Посов Илья Александрович

РАЗБОР ЗАДАЧИ «ЛАЗЕРНОЕ ШОУ» КОНКУРСА КИО-2010

На конкурсе КИО-2010 участникам было предложено три задачи: «Лазерное шоу», «Прожорливый тьюрмит», «Математический бильярд» (для участников второго уровня задача называлась «Бильярдный компьютер»). В отличие от других задач конкурса, задача «Лазерное шоу» была предложена участникам обоих уровней без каких-либо изменений. Мы приведем условие задачи, результаты участников обоих уровней, а потом обсудим математические вопросы, лежащие в основе данной задачи.

Будем называть *прямоугольником* в таблице 17 на 17 любые четыре клетки, которые являются вершинами прямоугольника с вертикальными и горизонтальными сторонами. Участникам требовалось раскрасить в таблице 17 на 17 как можно больше клеток так, чтобы не образовалось ни одного прямоугольника с вершинами одного цвета. На рис. 1 приведен

внешний вид программы, с помощью которой участники решали задачу.

На рисунке раскрашены 248 клеток из 289, но эта раскраска не подходит под условие задачи, потому что в ней можно найти 2 одноцветных прямоугольника. Программа обозначает эти прямоугольники красным контуром. Если убрать клетку, которая является вершиной обоих прямоугольников, получится раскраска из 247 клеток, подходящая под условие задачи. Раскрасить таблицу полностью не удалось ни одному из участников, но среди решений было много таких, которые практически к этому приблизились. Ниже приведены два решения, в которых не хватает всего четырех клеток, то есть результат участников равен 285.

```
2 3 2 4 4 1 4 2 2 3 1 2 1 1 3 4 3
3 3 4 3 1 1 2 1 4 2 3 2 2 4 1 4 4
2 4 4 1 4 2 2 3 3 4 3 3 1 2 1 1 3
4 3 1 1 2 1 3 3 . 4 4 2 3 2 2 4 1
4 1 4 2 2 3 2 4 2 1 3 4 3 3 1 2 1
1 1 2 1 3 3 4 3 4 4 1 4 4 2 3 2 2
4 2 2 3 2 4 4 1 3 2 1 1 3 4 3 3 1
2 1 3 3 4 3 1 1 . 2 2 4 1 4 4 2 3
1 4 2 3 1 4 2 3 1 3 2 4 1 3 2 4 1
1 4 2 2 3 2 4 4 . 3 3 1 2 1 1 3 4
3 1 1 2 1 3 3 4 3 3 2 2 4 1 4 4 2
4 4 1 4 2 2 3 2 4 1 2 1 1 3 4 3 3
3 4 3 1 1 2 1 3 2 2 4 1 4 4 2 3 2
3 2 4 4 1 4 2 2 . 1 1 3 4 3 3 1 2
1 3 3 4 3 1 1 2 3 1 4 4 2 3 2 2 4
2 2 3 2 4 4 1 4 4 3 4 3 3 1 2 1 1
1 2 1 3 3 4 3 1 2 4 2 3 2 2 4 1 4
```

И второе:

```
1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 4 2 3 4 1
2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 4 3 4 1 2
3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 4 4 1 2 3
4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4
2 2 2 2 4 4 4 4 . 3 . . 3 1 1 1 1
4 1 2 3 1 4 3 2 3 2 1 4 2 3 4 1 2
1 2 3 4 2 1 4 3 4 3 2 1 2 4 1 2 3
2 3 4 1 3 2 1 4 1 4 3 2 2 1 2 3 4
3 4 1 2 4 3 2 1 2 1 4 3 2 2 3 4 1
3 2 1 4 4 1 2 3 1 4 3 2 3 3 4 1 2
4 3 2 1 1 2 3 4 2 1 4 3 3 4 1 2 3
1 4 3 2 2 3 4 1 3 2 1 4 3 1 2 3 4
2 1 4 3 3 4 1 2 4 3 2 1 . 2 3 4 1
1 4 3 2 3 2 1 4 4 1 2 3 1 3 4 1 2
2 1 4 3 4 3 2 1 1 2 3 4 1 4 1 2 3
3 2 1 4 1 4 3 2 2 3 4 1 1 1 2 3 4
4 3 2 1 2 1 4 3 3 4 1 2 1 2 3 4 1
```

В табл. 1 сведена информация о лучших решениях участников обоих уровней.

