изменяем один из базисных векторов (увеличиваем или уменьшаем его длину, меняем направление на противоположное, изменяем угол между базисными векторами…). Предсказываем изменение координат вектора. Проверяем своё предположение, переведя базисный вектор в нужное положение.

3. По заданным координатам рисуем вектор $\vec{b}$. Чтобы проверить себя, совмещаем с вектором $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$, смотрим истинные координаты нарисованного нами вектора.

4. Прячем базисные векторы. Задаём вектор $\vec{a}$ и его координаты. Подбираем базисные векторы, чтобы координаты получились такими, как требуется. Возвращаем на чертёж базисные векторы – проверяем, сильно ли мы ошиблись.

5. Находим ГМТ (изображаем ответ в тетради):

a. Первая координата положительна.

b. Вторая координата отрицательна.

c. Обе координаты одного знака.

d. Первая координата постоянна (например, равна 2).

e. Вторая координата больше единицы, первая – постоянна.

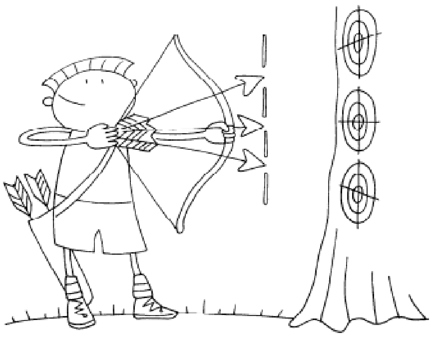
f. Сумма координат равна единице.

g. Сумма координат постоянна (например, равна –3).

Дальше можно поупражнять свою и детскую фантазию, придумывая и выполняя задания подобного рода. Отметим также, что упражнения 1–3 хорошо подходит для работы в парах. В этом случае не придётся всё время «скрывать – открывать» элементы интерактивного чертежа, поскольку можно на одном чертеже (со скрытыми элементами) выполнять упражнение, а на другом (без скрытых элементов) контролировать правильность. Выполнение таких упражнений тренирует геометрическую интуицию, формируется навык работы с базисом, понятие координат вектора становится «зримым».

Задачи упражнения 5 несколько иные. Их тоже можно решать «экспериментально», двигая вектор на экране и следя за изменениями его координат. Но, скорее всего, для получения правильных ответов в последних пунктах этого будет недостаточно. Потребуется добавить к эксперименту аналитические рассуждения. Им посвящён следующий раздел. Прежде чем к нему перейти, сделаем важное замечание.

Замечание. В традиционном школьном курсе понятие базиса практически не обсуждается. Координаты вектора изначально привязаны к прямоугольной системе координат и вводятся как формальные числовые характеристики («разность координат конца и на-



...на прямой, проходящей через концы базисных векторов...

чала вектора). Предложенные в этом разделе упражнения позволят сделать понятие координат вектора более наглядным, отталкиваясь от прозрачного геометрического смысла процедуры разложения по базису. В рамках этого раздела легко проводится аналогия между координатами вектора (при специальном выборе базисных векторов) и прямоугольными координатами точек на плоскости. Осознание такой связи поможет показать родство тем «аналитическая геометрия на плоскости» и «векторы». Становится возможным разговор не только о прямоугольных, но и о косоугольных координатах на плоскости.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА: ПРЯМАЯ КАК ГМТ

Напомним ещё раз, что все рассматриваемые векторы начинаются в одной и той же точке. Работая с интерактивным чертежом 2, в упражнении 5f мы эмпирически открыли следующий факт: сумма коэффициентов α и β в линейной комбинации равна 1 в точности для точек, лежащих на прямой XY, то есть на прямой, проходящей через концы базисных векторов[1]. Эта теорема нам особенно важна для дальнейшего, поэтому обсудим её подробно. Поскольку $\alpha + \beta = 1$, будем записывать разложение по базису вектора $\overrightarrow{OM}$ в виде $\overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \overrightarrow{OX} + (1-\alpha) \cdot \overrightarrow{OY}$. Меняя положение точки M на прямой XY (см. интерактивный чертёж 3 (рис. 4)), можем проследить за изменением координат вектора $\overrightarrow{OM}$.

