СЦЕНАРИИ УРОКОВ

Поздняков Сергей Николаевич

СТЕРЕОМЕТРИЯ С ПРОГРАММОЙ АВТОГРАФ

ВВЕДЕНИЕ

Поднимая вопрос об использовании компьютерной поддержки стереометрии, необходимо сначала поставить вопрос о целях такого применения.

Наиболее распространенный ответ на этот вопрос – развивать пространственное мышление. Однако в трудах психологов и методистов давно показано, что оптимальный путь к формированию пространственного мышления лежит через уроки труда и черчения [1], хотя преподаватели математики используют эти результаты.

Другим ответом является утверждение о том, что стереометрия ближе к пониманию учеником, чем планиметрия, поскольку она менее абстрактна [2]. Действительно, двумерные предметы вокруг нас не существуют, их можно представить только в абстракции как очень «тонкие» пространственные тела. В такой трактовке предполагается, что эксперименты с трехмерными окружающими нас телами скорее приведут к пониманию связанных с планиметрией понятий.

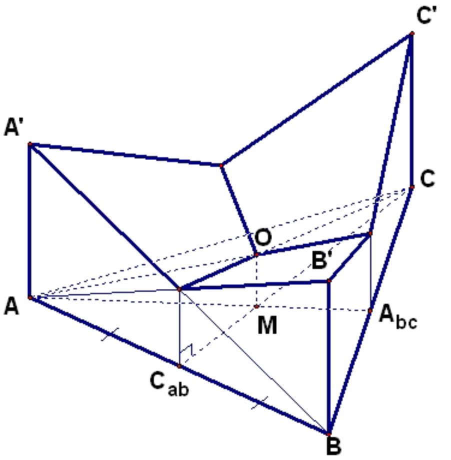


Рис. 1

В качестве обоснования этого довода можно привести простое доказательство того, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Идея этого представленного ниже доказательства основана на решении одной из задач из сборника [3].

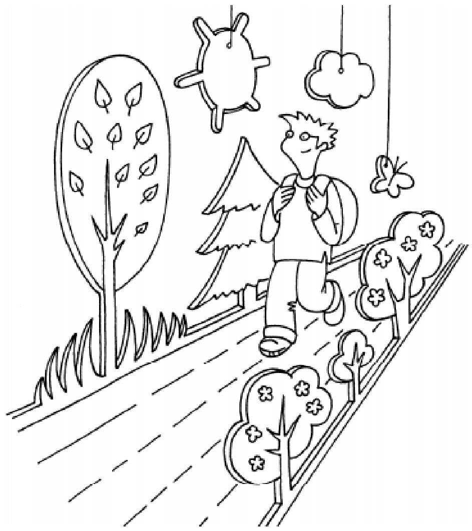
«Стереометрическое» решение задачи о пересечении медиан

Докажем, что три медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке. Для этого восстановим перпендикуляры из вершин треугольника и отложим на них равные отрезки: AA′, BB′, CC′. Используя построенные вне плоскости треугольника точки, построим три пирамиды с основанием ABC. Наклонные грани любых двух из трех пирамид пересекаются по прямой, которая при проецировании на основание дает медиану. Тем самым, проекции пересечений трех наклонных плоскостей дают три медианы, но три плоскости в общем положении пересекаются в одной точке, а значит, и их проекции – медианы – пересекутся в одной точке (рис. 1).

Здесь, основываясь на эмпирическом знании о том, что три плоскости пересекаются в одной точке (однако планиметрические объекты все же появились!), факт пересечения медиан в одной точке становится ОЧЕ_ВИДНЫМ.

Приведенный пример созвучен идее классической книги Макса Вертгеймера «Продуктивное мышление» [4], в которой автор обсуждает особенности передачи учителем СМЫСЛА изучаемого материала приемами изменения представления задачи, с тем чтобы включить в процесс обучения уже имеющиеся представления ученика о предмете изучения.

В данной статье нам хочется обратить внимание на то, что математические идеи существуют в различных формах, усвоение этих идей обязательно связано с преобразованием представлений. Поэтому можно ожидать, что работа, ориентирующая школьников на выполнение мыслительных операций, связанных с преобразованием задач из одной формы представления в другую, или, другими словами, перевода условия с одного математического языка на язык другой, будет способствовать усвоению смысла, который представляет данная задача.



