ПРЕДМЕТНОЕ ОБУЧЕНИЕ
ОТКРЫТОЕ ПО В ШКОЛЕ

Иванов Олег Александрович

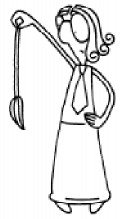
MAXIMA В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ. УРОК 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ: ИДЕИ, ПРИНЦИПЫ, ПОДХОДЫ

Автор согласен с высказанным в [8] тезисом, что степень, в которой компьютер используется как «инструмент для поддержки (*развития – авт.*) мышления», зависит от того, насколько он поддерживает развитие интеллектуальных навыков. Поэтому, в частности, нет необходимости использовать в школе мощные пакеты символьных вычислений. То, что пакет *Mathematica* с легкостью решает задачу 5 из заданий для самостоятельной работы к этому уроку, а Maxima это сделать не в состоянии, с точки зрения обучения математике, есть преимущество второго из них, а не первого. Как может судить читатель, в этой серии статей автор стремился показать на «школьных» примерах, каким образом можно использовать пакет Maxima для поддержки «общеразвивающих видов деятельности, основанных на решении математических задач». Обзор других типов образовательного программного обеспечения дан в недавней работе [7] (см. также работу [5]). В отличие от большинства работ, в которых компьютерные технологии в обучении рассматриваются как основа «для развития новых видов занятий математикой, которые, прежде всего, реализуются вне рамок школьной программы», подход автора состоит в том, чтобы использовать современные пакеты символьной математики для углубления знаний математики в рамках существующей программы обучения в старших классах школы. Автор не собирается в этой статье исследовать проблему использования современных компьютерных технологий для активизации процесса обучения математике в школе с точки зрения педагогической науки. С другой стороны, основная ее цель – это на основе проведенного анализа применения компьютера сформулировать некоторые принципы, на которых должно быть основано использование таких технологий.

Новых задач в этой статье будет совсем немного. Их роль – показать те стороны использования компьютера, которые не были затронуты в предыдущих статьях.

Задача 1. *Рассматриваются последовательности натуральных чисел, в которой каждый последующий член* x_{n+1} *равен* $x_n/2$, *если число* x_n *четно, если же* x_n *нечетно, то* $x_{n+1} = x_n + 9$.

а) Найдите все периодические последовательности указанного вида.



б) Докажите, что всякая такая последовательность имеет периодический «хвост», то есть существуют такие натуральные числа k и p, что $x_{n+p} = x_n$ *при всех* $n \ge k$.

Для того чтобы получить верный ответ на первый вопрос задачи, надо просто взять и посчитать. Если учащийся сидит у компьютера, то первое, что он начнет делать, так это вычислять. Поэтому наличие компьютера создает такую педагогическую ситуацию, в которой учащемуся ничего не останется делать, как пойти по верному пути. Надо начать вычислять, для чего проще всего написать процедуру, которая по начальному члену последовательности вычисляет какое-то количество последующих ее членов. Процедура `traj` составляет список, в который входят первые 20 членов последовательности с заданным начальным членом (значение которого является аргументом этой процедуры) (рис. 1).

Конечно, начинать надо было с последовательности с начальным членом $x_1 = 1$ (рис. 2).

Уже первый результат `%o3` показывает, что у нас имеются 9 периодических последовательностей, одним из членов которых является 1. Ни в одной из них не встречается число 3, поэтому надо посмотреть на последовательности с $x_1 = 3$. Строка `%o4` показывает, что имеются еще три периодические последовательности. Наконец, из строки `%o5` следует, что есть еще две периодические последовательности с начальными членами 9 и 18. Наименьшим числом, которое не встретилось нам среди членов найденных периодических последовательностей, является 11. Поэтому посмотрим на последовательность, начинающуюся с числа 11 (рис. 3).

Ясно видно, что последовательность с $x_1 = 11$ периодической не является, однако последовательность, получающаяся при отбрасывании ее первых трех членов, уже будет периодической. Чтобы получить периодическую последовательность из последовательности с $x_1 = 25$, надо отбросить уже девять ее первых членов. Можно поэкспериментировать и далее, но новых периодических последовательностей мы не получим, однако всегда после отбрасывания нескольких первых членов будут получаться периодические последовательности.

