

*Гуровиц Владимир Михайлович
Кротков Павел Андреевич
Станкевич Андрей Сергеевич
Ульянцев Владимир Игоревич*

ЗАДАЧА «КОСМИЧЕСКИЙ КЕГЕЛЬБАН»

Этой статьей мы продолжаем цикл публикаций олимпиадных задач для школьников по информатике. Решение таких задач и изучение разборов поможет Вам повысить уровень практических навыков программирования и подготовиться к олимпиадам по информатике.

В этой статье рассматривается задача «Космический кегельбан», которая предлагалась на региональном этапе Всероссийской олимпиады школьников по информатике в 2011/2012 учебном году. Материалы этой олимпиады можно найти на сайте <http://neerc.ifmo.ru/school/spb/>.

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим игру «Космический кегельбан», поле для которой представляет собой бесконечную плоскость, на которой расставлены кегли. Каждая кегля представляет собой высокий цилиндр с основанием в виде круга радиусом r метров. Все кегли одинаковые и расставлены по следующим правилам. Кегли образуют n рядов, в первом ряду стоит одна кегля, во втором – две и так далее. В последнем ряду стоит n кеглей.

Введем на плоскости систему координат с единицей измерения, равной одному километру. Центр единственной кегли в пер-

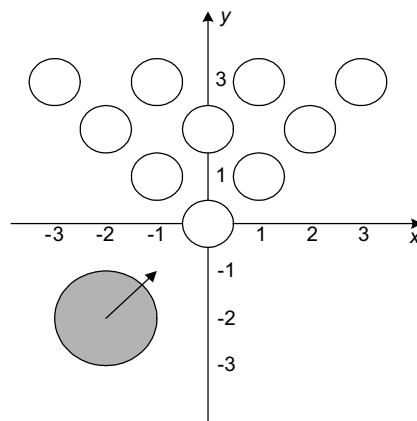
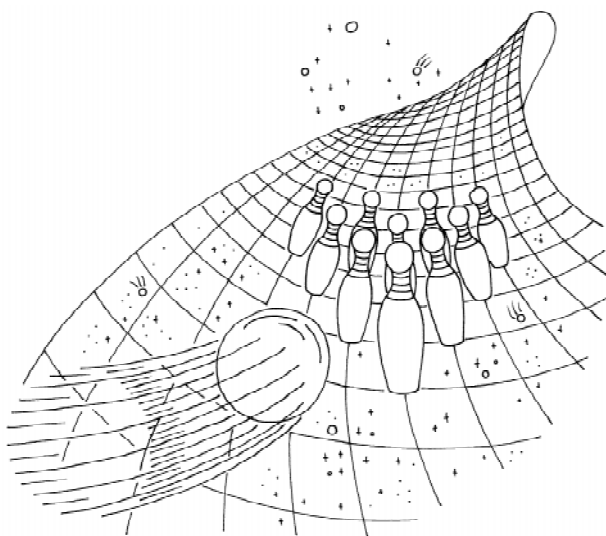


Рис. 1

вом ряду находится в точке $(0, 0)$, во втором ряду центры кегель находятся в точках $(-1, 1)$ и $(1, 1)$ и так далее. Так, центры кеглей в i -м ряду находятся в точках с координатами $(- (i - 1), i - 1)$, $(- (i - 3), i - 1)$, ..., $(i - 1, i - 1)$.

В игре используется шар радиуса q метров. Игрок выбирает начальное положение центра шара (x_c, y_c) и вектор направления движения шара (v_x, v_y) . После этого шар помещается в начальную точку и двигается, не останавливаясь, в направлении вектора (v_x, v_y) . Считается, что шар сбил кеглю, если в процессе движения шара имеет место ситуация, когда у шара и кегли есть общая точка. Сбитые кегли не меняют направления движения шара и не сбивают соседние кегли при падении.

