Иванов Сергей Георгиевич

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ АВТОМАТЫ

В этом номере вы познакомитесь с задачей «Возведение в степень», которая предлагалась участникам конкурса КИО-2006 на первом уровне. Задачу можно рассматривать как головоломку, которую можно решать с помощью карандаша и бумаги, но интереснее использовать лабораторию, которая размещена на дисковом приложении к журналу.

Возведение в степень: *«Имеется конструктор с двумя видами автоматов. Автоматы первого вида умножают входное выражение на A, а автоматы второго вида – возводят его в квадрат. Число автоматов каждого вида не ограничено. Их можно перетягивать мышкой на рабочее поле и расставлять в удобном порядке. У каждого автомата слева имеется вход, а справа – выход. Перетягиванием мышкой можно соединять вход одного автомата с выходом другого.*

Ваша задача – создать из автоматов цепочку, которая возводит A в 89 степень.

Не забудьте соединить начало цепочки со входом схемы на левой границе рабочего поля, а конец – с ее выходом на правой границе.

Проверить результат можно, нажав соответствующую кнопку. Вашим рекордом считается наименьшее число автоматов, с помощью которых Вы получили заданную степень. Улучшение рекорда – уменьшение числа автоматов в цепи».

Задача 1. Какое наименьшее количество автоматов нужно разместить на рабочем поле, чтобы получить степень не менее 7?

Задача 2. Какое наименьшее количество автоматов нужно разместить на рабочем поле, чтобы получить степень не менее 89?

Задача 3. Сколькими способами можно получить степень 15?

Задача 4. Сколькими способами можно получить степень 15 при условии, что среди автоматов есть ровно два автомата возведения в квадрат?

Задача 5. Сколькими способами с помощью тех же автоматов можно получить степень 15, при условии, что среди автоматов не больше двух автоматов возведения в квадрат?

Задача 6. Какое наименьшее количество автоматов, среди которых ровно два автомата возведения в квадрат, нужно разместить на рабочем поле, чтобы получить степень 5?

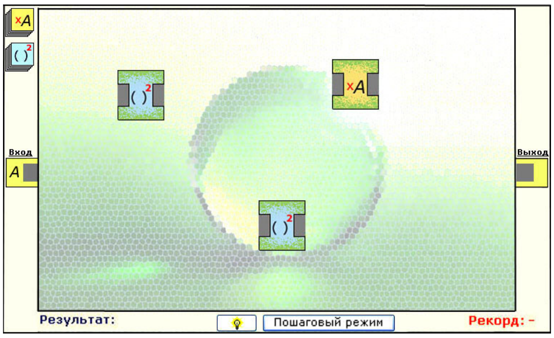


Рис. 1

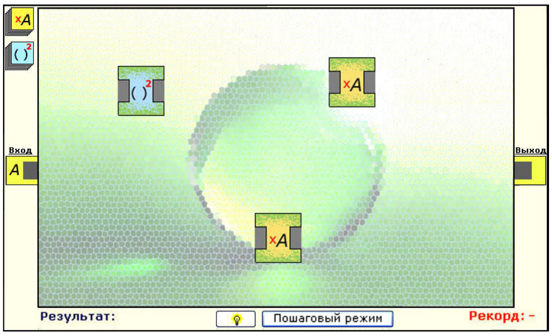


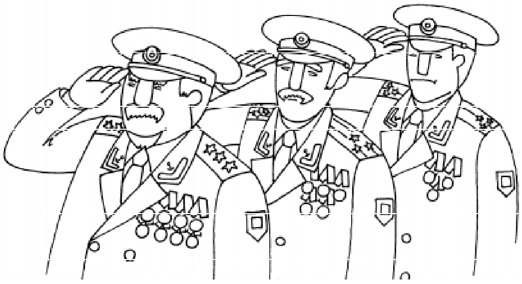
Рис. 2

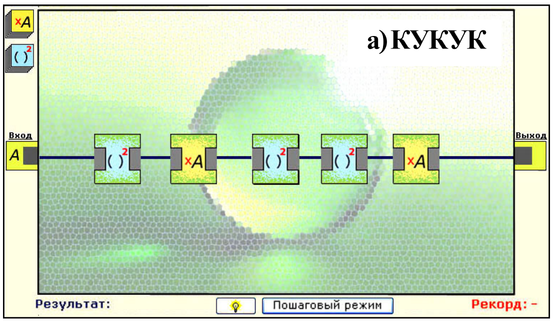
Задача 7. На рис. 1 представлены три автомата (два возведения в квадрат и одно умножение). Какие степени получатся при различном соединении этих автоматов?