Формальное решение задачи основано на следующем утверждении: *во всякой последовательности данного вида найдется член* x_k, *не превосходящий* 9. Всякая последовательность, начальным членом которой является одно из чисел {1, 2, ..., 9}, является периодической. Из сформулированного утверждения следует, что, во-пер-

```
(%i1) traj(a):=block([x:[a],y:a],thru 19
      do(y:if evenp(y) then y/2 else y+9,
      x:append(x,[y])),return(x))$
(%i2) traj(5);
(%o2) [5,14,7,16,8,4,2,1,10,5,14,7,16,8,4,2,1,10,5,14]
```

Рис. 1

```
(%i3) traj(1);
(%o3) [1,10,5,14,7,16,8,4,2,1,10,5,14,7,16,8,4,2,1,10]
(%i4) traj(3);
(%o4) [3,12,6,3,12,6,3,12,6,3,12,6,3,12,6,3,12,6,3,12]
(%i5) traj(9);
(%o5) [9,18,9,18,9,18,9,18,9,18,9,18,9,18,9,18,9,18,9,18]
```

Рис. 2

```
(%i6) traj(11);
(%o6) [11,20,10,5,14,7,16,8,4,2,1,10,5,14,7,16,8,4,2,1]
(%i7) traj(25);
(%o7) [25,34,17,26,13,22,11,20,10,5,14,7,16,8,4,2,1,10,5,
14]
```

Рис. 3

вых, во всякой периодической последовательности содержится одно из этих чисел, поэтому периодических последовательностей указанного вида, кроме уже найденных, не существует, и, во-вторых, любая последовательность, начиная с некоторого места, является периодической.

Еще одна задача на ту же педагогическую идею. Но в ней компьютер будет играть более существенную роль. Хотя применить его будет более сложно, но зато и более интересно.

Задача 2. *Найдите наибольшее значение произведения натуральных чисел, сумма которых равна 100.*

Обратите внимание, что в задаче ничего не говорится о количестве слагаемых, сумма которых равна 100. Чтобы угадать ответ, надо как следует посчитать, что ручным способом сделать затруднительно, так как легко запутаться, а написать программу тоже не очень просто, поскольку она должна быть рекурсивной (то есть вызывающей себя), при этом обращаться к компьютеру за получением ответа задачи бессмысленно в связи с тем, что он никогда его не даст.

С понятием рекурсивной процедуры вы уже встречались на уроке 3, однако не будет вреда от того, что мы поясним его еще раз. Предположим, что нам надо найти сумму всех чисел от 1 до n. Искомая сумма s_n удовлетворяет рекуррентному соотношению $s_n = s_{n-1} + n$ с начальным условием $s_1 = 1$. Так и надо написать (рис. 4).

Конечно, в этом случае разумнее было воспользоваться оператором `sum`, но бывают ситуации, когда это сделать невозможно. В нашем случае идея состоит в следующем. Наибольшим значением $mprod(a)$ произведения натуральных чисел

$mprod(2) \cdot mprod(a-2)$,

$mprod(3) \cdot mprod(a-3)$,

…,

сумма которых равна a, является наибольшее из чисел, при этом числа 2 и 3 вообще разбивать на слагаемые не надо. Напишем соответствующую процедуру (см. рис. 5).

Мы получили, что наибольшее произведение натуральных чисел, сумма которых равна 17, есть 486, но что нам делать с этим ответом? Нам ведь интересно не значение произведения само по себе, а то, из каких сомножителей оно состоит. Поэтому попросим Maxima разложить найденное число на множители, что делается при помощи оператора `ifactors`.

```
(%i1) sum(n):= if n=1 then 1 else n+sum(n-1)$
(%i2) sum(10);
(%o2) 55
```

Рис. 4

```
(%i3) mprod(a):=block([x:2],if a=2 then return(2) else
      if a=3  then return(3) else(for i:2 thru floor(a/2)
      do if x<mprod(i)*mprod(a-i) then
      x:mprod(i)*mprod(a-i),return(x)))$
(%i4) mprod(17);
(%o4) 486
```

