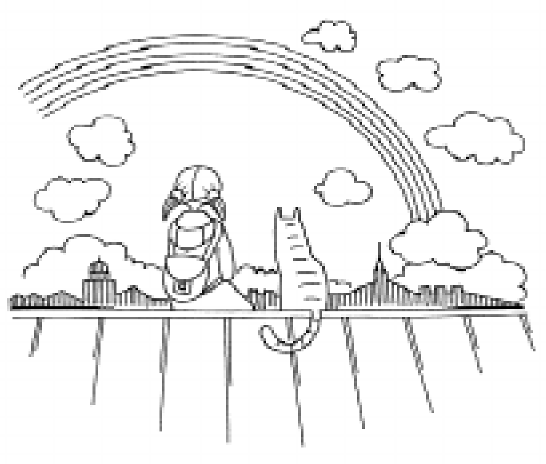
Буздалов Максим Викторович,
Ульянцев Владимир Игоревич,
Царев Федор Николаевич

ЗАДАЧА «ДВЕ ДУГИ»

Этой статьей мы продолжаем цикл публикаций олимпиадных задач для школьников по информатике и программированию с разборами. Решение таких задач и изучение разборов поможет вам лучше подготовиться к олимпиадам по информатике.

В этой статье рассматривается задача «Две дуги», которая предлагалась в третьей Интернет-олимпиаде сезона 2008–2009 гг. Интернет-олимпиады по информатике проводятся Санкт-Петербургским государственным университетом информационных технологий, механики и оптики в двух номинациях – базовой и усложненной. Базовая номинация рассчитана на начинающих участников олимпиад, поэтому в ней предлагаются более простые задачи, а в усложненной номинации предлагаются задачи уровня городских и всероссийских командных олимпиад по программированию. Сайт этих олимпиад находится по адресу http://neerc.ifmo.ru/school/io.



УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

В этой задаче речь пойдет о дугах одной и той же окружности.

Каждая дуга будет задаваться градусными мерами ее двух концов. Эти градусные меры являются целыми числами от 0º до 359º включительно и измеряются против часовой стрелки от луча, направленного вправо. Так как в общем случае существуют две дуги с заданными концами, мы будем считать, что дуга проходит из первой точки в сторону возрастания угла (с учетом перехода через отметку 0º).

На рис. 1 изображены дуги, задаваемые соответственно как (0; 60), (180; 30), (210; 270).

В случае совпадения концов дуг условимся считать, что таким образом задана дуга, состоящая из одной точки.

Заданы две дуги окружности. Необходимо проверить, имеют ли они хотя бы одну общую точку.

Формат входного файла

В первой строке входного файла находятся два целых числа S_1, F_1 – описание

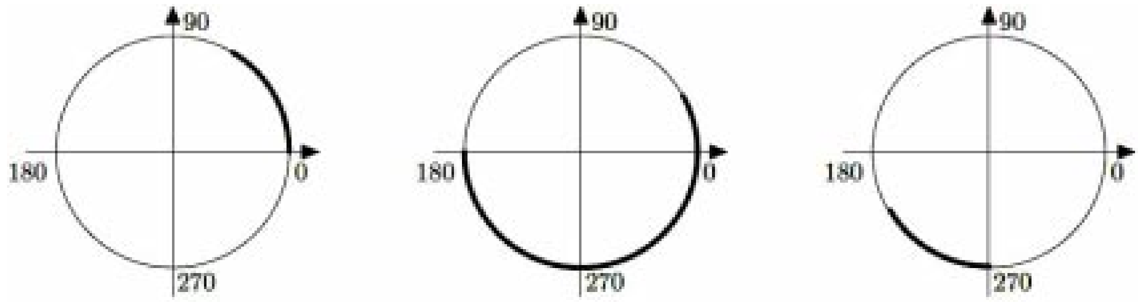


Рис. 1. Примеры дуг, задаваемых как (0; 60), (180; 30) и (210; 270)

первой дуги. Во второй строке находится описание второй дуги в том же формате.

Все числа во входном файле неотрицательны и строго меньше 360.

<u>Формат выходного файла</u>

В выходной файл выведите «YES», если дуги имеют хотя бы одну общую точку, или «NO», если не имеют общих точек.

Примеры входных и выходных данных

twoarcs.in	**twoarcs.out**
0 60 210 270	NO
210 270 180 30	YES
180 30 0 60	YES

РАЗБОР ЗАДАЧИ

Сначала решим вспомогательную задачу – для дуги и точки на окружности определим, лежит ли точка на дуге.