Отметим, что модуль коэффициента α равен доле, которую составляет расстояние MY от длины отрезка XY. Сравнение значения α с нулём и единицей позволяет определить положение точки M относительно точек X и Y. Чтобы связать значение числа α с положением точки M на прямой XY, полезно выполнить (причём не по одному разу!) следующие упражнения.

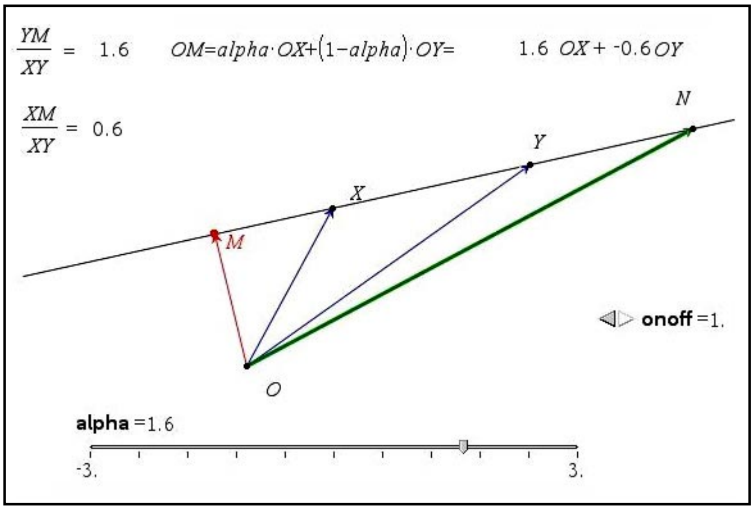


Рис. 4

Упражнения:

1. При помощи кнопки «on-off» спрячем вектор $\overrightarrow{OM}$. Зададим значение α. Поместим точку N в соответствии с выбранным значением α. Чтобы проверить себя, возвратим на чертёж скрытый вектор $\overrightarrow{OM}$ и сравним его с вектором $\overrightarrow{ON}$.

2. Спрячем вектор $\overrightarrow{OM}$. Выберем на прямой XY точку N, попытаемся сообразить, при каком значении числа α она получается. Уста-

---

[1] Доказательство этого фундаментального факта тривиально: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{YM} = \overrightarrow{OY} + \alpha \cdot \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{OY} + \alpha \cdot (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY}) = \alpha \cdot \overrightarrow{OX} + (1-\alpha) \cdot \overrightarrow{OY}$. Свойства числа α следуют из его определения: $\overrightarrow{YM} = \alpha \cdot \overrightarrow{YX}$.

навливаем нужное значение α, проверяем свой ответ, возвращая на чертёж спрятанную точку M.

3. Спрячем вектор $\overrightarrow{OM}$. Меняя число α, задаём отношение отрезков. Находим все (!) возможные положения точки M. Важно, что таких положений получается два[1].

4. Находим ГМТ:

a. $\alpha > 1,\ \alpha < 1,\ \alpha = 1.$

b. $\alpha < 0,\ \alpha > 0,\ \alpha = 0.$

c. $\alpha \in [-1; 0]$.

d. $\alpha > 2,\ \alpha < 2.$

«Играть» с этим чертежом нужно до тех пор, пока не закрепятся связи: «меняется альфа – двигается точка на прямой», «разные альфа – разные точки на прямой», «все возможные альфа – все точки прямой». Придумыванием упражнений и правил игры можно заниматься вместе со школьниками достаточно долго и осмысленно.

ТЕХНИКА РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАДИУС-ВЕКТОРОВ

Разложение по базису единственно для данного вектора. Поэтому если мы имеем два разных разложения вектора по одному и тому же базису $\{\vec{x}; \vec{y}\}$, то коэффициенты этих разложений соответственно совпадают. То есть равенство

$$\alpha_1 \cdot \vec{x} + \beta_1 \cdot \vec{y} = \alpha_2 \cdot \vec{x} + \beta_2 \cdot \vec{y}$$

равносильно системе $\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$. Ниже мы покажем, как этот технический приём помогает решать ряд геометрических задач.