Рис. 5

```
(%i5) ifactors(mprod(17));
(%o5) [[2,1],[3,5]]
(%i6) ifactors(mprod(16));
(%o6) [[2,2],[3,4]]
```

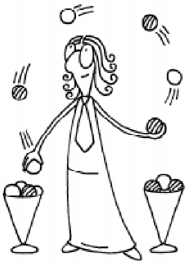
Полученные ответы означают, что $486 = 2 \cdot 3^5$, а $mprod(16) = 2^2 \cdot 3^4 = 324$. Обратите внимание на то, что $17 = 2 + 3 \cdot 5$ и $16 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4$. Теперь ответ в задаче очевиден: число надо разбивать на «двойки» и «тройки», причем, поскольку $2+2+2 = 3+3$, но $2^3 < 3^2$, то «двоек» должо быть как можно меньше. Формальное доказательство основано на следующем простом соображении. Если $a \geq 5$, то $a < 2(a-2)$, таким образом, слагаемые суммы с наибольшим произведением не могут быть больше 4. Осталось заметить, что $4 = 2+2$ и $4 = 2 \cdot 2$, поэтому достаточно рассматривать в качестве таких слагаемых только 2 и 3.

Ответ в задаче 2:

```
(%i7) 2^2*3^32;
(%o7) 7412080755407364
```

При решении задач по теме «Элементы теории вероятностей» школьного курса математики ответом является дробь (обычная или конечная десятичная). Случайного совпадения ответа в таких задачах практически не бывает, в связи с чем проверка правильности решения может быть сделана по полученному ответу. А для того чтобы исключить не относящиеся к делу вычислительные ошибки, естественно использовать компьютер. Один из простых примеров подобных задач [6].

Задача 3. *В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 5 белых и 6 черных. Из первой урны наугад выбирается один шар и перекладывается во вторую урну. После этого из второй урны наугад выбирается один шар. Какова вероятность того, что он – белый?*



Естественно написать общую формулу, обозначив число белых и черных шаров в первой урне через w_1 и b_1, соответственно, во второй – через w_2 и b_2. В силу формулы полной вероятности искомая вероятность есть значение следующей процедуры (рис. 6).

Разумнее сразу писать ее, чем проводить вычисления с конкретными числами на бумаге.

```
(%i1) p(w1,b1,w2,b2):=((w2+1)*w1+w2*b1)/(w1+b1)/(w2+b2+1)$
      p(7,3,5,6);
       19
(%o2)  --
       40
```

Рис. 6

Как мог заметить читатель, автор всячески избегал использования компьютера для чисто иллюстративных целей. Однако при изложении в школе темы «Элементы теории вероятностей» без этого не обойтись.

Задача 4.

а) Какова вероятность того, что при двадцатикратном бросании (правильной) монеты герб выпадет менее, чем 7 раз?

б) И, вообще, каково распределение вероятностей количества появлений некоторого события в схеме Бернулли?

а) Данная вероятность равна $(C_{20}^{0}+C_{20}^{!}+\ldots+C_{20}^{6})/2^{20}$. Понятно, что глупо считать это число «руками» (рис. 7).

Как вы видите, эта вероятность достаточно мала.

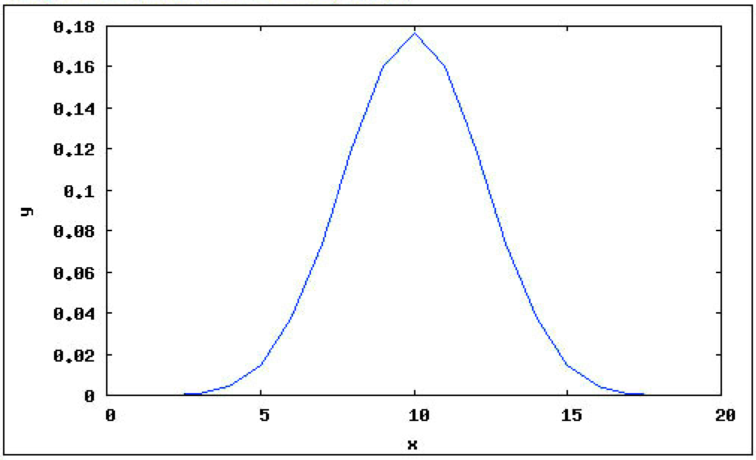
б) Теперь дадим графическую интерпретацию ответа на второй вопрос задачи. Для простоты считаем, что вероятность p однократного наступления события равна $1/2$. Вероятность p_k того, что в схеме Бернулли некоторое событие появится k раз, определяется формулой $p_k = C_n^k/2^n$. Построим на плоскости точки с координатами (k, p_k), $k = 0, 1, \ldots, 20$, и для наглядности соединим их ломаной, изобразив так называемое распределение числа появлений события (рис. 8).