...двумерные предметы вокруг нас не существуют, их можно представить только в абстракции как очень «тонкие» пространственные тела.

МНОГООБРАЗИЕ «ЯЗЫКОВ» МАТЕМАТИКИ – ОСНОВА ЭФФЕКТИВНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СРЕД

Какие математические языки описания математических объектов использует стереометрия?

Во-первых, это язык «синтетической» геометрии, который оперирует геометрическими понятиями, связанными с пространственными объектами, такими как многогранники, тела вращения, точки, прямые, плоскости и пр.

Другим языком является аналитический язык, в котором прямые, плоскости и другие геометрические объекты описываются уравнениями и неравенствами.

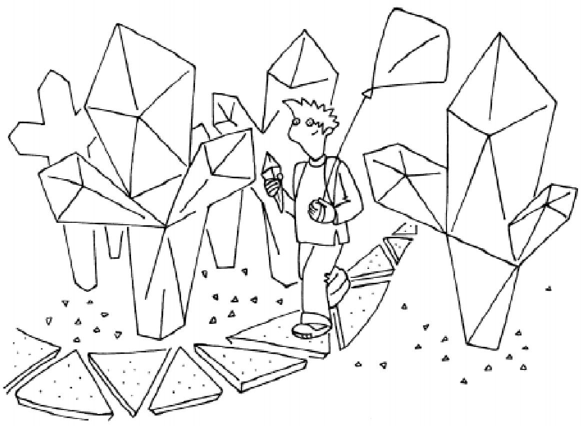
Третьим языком является векторный язык, на котором, например, удобно описывать и показывать связи между взаимоположением прямых и плоскостей в пространстве.

Наконец, важным для геометрии является язык геометрических преобразований.

В традиционном изложении геометрии «инструментами» для работы со стереометрическими понятиями были модели трехмерных тел, иллюстрирующие идеи синтетической геометрии. Работа с уравнениями, векторами или преобразованиями могла быть только теоретической. Поэтому курс стереометрии разбит на несколько частей: иногда это последовательно изучаемые части, иногда один материал проходится на нескольких «витках» (уровнях) обучения. Например, в теме «координатный метод» описываются на аналитическом языке объекты, уже изучавшиеся ранее, однако, благодаря новому языку, их новые свойства формулируются и выводятся иначе.

Особенностью появления на уроках инструментов, подобных программе АВТОГРАФ, является возможность работать с различными представлениями математических объектов практически, а не только теоретически. Так, в программе АВТОГРАФ есть возможность строить поверхности многогранников из элементарных частей (треугольников), поворачивать построенные тела на экране «мышкой», помещать «произвольные» точки на построенные ранее геометрические объекты, строить прямые и плоскости по точкам и находить сечения.

Помещая на экран построенную фигуру, мы автоматически помещаем его в привязанную к экрану систему координат, причем, поворачивая фигуру «мышкой», мы повора-



...есть возможность строить поверхности многогранников из элементарных частей (треугольников).

чиваем вместе с ней и систему координат, поэтому координаты точек и уравнения, описывающие тело, при этом не меняются.

Таким образом, первым упражнением, в котором ученику придется переходить от одного представления к другому, может быть задача «поместить точку в плоскость какой-то грани многогранника или на его сечение». Попытка сделать это непосредственным размещением в плоскости экрана, скорее всего, потерпит неудачу. Возникает проблемная ситуация, которая решается определением координат нужного положения точки. В простейших случаях это можно сделать простым наблюдением, в более сложных потребуется небольшой расчёт, который в учебных целях весьма полезен.

Пример. Построим куб, выбрав команду «ввод фигуры», а в ней шаблон куба. Шаблон задается координатами треугольников, из которых можно составить поверхность куба. По умолчанию строится единичный куб с центром в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям (выберем опцию «линия» вместо опции «заливка», которая стоит по умолчанию, иначе в дальнейшем построения внутри куба не будут видны, даже если сделать грани почти или полностью «прозрачными») (рис. 2). С помощью масштабирования «увеличительное стекло» сделаем размер изображения куба удобным для работы.