Задача 8. На рис. 2 представлены три автомата (один автомат возведения в квадрат и два автомата умножения). Какие степени можно получить при различном соединении всех трех автоматов?

Задача 9. Сколько результатов в предыдущих двух задачах совпадают?

Задача 10. Среди схем на рис. 3 найдите две, которые дают одинаковый результат.





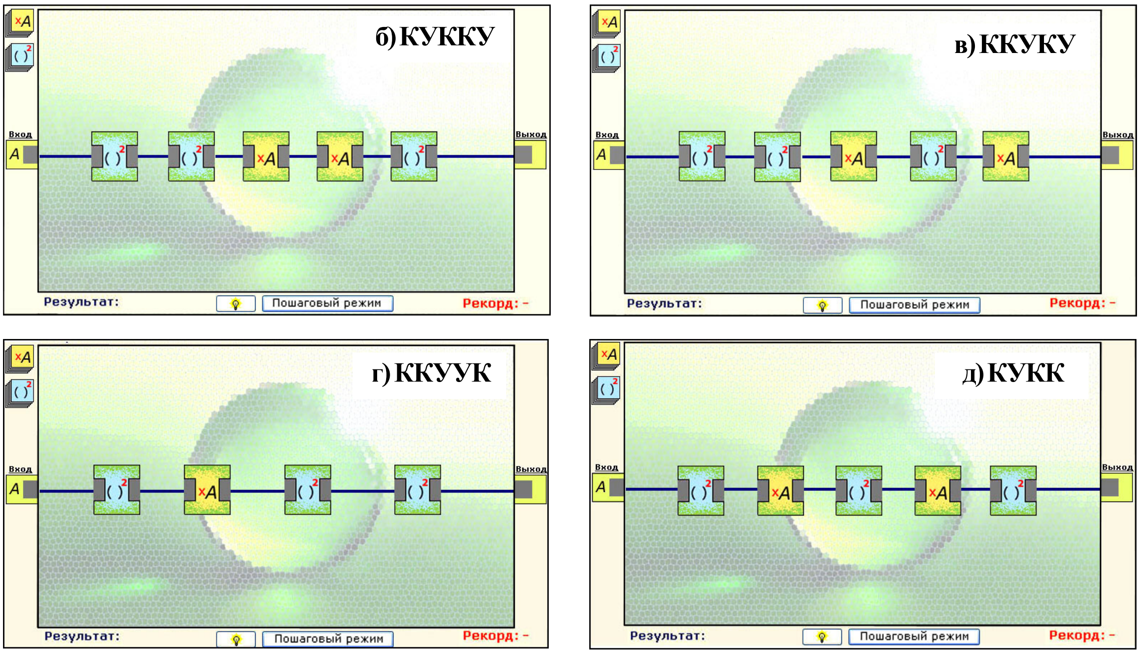
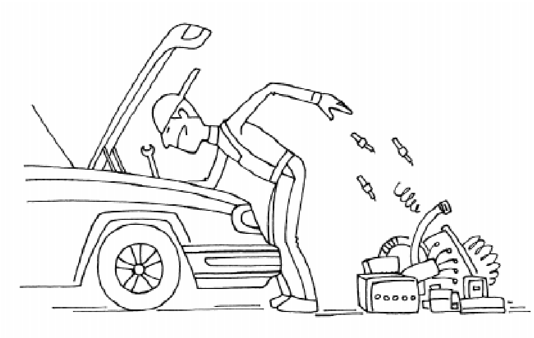


Рис. 3

Задача 11. Сократите схему на рис. 4, убрав несколько автоматов подряд и добавив один в конце, так чтобы результат не изменился.