А теперь сравните эту картинку с графиком функции $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ при $a=10$ и $\sigma=\sqrt{5}$ (рис. 9).

```
(%i1) sum(binomial(20,k),k,0,6)/2^20;
       15115
(%o1) ------
      262144
(%i2) %,numer;
(%o2) 0.057659149169922
```

Рис. 7

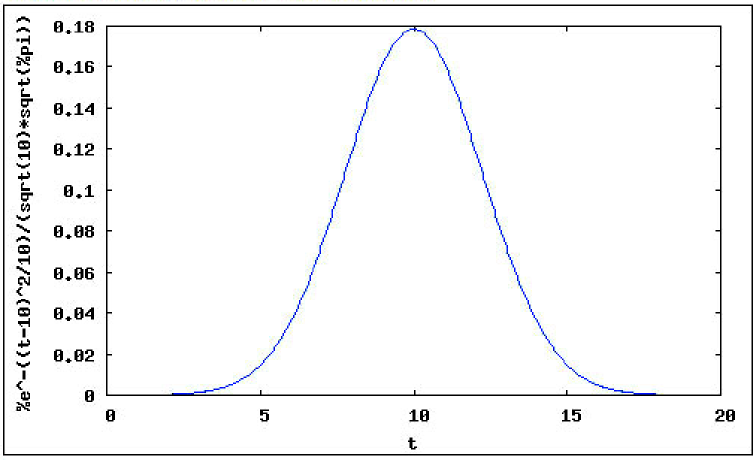
```
(%i3) x:makelist([k,binomial(20,k)/2^20],k,0,20)$
      wxplot2d([discrete,x]);
(%t4)
```




```
(%o4)
```

Рис. 8

```
(%i9) wxplot2d(f(t),[t,0,20]);
(%t9)
```




```
(%o9)
```

Рис. 9

Они очень похожи, не правда ли? Объяснить схожесть этих графиков на «школьном уровне» невозможно. Она является следствием одной из центральных теорем теории вероятностей – так называемой *центральной предельной теоремы*, играющей важную роль как в самой теории вероятностей, так и в ее разнообразных приложениях.

Интересно посмотреть на вероятности того, что герб выпадет не менее $10-k$ и не более $10+k$ раз (рис. 10).

Из полученной таблицы видно, что практически в половине случаев число выпавших гербов будет лежать в пределах от 9 до 11.

Этой задачей мы заканчиваем изложение примеров и переходим к обсуждению вопросов методики использования систем символьных вычислений (далее – *компьютера*) в преподавании математики.

Первое, что следует подчеркнуть – наличие компьютера в распоряжении учащегося создает новую педагогическую ситуацию. Эта ситуация характеризуется наличием программного средства, позволяющего

– быстро и безошибочно производить вычисления с рациональными числами и преобразовывать алгебраические выражения, строить эскизы графиков элементарных функций, решать алгебраические уравнения, вычислять пределы, производные, интегралы, что придаст учащимся уверенность при решении задачи, позволит не бояться достаточно сложных преобразований, контролируя как их, так и полученный ответ;

– проводить компьютерные эксперименты для получения информации, дальнейший анализ которой приведет к правильному ответу или идее решения задачи, при этом действуя далее уже чисто ма-

```
(%i1) fpprintprec:5$
      makelist(sum(binomial(20,10+i),i,-k,k)/2^20,k,0,9),numer;
(%o2) [0.176,0.497,0.737,0.885,0.959,0.988,0.997,1.0,1.0,1.0
]
```

Рис. 10

тематическими средствами и осознавая их необходимость для обоснования полученного ответа;

– развивать навыки в использовании стандартных и построении новых методов и алгоритмов, а также в программировании простых алгоритмов, что, в частности, будет способствовать лучшему пониманию используемых в школе методов решения задач;

– при отсутствии или недостаточности собственных знаний и (или) навыков использовать *базу знаний* компьютера при изучении нового материала.