Теперь поставим задачу, которая, несмотря на свою простоту, инициирует деятельность учеников по осмыслению работы с системой координат в пространстве: «Постройте на верхней грани куба точку, которая будет находиться около ближайшей к нам вершины на верхней грани».

Перед выполнением задания учитель демонстрирует построение точки на чертеже (с помощью инструмента «Точка» на вертикальной панели) и изменение её координат (для этого нужно выделить точку и выбрать инструмент «Ввод координат») (рис. 3).

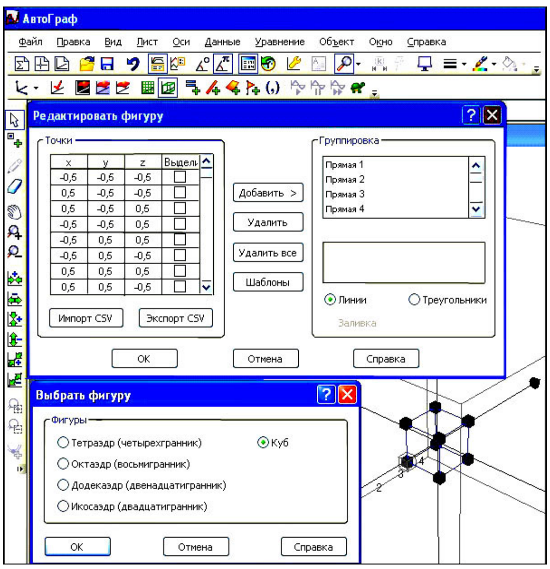


Рис. 2

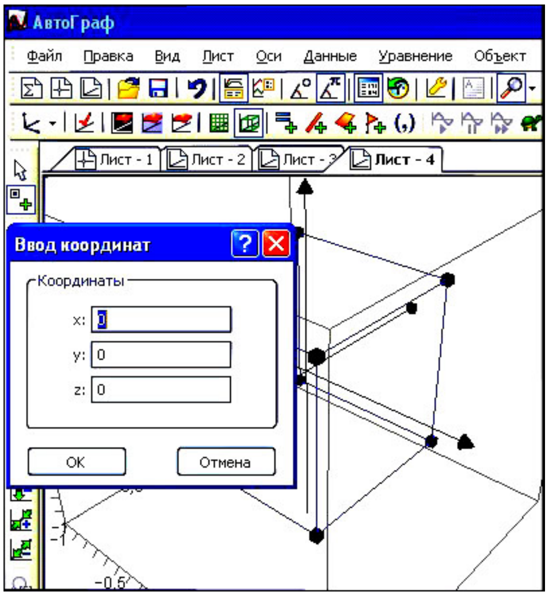


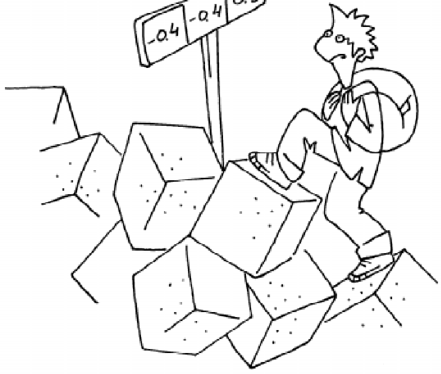
Рис. 3

Первой проблемой, с которой столкнется ученик, будет «осмотр» системы координат на рисунке. Её оси расположены не совсем так, как принято в учебниках (ось ординат направлена не вправо, а от зрителя, а ось абсцисс изображена так, как обычно рисуют ось ординат). Уже эта интеллектуальная операция по «приспособлению» привычных координат к «повернутой» системе является хорошим упражнением. Скорее всего, первая попытка будет неудачной. Но преимущество использования компьютерного инструмента здесь будет в том, что точка немедленно появится на чертеже, и несоответствие будет очевидно. Таким образом, соединение возможности ведения эксперимента с упражнением в немного отличной от стандартной постановке создает необходимую мотивацию для интеллектуальной деятельности, которая по силам каждому ученику, но является не бездумной подстановкой в формулу, чем грешат многие упражнения на уроках математики, а осмыслением связи между координатным и «синтетическим» представлением геометрических объектов.