Техника радиус-векторов удобна для решения задач, связанных с вычислением отношений отрезков, решения вопроса о совпадении-несовпадении точек, о принадлежности точек одной прямой. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Отношение отрезков. Медианы треугольника

Найдём, в каком отношении делят друг друга при пересечении медианы треугольника (интерактивный чертёж 4 (рис. 5)).

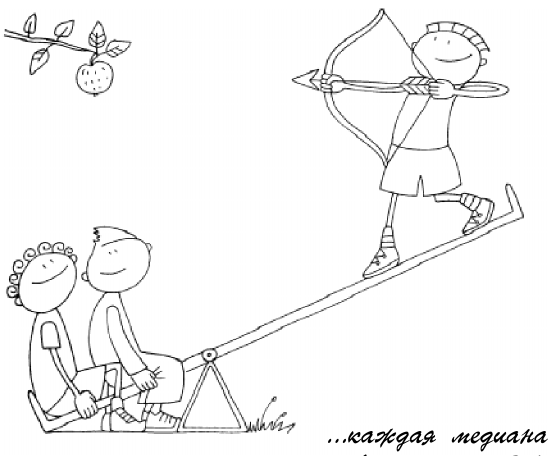
Рассматриваем треугольник OXY, начало отсчёта – точка O, базисные векторы – $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$. Середине отрезка XY соответствует вектор $\dfrac{\vec{x}+\vec{y}}{2}$, середине отрезка OY – вектор $\dfrac{\vec{y}}{2}$. Положение точки N на медиане, исходящей из вершины X, задаётся выражением

$$\overrightarrow{ON} = \alpha \cdot \vec{x} + (1-\alpha) \cdot \frac{\vec{y}}{2} = \alpha \cdot \vec{x} + \frac{1-\alpha}{2} \cdot \vec{y}.$$

Положение точки M на медиане, исходящей из вершины O, задаётся выражением

$$\overrightarrow{OM} = \beta \cdot \frac{\vec{x}+\vec{y}}{2} = \frac{\beta}{2} \cdot \vec{x} + \frac{\beta}{2} \cdot \vec{y}.$$

При изменении параметров α и β изменяются положения точек M и N – эти точки перемещаются по медианам. Выясним, при каком значении α и β точки M и N совпадут. Это можно сделать экспериментально при помощи интерактивного чертежа, а можно аналитически,



...каждая медиана разделена в отношении 2:1, считая от вершины...

[1] Идея «внешнего» деления отрезка в данном отношении весьма нестандартна даже для специализированной школы. При решении многих геометрических задач второй случай, связанный с «внешним» или, напротив, «внутренним» расположением объектов часто ускользает от внимания. Даже в задаче ЕГЭ С4 обычно присутствуют два случая, один из которых привычен, а второй связан с неожиданным расположением фигур. Решение задач при помощи векторов или координат позволяет получить решение сразу для двух случаев.