Пусть дуга начинается в точке с градусной мерой S и заканчивается в точке с градусной мерой F ($1 \le S$, $F < 360$), а точка, принадлежность которой дуге необходимо определить, имеет градусную меру X. Рассмотрим два случая: $S \le F$ и $S > F$.

В первом случае дуга содержит только точки с градусной мерой из отрезка $[S; F]$, поэтому данная точка принадлежит дуге тогда и только тогда, когда $S \le X$ *и* $X \le F$.

Во втором случае дуга содержит точку с градусной мерой 0 – при переходе через эту точку значение угла скачкообразно уменьшается. Так как во всех остальных точках окружности такого не происходит, то дуга содержит те и только те точки, градусные меры которых принадлежат объединению интервалов $[S; 360)$ и $[0; F]$. Поэтому точка принадлежит дуге тогда и только тогда, когда $S \le X$ *или* $X \le F$.

Отсюда следует первый способ решения. Так как концы имеют целочисленные градусные меры, то для проверки наличия у них общих точек достаточно проверить также только точки с целочисленными градусными мерами (детальное доказательство остается читателю в качестве упражнения). В листинге 1 приведена программная реализация этого подхода на языке Pascal.

Эта программа работает за линейное время относительно числа целочисленных значений градусных мер. Это число равно 360, поэтому решение укладывается в ограничения по времени.

Можно заметить, что дуги имеют хотя бы одну общую точку тогда и только тогда, когда верно хотя бы одно из четырех утверждений:

– первая дуга содержит начало второй дуги;

– первая дуга содержит конец второй дуги;

– вторая дуга содержит начало первой дуги;

– вторая дуга содержит конец первой дуги.

На основании этого можно реализовать второй способ решения, работающий за константное время. Программная реализация приведена в листинге 2.

Листинг 1. Первый способ решения

```
uses
  sysutils;
var
  s1, f1, s2, f2, i: integer;
  ans, v1, v2: boolean;
begin
  reset(input, 'twoarcs.in');
  rewrite(output, 'twoarcs.out');
  readln(s1, f1);
  readln(s2, f2);
  ans := false;
  for i := 0 to 359 do begin
    if s1 <= f1 then begin
      v1 := (s1 <= i) and (i <= f1);
    end else begin
      v1 := (s1 <= i) or (i <= f1);
    end;
    if s2 <= f2 then begin
      v2 := (s2 <= i) and (i <= f2);
    end else begin
      v2 := (s2 <= i) or (i <= f2);
    end;
    ans := ans or (v1 and v2);
  end;
  if ans then begin
    writeln('YES');
  end else begin
    writeln('NO');
  end;
end.
```

Листинг 2. Второй способ решения

```
uses
  sysutils;
var
  s1, f1, s2, f2, i: integer;
  v1, v2, v3, v4: boolean;
begin
  reset(input, 'twoarcs.in');
  rewrite(output, 'twoarcs.out');
  readln(s1, f1);
  readln(s2, f2);
  if s1 <= f1 then begin
    v1 := (s1 <= s2) and (s2 <= f1);
    v2 := (s1 <= f2) and (f2 <= f1);
  end else begin
    v1 := (s1 <= s2) or (s2 <= f1);
    v2 := (s1 <= f2) or (f2 <= f1);
  end;
  if s2 <= f2 then begin
    v3 := (s2 <= s1) and (s1 <= f2);
    v4 := (s2 <= f1) and (f1 <= f2);
  end else begin
    v3 := (s2 <= s1) or (s1 <= f2);
    v4 := (s2 <= f1) or (f1 <= f2);
  end;
  if v1 or v2 or v3 or v4 then begin
    writeln('YES');
  end else begin
    writeln('NO');
  end;
end.
```

Отметим, что второе решение можно модифицировать так, чтобы оно работало для вещественных значений градусных мер концов заданных дуг. Для первого решения такая модификация затруднительна.

Члены жюри Интернет-олимпиад по информатике базового уровня:

Буздалов Максим Викторович, аспирант кафедры «Компьютерные технологии» (КТ) СПбГУ ИТМО, чемпион мира по программированию среди студентов 2009 года,

Ульянцев Владимир Игоревич, студент пятого курса кафедры КТ СПбГУ ИТМО, член жюри ВКОШП,

Царёв Федор Николаевич, аспирант кафедры КТ СПбГУ ИТМО, чемпион мира по программированию среди студентов 2008 года.