Другой проблемой, с которой столкнутся ученики, будет «исчезновение строящейся точки», точнее они не увидят результата построения. Причиной этого будет непривычный масштаб. После увеличения построенного кубика, координаты вершин которого не превосходят 1/2, границы выводимой на экран системы координат будут примерно такими же, и, если ученик введет, например, точку с целыми координатами, на экране её можно будет увидеть только после уменьшения масштаба. Осмысление этой проблемы, если она возникнет, будет ещё одним небольшим элементом, из которых постепенно формируется самостоятельное мышление ученика, которого так не хватает современным школьникам.

Наконец, третьей проблемой будет необходимость увязать координаты с расстояниями. Самое простое – поставить точку на диагональ грани, чтобы абсцисса и ордината были равны, а аппликата была равна значению 0,5, что будет соответствовать тому, что точка лежит в верхней грани (ещё один небольшой элемент перевода с «синтетического» языка на координатный язык, способствующий осмыслению задачи). Вспомнив, что система координат повернута «от нас», ученик предположительно введёт координаты (–0,4; –0,4; 0,5) и … увидит, что ошибся! Здесь учителю полезно обратить внимание ученика на то, почему он сделал эту ошибку, что поможет в дальнейшем установлению смысловой связи между преобразованием поворота и его координатным представлением. Надо обратить внимание ученика, что на нас «смотрит» октант, в котором абсцисса положительна, а ордината отрицательна, поскольку система изображена повернутой на 90 градусов. Правильным ответом будет, например, точка с координатами (0,4; –0,4; 0,5).

Мы так подробно разобрали это упражнение, чтобы показать, что учителю не следует подсказывать ученику или объяснять предварительно различные «мелкие моменты», которые при традиционном бумажном решении могли стать преградой для многих учеников класса. Именно из-за обеспечения технологичности своей работы учитель вынужден был «выравнивать» стартовые возможности учеников, по существу наводя их на путь решения по конкретному рецепту. Напротив, использование компьютерных инструментов обеспечивает каждому обратную связь, благодаря которой каждый ученик сможет сам скорректировать «мелкие моменты» в работе с задачей. И именно эта



...ученик предположительно введёт координаты (–0,4; –0,4; 0,5) и ... увидит, что ошибся!

коррекция и будет главным психологическим движителем для осознания учеником сущности решаемой задачи.

Следующее обсуждение будет касаться того, что нужно и можно изучать инструментальные средства, которые на первый взгляд выходят за рамки школьной программы, но на самом деле в другой форме понятны и даже известны школьникам. Такое «расширение» школьной программы не приводит к увеличению объёма изучаемого материала (вообще понятие объема для предмета «математика», по мнению автора, переоценивается, более важным являются внутренние и межпредметные связи изучаемого материала), а ведет к увеличению числа внутрипредметных связей, что означает углубление знаний, повышение их целостности и, как следствие, осмысление материала и формирование потенциала для переноса знаний в новую ситуацию.

КООРДИНАТНОЕ ЗАДАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА ИЗВЕСТНЫЕ ПОНЯТИЯ

Вернемся к проблеме, которая возникла, когда шаблонный кубик оказался слишком маленьким. Однако теперь попробуем сделать из него кубик с большей длиной ребра. Один из путей – изменение координат вершин точек. Поскольку вершин 8, а каждая имеет три координаты, придется ввести 24 числа (на самом деле больше, так как грани куба в программе АВТОГРАФ задаются через треугольники). Нельзя ли сделать это проще?

Ответ ясен: нужно увеличить размер кубика – сделать гомотетию.