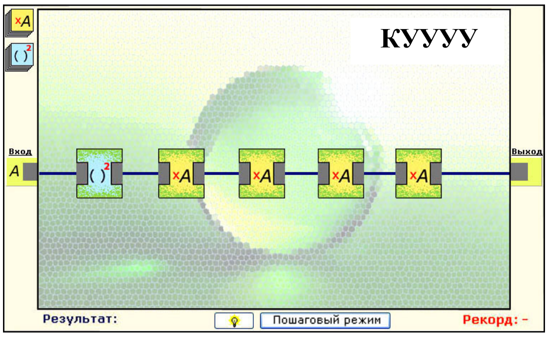
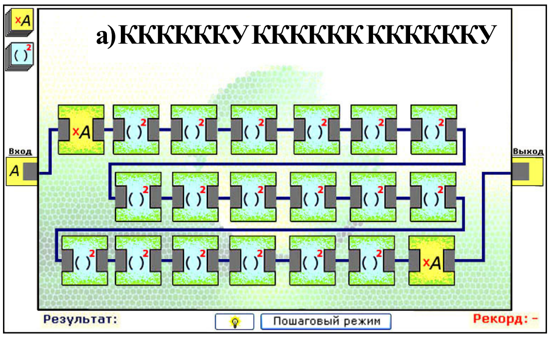


Рис. 4.

Задача 12. Какая из двух схем на рис. 5, в которых восемнадцать возведений в степень и два умножения, даст больший результат? Постарайтесь дать ответ, не подсчитывая степень полностью.



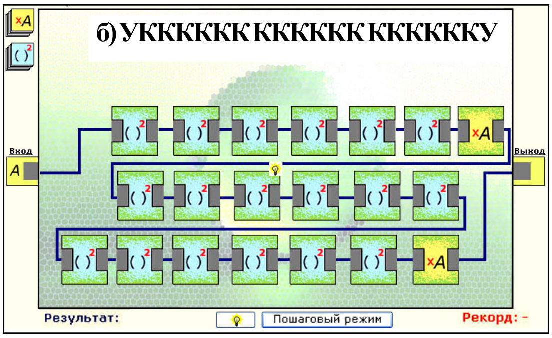


Рис. 5

Задача 13. Можно ли схему на рис. 6 перестановкой элементов преобразовать в такую, которая уменьшает степень, в которую возводится число A, более чем на 12?

Задача 14. Можно ли схему на рис. 7 перестановкой элементов преобразовать в такую, которая уменьшает степень не менее чем на 20?

Задача 15. Можно ли конструкцию на рисунке 8 перестановкой автоматов преобразовать в такую, которая увеличивает степень ровно на 1?

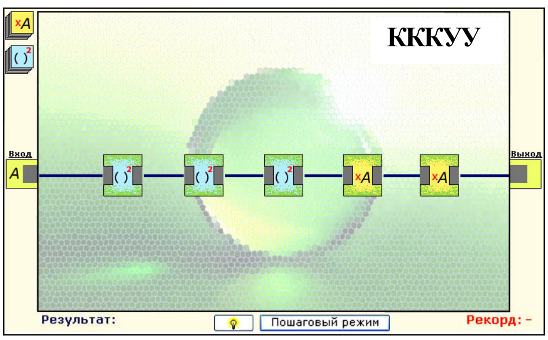


Рис. 6

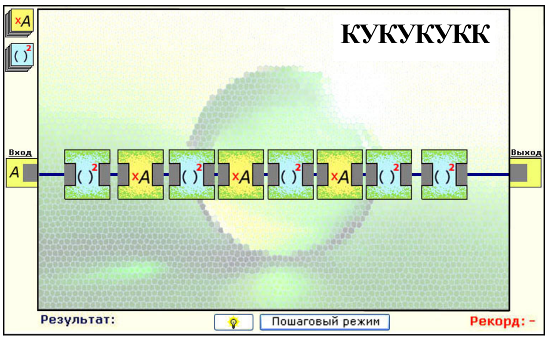


Рис. 7

Указание

Предложенная в конкурсе задача может быть решена с помощью так называемого быстрого алгоритма возведения в степень.