Таким образом, компьютер можно и нужно использовать для активизации учебного процесса, в которой он может играть несколько ролей:

1. *Психологическую*, придавая учащемуся уверенность и позволяя ему убедиться в том, что задача не так страшна, как может показаться на первый взгляд (см., к примеру, обсуждения задач 1 и 2 урока 4).

2. *Стимулирующую*, давая возможность за реальное время справиться с задачей, решить которую без компьютера смог бы только очень мотивированный и подготовленный учащийся (см. задачу 1 урока 1).

3. *Развивающую*, поскольку та свобода исследования, которую дает компьютер, способствует развитию мышления учащихся, позволяя им, в частности, проводить компьютерные эксперименты, приводящие к самостоятельным открытиям (см. задачи 1 и 4 урока 2).

4. *Контролирующую*, так как, как было отмечено выше, понимание метода может быть проверено по тому, сможет ли учащийся реализовать его посредством компьютерной программы (см. задачу 3 урока 4).

5. *Компенсирующую*, давая возможность не только пользоваться «электронными мозгами», но и использовать их для контроля вычислений, что в результате придаст учащимся уверенность в результатах своей работы (см. задачу 1 урока 5).

Использование компьютера для решения математических задач может придать учебной деятельности учащихся исследовательский характер. Обратите внимание, что такие (характерные для всякого исследователя) типы интеллектуальной деятельности, как:

1) использование известных алгоритмов, формул и процедур;

2) кодирование, интерпретация, преобразование;

3) классификация и систематизация;

4) правдоподобные рассуждения;

5) выдвижение и проверка гипотез, доказательство и опровержение;

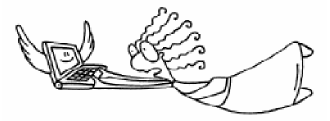
6) разработка алгоритмов ([1]) – встречались при решении практически каждой из разобранных задач. Таким образом, использование компьютера в обучении математике может способствовать развитию мышления учащихся, причем в различных его аспектах: дедуктивном, формально-логическом, индуктивном, ассоциативном, из которых первые два связаны с логической формой мышления, тогда как два последних – с эвристической. Тем самым компьютер может внести в процесс обучения то, чего так не хватает при обучении по стандартной школьной программе и стандартным методикам.

Сформулируем теперь некоторые общие принципы, которых следует придерживаться при построении методик использования компьютера в процессе обучения.

Принцип минимизации. Поскольку всякий программный продукт есть только средство, то им надо овладеть только в той степени, которая необходима для его применения. К примеру, набор операторов пакета Maxima, введенный в статьях этой серии, достаточен для решения всего круга задач по школьному курсу «Алгебра и начала анализа».

Принцип верификации. На результаты произведенных компьютером вычислений можно опираться лишь тогда, когда мы понимаем, как они были проведены и что они верны. В частности, поэтому автор, к примеру, предпочел написать процедуру вычисления корня по методу Ньютона. Процедуры – «черные ящики» не дадут того обучающего эффекта.

Принцип многомерности. Компьютер может и должен дать учащемуся ощущение уверенности и свободы при поиске



решения задачи. При решении уравнения вы можете, по крайней мере, сразу понять, сколько решений оно имеет, не испугаться тяжелых преобразований, проверить полученный ответ и еще многое и многое другое.

Принцип целостности. На какой бы стадии решения задачи компьютер ни использовался, всегда надо иметь в виду, что речь идет именно о решении математической задачи, поэтому главное, что должен понимать учащийся, – это логику проводимого исследования, рассуждения.

Все вместе эти принципы характерны при использовании любой компьютерной технологии.

И совсем уж в заключение заметим, что практикум «Решение задач с использованием компьютерных средств» был бы чрезвычайно полезен в процессе подготовки будущих учителей математики как важная компонента в системе их математической и методической подготовки [2], особенно в современных условиях, в связи с тем, что для выпускников нашей российской школы изучение математики, к сожалению, стало во многом сводиться к подготовке к ЕГЭ.