Для того чтобы сделать геометрическое преобразование, можно использовать общий для систем динамической геометрии подход – выделить нужные объекты (в данном случае сам куб и центр гомотетии), а потом выполнить команду «гомотетия» (рис. 4). К сожалению, в программе АВТОГРАФ на пути выполнения этой простой последовательности действий встают технические препятствия: сначала нужно построить точку в центре системы координат, чтобы затем указать центр гомотетии, после чего нужно найти положение куба, при котором её можно будет выделить. Превратим этот технический недостаток в методический прием, а именно попробуем задать преобразование по-другому. И в этом система АВТОГРАФ устроена очень органично. Преобразование тоже можно задать в координатах! Но в школе этого как бы не изучают, а в университете изучают в курсе линейной (векторной) алгебры. Однако в школе изучают главные свойства преобразований, например, школьники знают, что при гомотетии с коэффициентом k все длины отрезков преобразуемой фигуры увеличиваются в k раз, а углы не меняются. Нетрудно согласиться, что для всех изучаемых в школе преобразований (которые относятся к классу линейных) по информации о том, как преобразуются базисные векторы, можно будет определить и результат преобразования всех остальных векторов (а значит, и точек) пространства.

При гомотетии в три раза единичные векторы (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1) перейдут очевидно в векторы (3; 0; 0), (0; 3; 0), (0; 0; 3).

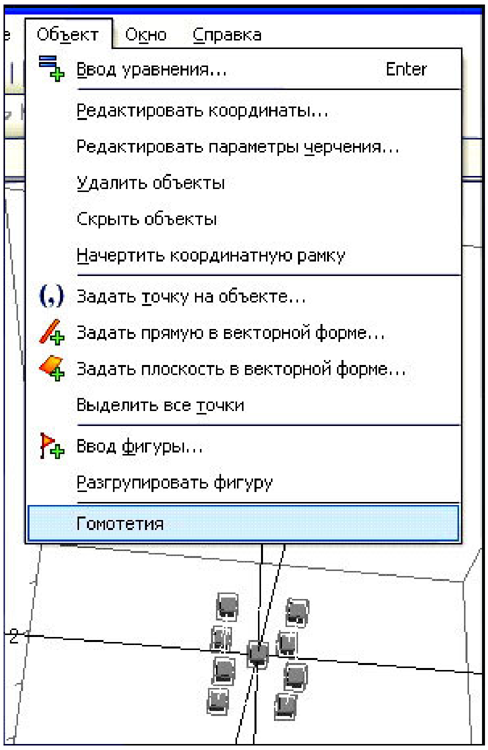


Рис. 4

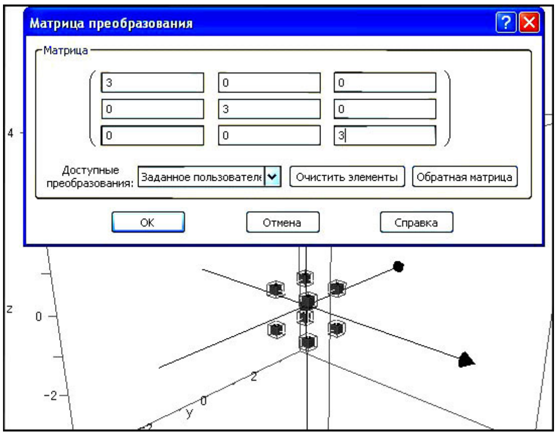


Рис. 5

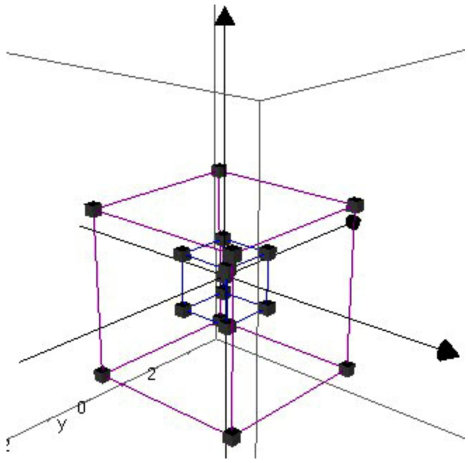


Рис. 6

Если эти векторы записать последовательными столбиками, получится так называемая матрица преобразования (рис. 5, 6)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

После того как эта идея будет «вброшена» ученикам, они могут попробовать самые разные матрицы преобразований. После этого можно предложить повернуть куб, «наклонить» его вдоль одной из осей и пр. На рис. 7 показана комбинация наклона вдоль оси и гомотетии. Вот матрица этого преобразования:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ученикам дается новый инструмент для изучения преобразований, который позволяет по-другому осмыслить преобразования, изучаемые как синтетические объекты.