На рис. 1 приведен пример расположения кеглей и шара при $r = 500$, $n = 4$, $q = 1000$, $x_c = -2$, $y_c = -2$, $v_x = 1$, $v_y = 1$.

Требуется написать программу, которая по заданным радиусу кегли r , количеству рядов кеглей n , радиусу шара q , его начальному положению (x_c, y_c) и вектору направления движения (v_x, v_y) определяет количество кеглей, сбитых шаром.

Формат входного файла

Первая строка входного файла содержит два целых числа: r и n , разделенных ровно одним пробелом ($1 \leq r \leq 700$, $1 \leq n \leq 200000$) – радиус одной кегли в метрах и количество рядов кегель, соответственно.

Вторая строка входного файла содержит целое число q ($1 \leq q \leq 10^9$) – радиус шара в метрах.

Третья строка входного файла содержит два целых числа x_c и y_c , разделенных ровно одним пробелом ($10^{-6} \leq x_c \leq 10^6$, $10^{-6} \leq y_c \leq 1000 \times y_c < - (r + q)$) – координаты центра шара в километрах.

Четвертая строка входного файла содержит два целых числа v_x и v_y , разделенных ровно одним пробелом ($10^{-6} \leq v_x \leq 10^6$, $0 \leq v_y \leq 10^6$) – координаты вектора скорости шара в километрах.

Формат выходного файла

Выходной файл должен содержать одно целое число – количество сбитых кеглей.

Примеры входных и выходных данных

spacepin.in	spacepin.out
500 4	7
1000	
-2 -2	
1 1	

Пояснение к примеру. На рис. 2 изображено, какие кегли будут сбиты (такие кегли обозначены значком «X»).

РАЗБОР ЗАДАЧИ

Переформулируем задачу на геометрическом языке. Дано несколько кругов радиуса r (кегли) и полоса ширины $2q$ (траектория шара). Требуется подсчитать, сколько окружностей имеют хотя бы одну общую точку с полосой.

Заменим окружности на точки, а полосу ширины $2q$ на полосу ширины $2(q + r)$. Тогда задача сведется к эквивалентной: сколько точек (центров кеглей) лежат в расширенной полосе, то есть находятся на расстоянии не более $(q + r)$ от прямой, по которой движется центр шара. Заметим, что, поскольку по условию задачи каждая точка шара лежит изначально ниже любой точки каждой кегли, можно рассматривать не часть полосы выше шара, а всю полосу: на ответ это не повлияет.

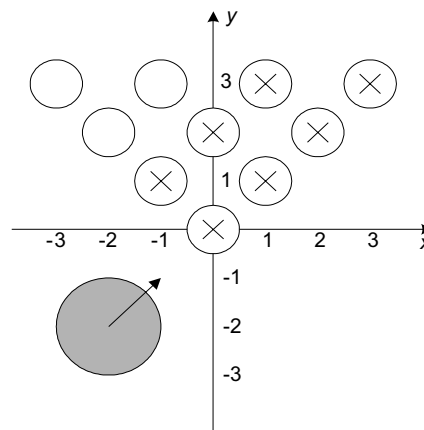


Рис.2

Листинг 1. Фрагмент решения, рассматривающего каждую кеглю

```

answer := 0;
len := sqrt(vx * vx + vy * vy);
for yp := 0 to (n - 1) do begin
  xp := -yp;
  while (xp <= yp) do begin
    vec_mul = (xp - xc) * vy - (yp - yc) * vx;
    if abs(vec_mul) / len < q + r then
      answer := answer + 1;
    xp := xp + 2;
  end;
end;
end;

```

Запишем неравенством условие принадлежности точки полосе. Обозначим точкой S начальное положение центра шара, вектором CB его скорость (v_x, v_y) , а точкой P – центр некоторой кегли.