Заключительные задания для самостоятельной работы

1. Верно ли, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного семиугольника до прямой, проходящей через его центр, не зависит от положения этой прямой?

2. Найдите все числа $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, такие, что $\sin^2 k + \sin^2 2k + \sin^2 3k \ge 1$.

3. Убедитесь в том, что сумма квадратов двух последовательных чисел Фибоначчи является некоторым числом Фибоначчи.

4. Верно ли, что неравенство $\ln(1+1/n) > 1/(n+1)$ справедливо при всех натуральных n?

5. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x-2}\,.$$

6. Найдите центр симметрии графика

$$y = x^3 + 3x^2 - 6x + 2\,.$$

7. Докажите утверждение, на котором основано формальное решение задачи 1.

8. За неделю стоимость акций компании *ABC* может с равной вероятностью как возрасти на 0,9 %, так и снизиться на 0,5 %. Какова вероятность того, что за полгода эти акции так и не вырастут в цене?

Ответы и решения заданий для самостоятельной работы урока 5

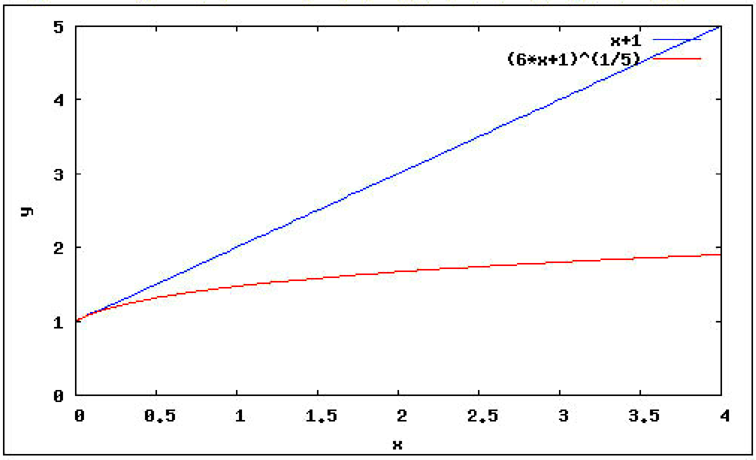
1. Мы уже видели, что уравнение $2^x + x = 4$ не имеет целых решений. Пусть $x = p/q$ – рациональное число, не являющееся целым. Поскольку в этом случае число 2^x является иррациональным, то оно не может быть равным рациональному числу $4 - x$.

2. Таким образом выглядят, к примеру, графики функций вида $f(x) = (x-a)\,(x^2 - b^2)^2$.

3. Задание для Maxima надо ставить «с умом». Из картинки (рис. 11) не следует ровным счетом ничего. К сожалению, слишком часто учащиеся считают, что она демонстрирует, что неравенство справедливо. Надо взять более крупный масштаб, задав отрезок меньшей длины по оси абсцисс. Теперь из картинки (рис. 12) ясно видно, что данное неравенство справедливо не на всей положительной полуоси.

4. Данное уравнение будет иметь три действительных корня, если наибольшее значение функции $f(x) = x^3 + px + q$ положительно, а ее наименьшее значение – отрицательно. Все, что надо сделать, так это найти корни x_1 и x_2 производной этой функции и записать условие $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Из вычислений

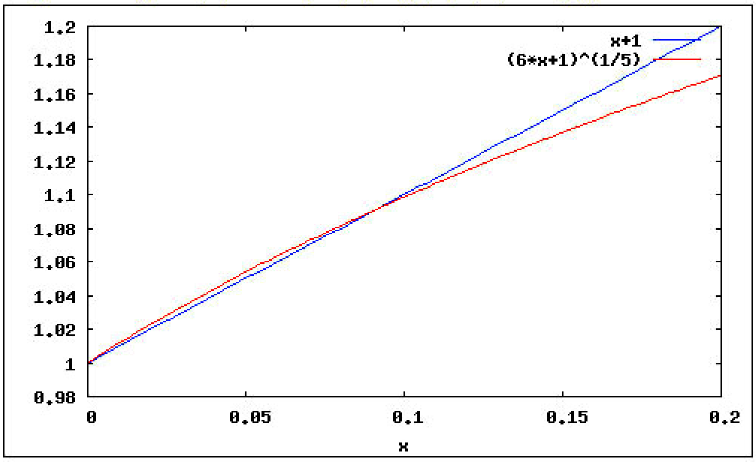
```
(%i1) wxplot2d([1+x,(1+6*x)^(1/5)],[x,0,4],[y,0,5]);
(%t1)
```




```
(%o1)
```