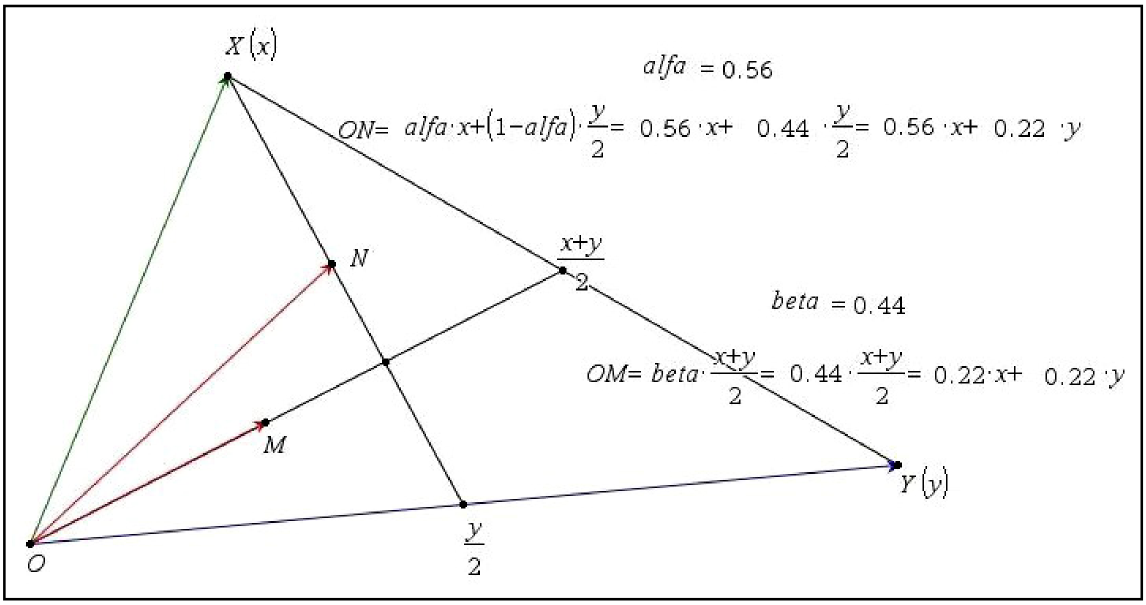


Рис. 5

составив равенство $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}$ и решив получившуюся из него систему уравнений:

$$\alpha\cdot\vec{x}+\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\vec{y}=\frac{\beta}{2}\cdot\vec{x}+\frac{\beta}{2}\cdot\vec{y}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{\beta}{2}\\ \dfrac{1-\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{3}\\ \beta=\dfrac{2}{3}\end{cases}.$$

Поскольку найденные коэффициенты характеризуют отношения, в котором точки M и N делят медианы, то задача решена: в тот момент, когда точки совпали, каждая медиана разделена в отношении 2:1, считая от вершины.

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\beta}{2}\\ \dfrac{1-\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{2}\end{cases}\qquad\left\{\alpha=\frac{\beta}{2},\frac{-(\alpha-1)}{2}=\frac{\beta}{2}\right\}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}\alpha=\dfrac{\beta}{2}\\ \dfrac{1-\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{2}\end{cases},\alpha,\beta\right)\qquad\alpha=\frac{1}{3}\ \text{and}\ \beta=\frac{2}{3}$$

Рис. 6

В данном случае получившаяся система несложная, её легко можно решить в тетрадке или даже «в уме». Но отметим, что выполнение этой технической деятельности можно предоставить программе (рис. 6).

Пример 2. Отношение отрезков. Две чевианы[1]

Теорема про медианы треугольника является частным случаем более общей задачи. Зададим положение двух точек на двух сторонах треугольника. Научимся искать отношение, в котором делят друг друга отрезки, соединяющие вершины треугольника с этими точками.

Обозначим наш треугольник OXY, введём базисные векторы $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$. Положение точек P и Q на сторонах XY и OY треугольника задается отношениями $m1$:$n1$ и $m2$:$n2$ соответственно (при $m1$:$n1$ = $m2$:$n2$ =1 получаем задачу про медианы). Найдём, в каком отношении делят друг друга отрезки XQ и OP (интерактивный чертёж 5 (рис. 7)).

Сравнивая интерактивные чертежи 4 и 5, замечаем, что отличия – только в числах, характеризующих положение точек на сторонах треугольника. Соответственно и

[1] Чевиана – отрезок, соединяющий вершины треугольника с точкой на противоположной стороне или ее продолжении.