Тогда расстояние от точки P до прямой CB равно

$$dist(P, CB) = \frac{|[CP, CB]|}{|CB|},$$

где квадратными скобками обозначено псевдоскалярное произведение векторов [1], а условие принадлежности точки полосе запишется так:

$$\frac{|[CP, CB]|}{|CB|} \leq q + r.$$

Проверим отдельно принадлежность центра $P(x_p, y_p)$ некоторой кегли нашей полосе. Для этого запишем полученное выше неравенство в координатах:

$$\frac{|(x_p - x_c)v_y - (y_p - y_c)v_x|}{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}} \leq q + r.$$

Теперь можно перебрать все кегли и для каждой проверить, выполняется ли это неравенство. Приведем фрагмент решения на языке Pascal, выполняющий эту проверку (см. листинг 1).

Асимптотическое время работы такого решения равно $O(n^2)$, так как всего кегель $\frac{n(n+1)}{2}$. Такое решение не укладывается в ограничения по времени работы пер-

сонального компьютера при указанном ограничении на n .

Приведем решение с меньшим асимптотическим временем работы. Заметим, что для каждого горизонтального ряда кеглей достаточно найти самую левую и самую правую кеглю, которые собьет шар. Для этого решим неравенство

$$((x_p - x_c)v_y - (y_p - y_c)v_x)^2 \leq (v_x^2 + v_y^2)(q + r)$$

относительно x_p для каждого значения y_p – ординаты рассматриваемого ряда кегель. Данное неравенство является квадратичным, и его решением является отрезок с концами

$$l = k(y_p - y) - c + x, \quad r = k(y_p - y) + c + x,$$

$$\text{где } k = \frac{v_x}{v_y}, \quad c = \frac{(q + r)\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_y}.$$

Теперь нам необходимо найти абсциссы центров самой левой и самой правой кегли, находящихся внутри этого отрезка, – *left* и *right*. Способ вычисления этих значений приведен в листинге 2. Теперь количество сбитых кегель в горизонтальном ряду равно

$$\max\left(\frac{right - left}{2} + 1, 0\right).$$

Взятие максимума необходимо, так как в процессе вычисления и может оказаться, что $right < left$. В этом случае шар не сбивает ни одной кегли в данном ряду.

Приведем соответствующий фрагмент программы на языке Pascal (см. листинг 2).

Листинг 2. Фрагмент корректного решения задачи

```
k := vx / vy;  
c := (q + r) / 1000 * sqrt(vx * vx + vy * vy) / vy;  
for yp := 0 to n - 1 do begin  
  l := k * (yp - y) - c + x;  
  r := k * (yp - y) + c + x;  
  
  left := ceil(l);  
  right := floor(r);  
  
  if (abs(left) mod 2 <> yp mod 2) then  
    inc(left);  
  if (abs(right) mod 2 <> yp mod 2) then  
    dec(right);  
  
  left := max(left, -yp);  
  right := min(right, yp);  
  
  answer := answer + max(0, (right - left) div 2 + 1);  
end;
```

Литература

1. Андреева Е.В., Егоров Ю.Е. Вычислительная геометрия на плоскости / Информатика, 2002. № 39. С. 26–29.

*Гуровиц Владимир Михайлович,
учитель информатики Московской
ФМШ № 2007, методист
Лаборатории дистанционных
технологий работы с одаренными
детьми МИОО, член жюри ВКОШП,*

*Кротков Павел Андреевич,
студент второго курса кафедры
«Компьютерные технологии»
НИУ ИТМО, член жюри Интернет-
олимпиад по информатике,*

*Станкевич Андрей Сергеевич,
кандидат технических наук,
доцент кафедры «Компьютерные
технологии» НИУ ИТМО,
председатель научного комитета
Всероссийской олимпиады
школьников по информатике,
председатель жюри ВКОШП,*

*Ульянцев Владимир Игоревич,
студент пятого курса кафедры
«Компьютерные технологии»
НИУ ИТМО, член жюри Интернет-
олимпиад по информатике,
член жюри ВКОШП.*



Наши авторы, 2011.
Our authors, 2011.