УРАВНЕНИЯ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ: ЯЗЫК УРАВНЕНИЙ, НАБЛЮДЕНИЯ И ОБЪЯСНЕНИЯ

Теперь обратимся ещё к одному способу представления геометрических фигур в пространстве – задание уравнениями. Поставим задачу построить поверхность куба заданием уравнения его поверхности.

Начнём с известного уравнения сферы радиуса 3: $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$.

Это уравнение является небольшим преобразованием формульной записи определения сферы как множества точек пространства удаленных от точки, называемой центром, на одинаковое расстояние, называемое радиусом окружности. Далее выбираем в качестве центра начало координат, а в качестве радиуса число 3, записываем формулу расстояния между точками (на основе теоремы Пифагора) и возводим результат в квадрат.

Что будет, если мы будем увеличивать показатель n в уравнении $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 3^{2n}$?

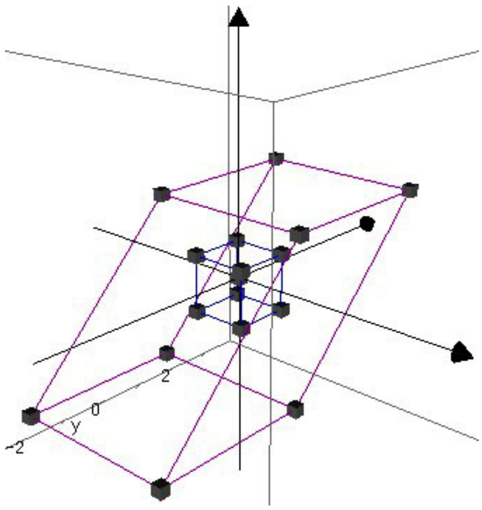


Рис. 7

На рис. 8 показан результат эксперимента для $n = 1, 2$ и 10. Нетрудно заметить, что поверхность приближается к поверхности куба, причем приближение плохое вдоль переходов от одной грани к другой, где происходит сглаживание, и хорошее вблизи центров граней. Попробуем объяснить этот результат теоретически. Для этого лучше начать с уравнения единичной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и изучать уравнение $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$ (впрочем, можно пойти по другому пути и поделить уравнение на его правую часть). Очевидными решениями этого уравнения будут: $(x = 1;\ y = 0;\ z = 0)$, $(x = 0; y = 1; z = 0)$, $(x = 0; y = 0; z = 1)$. Если взять теперь точку, в которой нулевые координаты заменены ненулевыми числами меньшими 1, например, 0.5, то уравнение выполняться не будет. Однако при возведении чисел, меньших 1, в степень их величина быстро стремится к нулю. Например, $(0{,}5)^2 = 0{,}25$, $(0{,}5)^4 = 0{,}0625$, $(0{,}5)^{20} < 0{,}000001$. Это означает, что точки вида $(x = a; y = b; z = 1)$ будут «почти» удовлетворять уравнению $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 1$, если $|a| < 1$ и $|b| < 1$. Это и объясняет приближение поверхности, задаваемой этим уравнением, к поверхности куба.

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ: ПЕРЕВОД С ДЕКЛАРАТИВНОГО ЯЗЫКА НА ИМПЕРАТИВНЫЙ

Одной из проблем осмысления учениками теоретического материала, в том числе геометрического, является его декларативное описание. Выучив определение или теорему, ученик часто становится в тупик в ситуации, когда надо их применить к решению задач или перенести метод, использованный в доказательстве, на другое доказательство.

В решении этой методической проблемы также может помочь метод перевода задачи с одного «языка» на другой. Действительно, язык формулировки определений и утверждений декларативный – он описывает связи между математическими объектами, но ничего не говорит о том, как ими пользоваться. Таким образом, нужно научить школьника превращать определения в инструкции для исполнения – переводить с декларативного языка на императивный. Компьютерные инструменты по своей сути обеспечивают организацию такой учебной деятельности.

Рассмотрим этот подход на примере изучения теорем о параллельности и перпендикулярности в пространстве.