Рис. 11

```
(%i2) wxplot2d([1+x,(1+6*x)^(1/5)],[x,0,0.2]);
(%t2)
```




```
(%o2)
```

Рис. 12

```
(%i1) f(x):=x^3+p*x+q$ t:solve(diff(f(x),x),x);
```

(%o2) $\left[x=-\dfrac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}},\ x=\dfrac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}} \right]$

```
(%i3) radcan(subst(t[1],f(x))*subst(t[2],f(x)));
```

(%o3) $\dfrac{27q^2+4p^3}{27}$

следует, что искомое условие имеет следующий вид: $27q^2+4p^3<0$. Кстати, выражение $-27q^2-4p^3$ называется дискриминантом приведенного кубического уравнения. Попробуйте доказать, что оно совпадает с произведением $(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$, где x_1, x_2, x_3 – это корни рассматриваемого уравнения. Видите аналогию со случаем квадратного уравнения?! (См. также [4, с. 112–113]).

5. Поскольку на самом первом шаге процедуры `apprroot` мы получим значение $z=(1+7)/2=4$, то сразу попадаем в корень уравнения $x-4=0$. Однако так как $f(d)\cdot f(z)=0$, то будет произведено присвоение $d=z$. Так как на всех последующих шагах этой процедуры будет выполнено неравенство $f(d)\cdot f(z)\geq 0$, то всякий раз будет выбираться правая из двух половин отрезка $[d;u]$. В результате работы процедуры мы получим отрезок, правый конец которого равен 7. Таким образом, процедура может работать неверно в случае, если на некотором ее шаге число z есть корень данной функции. Напишем видоизмененную процедуру `apprroot1`.

```
(%i1) aprroot1(f,a,b,eps):=block([d:a,u:b,z],
      do(z:(u+d)/2, if u-d<eps then return(z)
      else(if f(z)=0 then return(z),
      if f(d)*f(z)<0 then u:z else d:z)))$
```

Проверим ее на примере решения уравнения $x-4=0$.

```
(%i2) f(x):=x-4$ aprroot1(f,1,7,0.01),numer;
(%o3) 4
```

Все прекрасно, корень найден. Еще один пример.

```
(%i4) f(x):=x^2-4$ aprroot1(f,1,7,0.01),numer;
(%o5) 1.9990234375
```

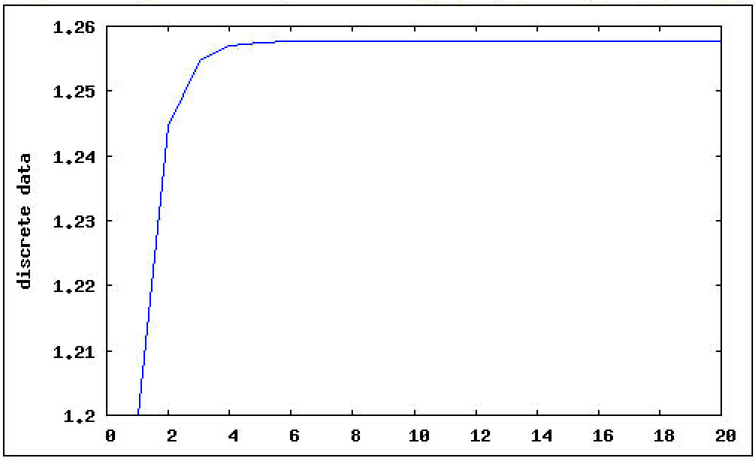
6. Задача является достаточно сложной, ее полное исследование проведено в [3, см. задачу 10.14]. Определим оператор, вычисляющий значения членов данной последовательности.

```
(%i1) x(n,a):=if n=1 then a else a^x(n-1,a)$
```