решение отличается незначительно. Зададим требуемое положение точек на сторонах треугольника при помощи слайдеров. Запишем выражение для векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$, а затем, введя коэффициенты α и β, – для векторов $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$. Как и в предыдущей задаче, запишем условие совпадения точек M и N:

$$\alpha\cdot\overrightarrow{OX}+\cdot\frac{(1-\alpha)m2}{m2+n2}\cdot\overrightarrow{OY}=$$

$$=\frac{\beta\cdot m1}{m1+n1}\cdot\overrightarrow{OY}+\frac{\beta\cdot n1}{m1+n1}\cdot\overrightarrow{OX}.$$

Перейдём к системе уравнений:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{\beta\cdot n1}{m1+n1}\\[2mm] \dfrac{(1-\alpha)\cdot m2}{m2+n2}=\dfrac{\beta\cdot m1}{m1+n1}\end{cases}.$$

Теперь эта система существенно более громоздка, чем в задаче про медианы. Поэтому, чтобы не отвлекаться от геометрического смысла происходящего, можем все эти выкладки производить сразу же в калькуляторном окне (см. правую половину чертежа). По найденным значениям заключаем, что точка пересечения делит отрезок XQ в отношении $13:9$, а отрезок XP в отношении $6:5$ при $m1=1, n1=3, m2=3, n2=10$.

Нужно опасаться слепой веры в результаты, полученные при помощи вычислительной программы. Очень важно уметь контролировать правильность вычислений. Например, решив систему для конкретных положений точки, проверим полученный ответ непосредственным измерением отрезков на чертеже и вычислением искомых отношений – интерактивный чертёж позволяет провести эти измерения и вычисления. Или проведём проверку так: выполним вычисления в буквенном виде и, получив ответ в виде выражения с параметрами α и β, убедимся, что при $m1 = n1 = m2 = n2 = 1$ (то есть в случае, когда наши отрезки являются медианами) мы получаем уже известные нам из предыдущей задачи значения параметров.

Пример 3. Совпадение точек. Центр параллелограмма Вариньона

Докажем, что середины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника, и середина отрезка, соединяющего середины его диагоналей, совпадают. Обратимся к интерактивному чертежу 6 (рис. 8). Для начала, найдя на чертеже требуемые точки, можем убедиться в том, что теорема верна вне зависимости от вида четырёхугольника. Чертёж позволяет сделать четырёхугольник невыпуклым или даже самопересекающимся.

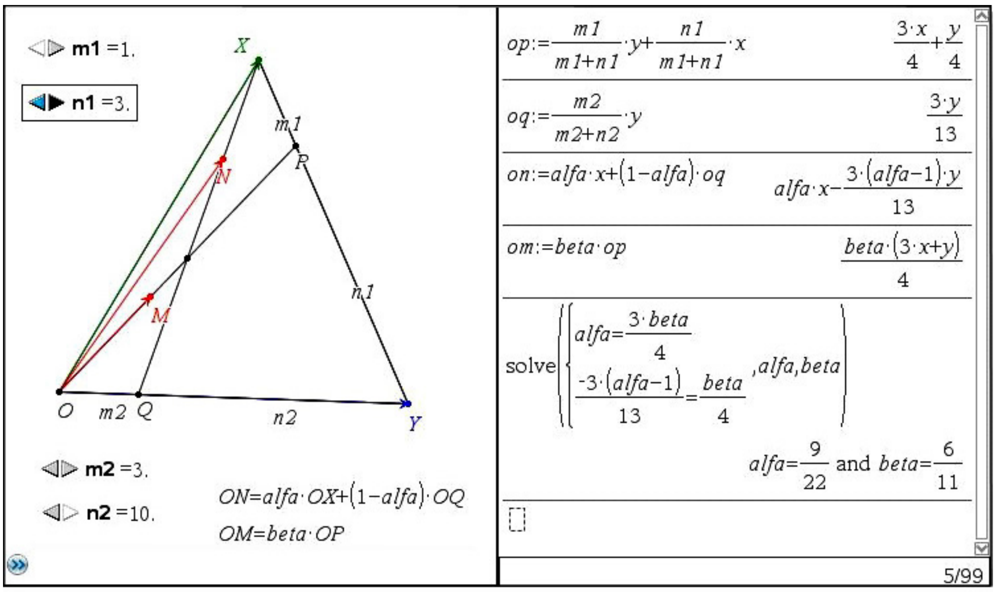


Рис. 7

Теперь докажем утверждение. Пусть наш четырёхугольник – $OBCD$, N, M, P, Q середины его сторон. Поместим начало отсчёта в точку O и введём базисные векторы $\overrightarrow{OB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{y}$. Тогда точка C может быть записана в виде $\overrightarrow{OC}=\alpha\cdot\vec{x}+\cdot\beta\cdot\vec{y}$. Отметим сразу, что никаких условий на числа α и β мы здесь не накладываем, поскольку точка C – четвёртая вершина четырёхугольника – абсолютно произвольная точка плоскости.