Пример 2. После изучения теоремы о трех перпендикулярах ученикам предлагается построить динамический чертеж к этой теореме средствами среды АВТОГРАФ.

В среде есть возможность провести плоскость через построенные три точки (рис. 9*а*). Для построения таких точек достаточно выбрать инструмент «точка» и щелкнуть нужное число раз в рабочей области. Для построения плоскости нужно выбрать три построенные точки (для выбора нескольких объектов следует держать нажатой клавишу SHIFT – так операция выбора группы работает в большинстве математических сред) и выбрать нужную команду в меню. Для быстрого нахождения нужной команды после выделения объектов можно щелкнуть правой кнопкой мыши на экране и выбрать нужную команду в появляющемся меню (это

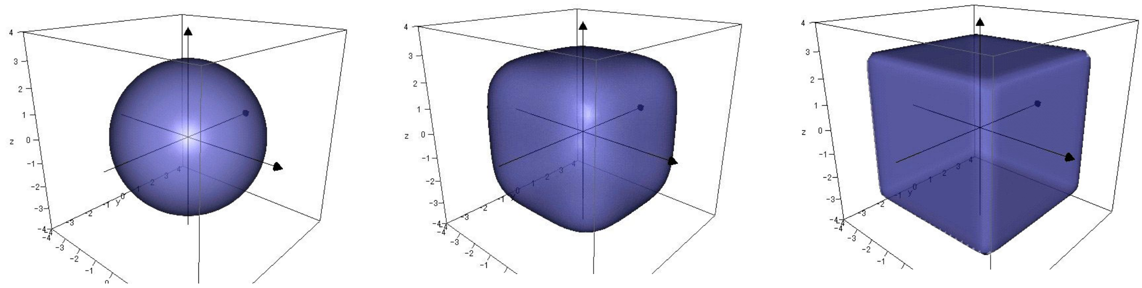


Рис. 8

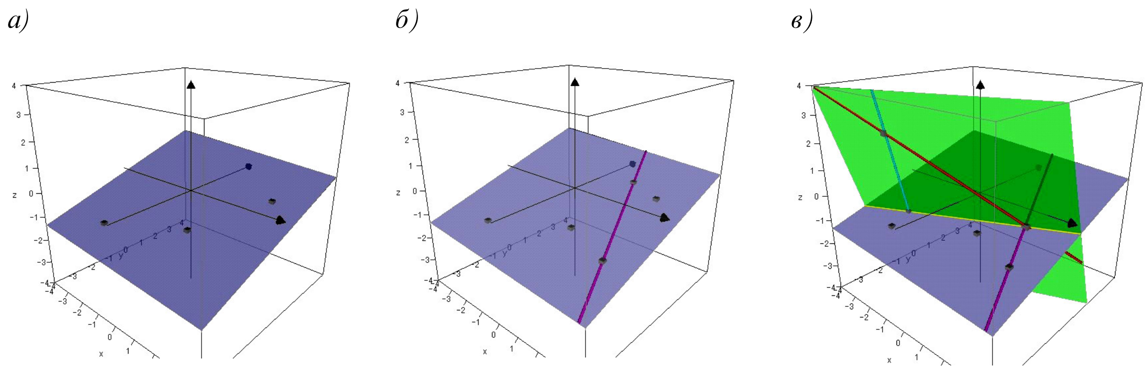


Рис. 9

тоже общий прием для большинства математических приложений).

Теперь построим прямую на плоскости (рис. 9*б*). Для этого на плоскости нужно задать две точки – инструментом «Точка» щёлкнуть на плоскость два раза (программа «понимает», что эти точки будут принадлежать плоскости и перемещаться только по ней).

Теперь можно было бы построить перпендикуляр к плоскости, проходящий через любую её точку, а потом заняться проведением перпендикуляра через эту точку к построенной прямой. Однако этому плану помешает отсутствие такого инструмента среди инструментов геометрических построений в пространстве АВТОГРАФа.