Алгоритм работает так:

Показатель степени представляется в двоичной записи, например $(89)_{10} = (1011001)_2$.

Протокол алгоритма быстрого возведения в степень можно представить таблицей:

В первый ряд таблицы помещается двоичная запись показателя степени, в которую надо возвести А. В первую клетку второго ряда записывается число А. В каждую сле-

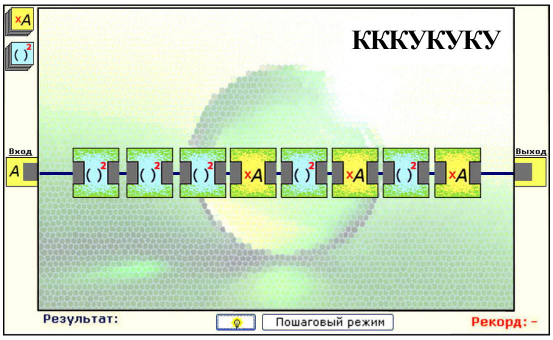


Рис. 8

1	0	1	1	0	0	1
A	A^2	$(A^2)^2A = A^5$	$(A^5)^2A = A^{11}$	$(A^{11})^2 = A^{22}$	$(A^{22})^2 = A^{44}$	$(A^{44})^2A = A^{89}$

дующую клетку второго ряда записывается

1) квадрат числа, находящегося в клетке левее его, если в клетке выше стоит 0,

2) квадрат этого числа, умноженный на A, если в клетке выше стоит 1.

Для доказательства рассмотрим два случая: чётную и нечётную степень числа A.

Если степень чётная, то её можно получить возведением в квадрат степени, вдвое меньшей. Если же степень нечетная, то можно выделить множитель A и свести задачу к предыдущей.

Иванов Сергей Георгиевич,
кандидат педагогических наук,
ассистент кафедры ВМ-2
СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ

Задача 1. 3 значка (см. обложку)

Задача 2. 7 значков (см. обложку)

Задача 3. 25.

Задача 4. Между двух квадратов может располагаться разное количество умножений. Рассмотрим все варианты.

Если два квадрата расположены рядом:
КК(11У) (то есть два квадрата и 11 умножений)
УКК(7У)
УУККУУУ

Три умножения перед двумя квадратами поставить уже нельзя, поскольку получится степень 16.

Если между двумя квадратами одно умножение, то возможны такие варианты:
КУК(6У)
УКУКУУУ
УУКУКУ

Если между квадратами два умножения:
КУУК(7У)
УКУУКУУУ

Если между квадратами три умножения:
КУУУК(5У)
УКУУУКУ

Если между квадратами четыре умножения:
КУУУУКУУУ

Если между квадратами пять умножений:
КУУУУУКУ

Шесть умножений между квадратами уже не поставить.

Ответ: 12.

Задача 5. 20.

Задача 6. Три значка (см. обложку)

Примечание: это количество является не только минимальным, но и единственно возможным.

Задача 7.
УУК степень 6,
УКУ степень 5,
КУУ степень 4.

Задача 8.
УУК степень 6,
УКУ степень 5,
КУУ степень 4.

Задача 9. Совпадают две степени – 5 и 6.

Задача 10. Одинаковую степень дают схемы *г)* и *д)*, степень равна 12.

Задача 11. (см. обложку)

Задача 12. В схеме *б)* степень больше.

Задача 13. Нельзя, поскольку степень, в которую возводится число на схеме, равна 10.

Задача 14. Можно (см. обложку). При начальном расположении элементов число возводится в степень 60, а при перестановке, когда все умножения в конце, – в степень 35.

Задача 15. Можно (см. обложку). В первоначальной конструкции степень равна 39. После перестановки в порядке, изображённом ниже, степень будет равна 40.