Найдём последовательно векторы, проведённые в середины сторон и середины диагоналей нашего четырёхугольника, – вычисления приведены в калькуляторном окне интерактивного чертежа 6 (рис. 8). Затем найдём векторы, проведённые в середины отрезков TS, QN, PM – векторы OU, $OV1$, $OV2$ – нетрудно заметить, что они совпадают. Задача решена.

Пример 4. Точки на одной прямой. Теорема Менелая

В заключение обсудим, как при помощи векторов можно доказать теорему Менелая. Эта теорема содержит необходимое и достаточное условие того, что три точки, лежащие на сторонах треугольника или их продолжениях, окажутся на одной прямой. Воспользуемся интерактивным чертежом 7 (рис. 9).

Путём нехитрых экспериментов можно убедиться, что либо ровно одна, либо все три точки должны лежать на продолжениях сторон. Введём базисные вектора, зададим положение точек на сторонах треугольника через отношения, в котором они делят эти стороны. Логичность именно такого способа определения положения точки следует из всего выше изложенного, в частности, из раздела «Основная теорема. Прямая как ГМТ». Как теперь задать положение точки на продолжении стороны? Точно так же – через отношение расстояний точки до соответствующих вершин треугольника. Для единообразия обозначений договоримся, что указывать отношения будем в одном порядке для всех трёх прямых, обходя треугольник по (как на нашем чертеже) или против часовой стрелки. Выпишем нужные отношения на чертеже и посчитаем их. Чтобы проверить, лежат ли наши три точки на одной прямой, проведем прямую через две из них (в нашем случае – через C_1, B_1). Теперь, эк-