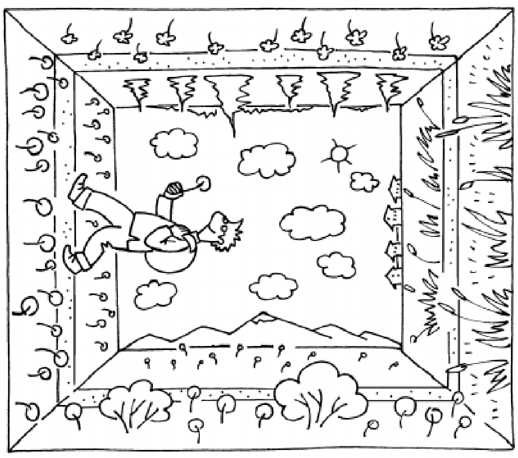
Исходную задачу нужно переосмыслить по-другому: забежав вперед, понять, какая картинка должна получиться в результате (забежим вперед и мы, представив её на рис. 9*в*).

Любопытно, что для построений нам понадобится математический объект, который был в доказательстве, но которого нет в формулировке теоремы: плоскость, проходящая через перпендикуляр к исходной плоскости и перпендикулярная к лежащей в ней прямой (!).

Построение такой плоскости является одним из базовых инструментов среды (для этого нужно построить на прямой произвольную точку и выбрать её, тогда инструмент построения плоскости, перпендикулярной этой прямой, станет доступен).

Дальнейшие действия построения чертежа понятны: построить линию пересечения плоскостей, выбрать на ней точку – основание перпендикуляра к плоскости, построить этот перпендикуляр (выбрав точку и плоскость), выбрать на нем точку и соединить её с точкой на прямой, через которую проводили перпендикулярную плоскость.

Таким образом, пример показывает, что для построения динамического чертежа ученику пришлось использовать знание существа теоремы, причем в деятельностной – императивной – форме. Приведенный пример демонстрирует не специально сконструированный для демонстрации методики частный случай, а типичный процесс преоб-



Рассмотрим этот подход на примере изучения теорем о параллельности и перпендикулярности в пространстве.

разования информации в процессе инструментальной деятельности. Действительно, динамический чертеж отличается от обычного тем, что его построение по существу является алгоритмом решения задачи. Поэтому, если при изображении чертежа на бумаге ученик использует его только как опорный рисунок, для того чтобы вспомнить необходимые отношения между изображенными объектами, то при создании динамического чертежа ученик должен превратить эти отношения в команды построений. Этот процесс преобразования и является главным в использовании инструментального средства. Заметим, что возможные ошибки легко контролируются самим учеником, ведь чертеж динамический, и, если построения сделаны неправильно, это немедленно видно на чертеже.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере программы АВТОГРАФ в статье представлена важная идея, с одной стороны обосновывающая целесообразность использования инструментальных сред при изучении математики, с другой – показывающая направления развития методики использования таких средств. Уже простейшие задания в среде инициируют деятельность ученика, которая направляется самой средой, составом её инструментов и обеспечивается естественной обратной связью, основанной на визуальном представлении выполняемых операций. Изучение устройства самих инструментов может дать ученику новый взгляд на изучаемый предмет, вывести его знания на новый уровень, не увеличивая при этом объем программы. Экспериментальная работа с математическими объектами позволяет вернуть в школьное обучение элементы исследования, дать возможность ученикам почувствовать себя экспериментаторами и первооткрывателями.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Используя шаблон, постройте единичный октаэдр. Сделайте с ним преобразование, которое «растянет» его в 2 раза по оси абсцисс, в 3 раза по оси ординат и в 4 раза по оси аппликат (оси z),
2. Найдите уравнения, которые определяют единичный октаэдр и октаэдр, который был определен преобразованиями единичного октаэдра в предыдущем задании.
3. Постройте динамический чертеж, описывающий стереометрическое доказательство теоремы о пересечении медиан в одной точке, приведенный во введении.

Литература

1. *Якиманская И.С.* Развитие пространственного мышления школьников. М., 1980.
2. Геометрия: Учебное пособие для 9 класса общеобразовательных учреждений / *А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот.* М.: Просвещение, 2001.
3. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Стереометрия. Том 3.
4. *Вертгеймер М.* Продуктивное мышление. М.: Прогресс, 1987.

Поздняков Сергей Николаевич,
доктор педагогических наук,
профессор кафедры ВМ-2
СПбГЭТУ «ЛЭТИ».