Теперь можно и поэкспериментировать. Поначалу кажется, что при $a>1$ эта последовательность будет стремиться к бесконечности, однако это не так, что демонстрирует следующая картинка

```
(%i2) wxplot2d([discrete,makelist([n,x(n,1.2)],n,1,20)]);
```

(%t2)

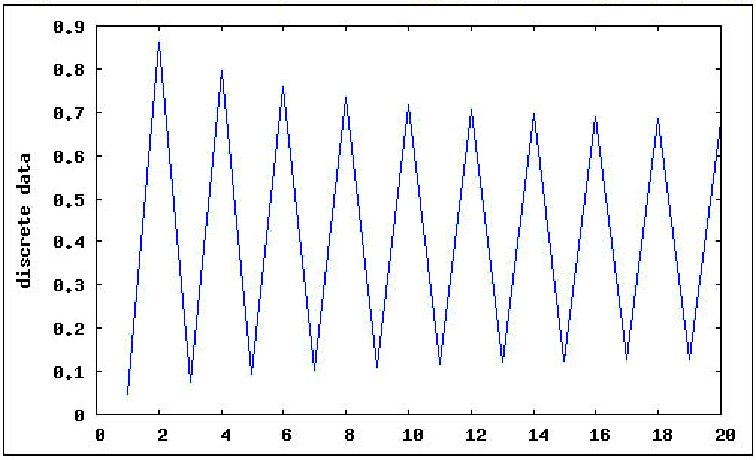


(%o2)

Ясно видно, что последовательность является сходящейся. Если $x_n \to c$, то, поскольку $x_{n+1}=a^{x_n}$, число c является корнем уравнения $x=a^x$. Поэтому надо исследовать задачу о существовании корня этого уравнения. Но не все так просто. Посмотрим на данную последовательность при значении a = 0,05.

```
(%i3) wxplot2d([discrete,makelist([n,x(n,0.05)],n,1,20)]);
```

(%t3)



(%o3)

Причина такого странного ее поведения в том, что при некоторых значениях a уравнение $x = a^{a^x}$ может иметь три корня, при этом подпоследовательности x_{2n} и x_{2n+1} сходятся к разным корням этого уравнения.

Ответы и указания к задачам для самостоятельной работы данного урока

1. Удобнее вращать не прямую, а семиугольник. То, что ответ на поставленный вопрос – положительный, покажет оператор упрощения тригонометрических выражений.

2. Ответ: k = 1, 2, 4, 5. 3. Проведите компьютерный эксперимент.

4. Да, верно: сделайте замену $x = 1/n$, сводящую задачу к стандартной.

5. $x = -1/62$. 6. Точка $A(-1, 10)$.

7. Пусть x_k – наименьший член последовательности. Ясно, что число x_k нечетно. Докажите теперь, что $x_k \le 9$. 8. $2^{-26} \cdot \sum_{k=0}^{9} C_{26}^{k} \approx 0{,}084$.

Литература

1. *Ведерникова Т.Ю., Иванов О.А.* Интеллектуальное развитие школьников на уроках математики // Математика в школе, 2002, № 3. С. 41–45.

2. *Иванов О.А.* Теоретические основы построения системы математической и методической подготовки преподавателей профильных школ. СПбГУ, 1997.

3. *Иванов О.А.* Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009.

4. *Иванов О.А.* Задачи по алгебре и началам анализа. СПб: БХВ-Петербург, 2005.

5. *Нодельман В.С.* Компьютер как средство обучения математике // Компьютерные инструменты в школе, 2009. № 1. С. 4–13.

6. *Пратусевич М.Я., Столбов К.М., Головин А.Н.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Профильный уровень. М.: Просвещение, 2010.

7. *Рукшин С.Е.* Технологическая поддержка стимулирующих занятий математикой // Компьютерные инструменты в школе, 2009. № 6. С. 3–12.

8. *Jonassen D.H.* Computers as Mindtools for Schools: Engaging Critical Thinking (2nd ed.), Upple Saddle River, NJ, Prentice Hall, 2000.

Иванов Олег Александрович, профессор, доктор педагогических наук и кандидат физико-математических наук, профессор кафедры общей математики и информатики СПбГУ.