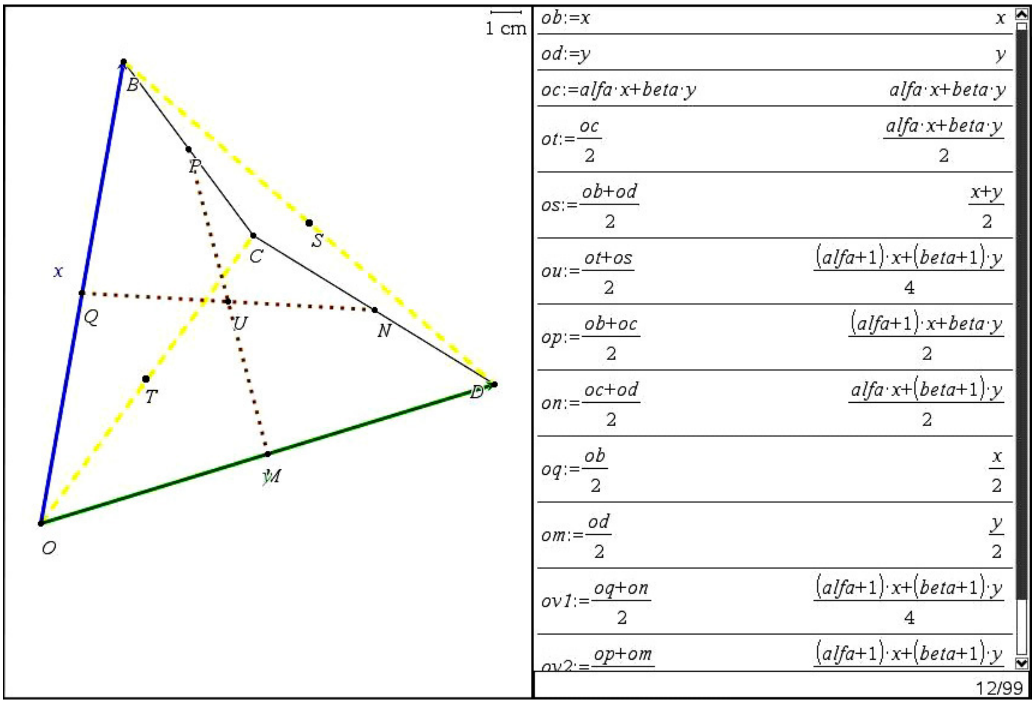


Рис. 8

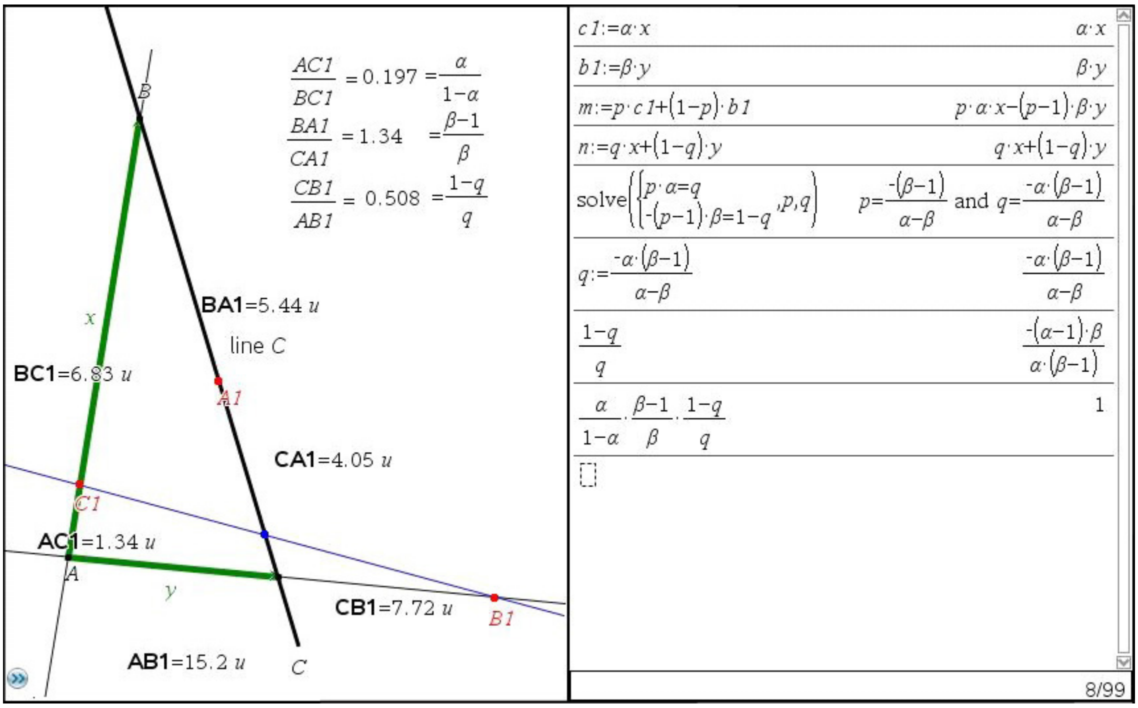


Рис. 9

спериментируя с чертежом, можем угадать искомую закономерность: произведение трёх отношений равно единице. Для доказательства найдём, в каком отношении прямая C_1B_1 делит сторону CB треугольника. Точка пересечения прямых C_1B_1 и CB находится так же, как и в ранее разобранных задачах. Расчёты эти для нас теперь уже совершенно стандартны, нет ни малейшего смысла проделывать их на листочке, все они приведены в калькуляторном окне. Найденный коэффициент q показывает «правильное» положение точки A_1 для заданных точек C_1, B_1. Теперь хорошо видно, что произведение равно единице. Приятно, что векторный способ доказательства обеспечивает сразу необходимость и достаточность сформулированного утверждения.

Ягунова Екатерина Борисовна,
кандидат биологических наук, доцент биолого-почвенного факультета СПбГУ; преподаватель математики Академического университета (лицей ФТШ).