Табл. 1

Количество клеток	Количество участников I уровня	Количество участников II уровня
285	1	1
279–280	1	1
276	1	8
270–275	11	20
265–269	42	37
260–264	85	89

ОБСУЖДЕНИЕ ЗАДАЧИ

Задача была поставлена математиком Вильямом Газархом (William Gasarch). Он предложил 289 $ тому, кто сумеет найти полную раскраску для таблицы 17×17 (см. коллективный блог, посвященном сложности вычислений (http://blog.computationalcomplexity.org/2009/11/17x17-challenge-worth-28900-this-is-not.html). При обсуждении задачи в Интернете было предложено много возможных подходов к решению, но пока она так и осталась нерешенной. На момент написания этой статьи лучшим результатом остается решение, в котором до полной раскраски не хватает всего одной клетки:

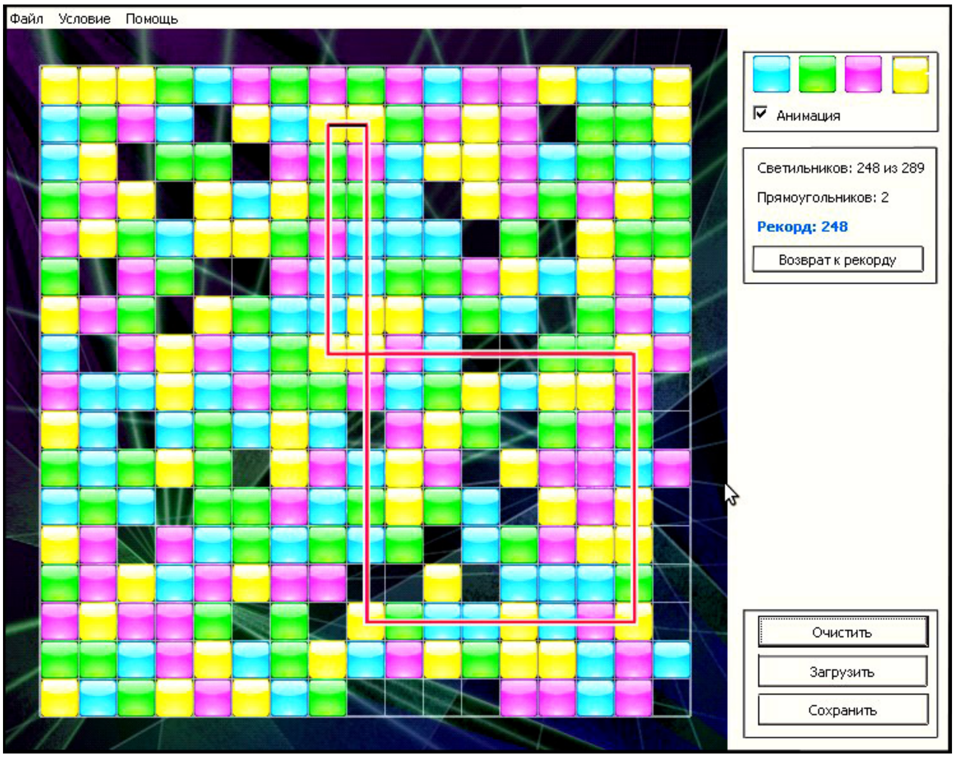

Рис. 1. Внешний вид программы для решения задачи

```
0 0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3
0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 0 0 0
0 2 2 2 2 1 3 3 3 2 0 0 0 3 1 1 1
0 3 3 3 3 1 0 0 0 2 1 1 1 3 2 2 2
1 0 1 2 3 2 1 2 3 3 2 3 0 0 3 0 1
1 1 0 3 2 2 2 1 0 3 3 2 1 0 0 3 2
1 2 3 0 1 2 3 0 1 3 0 1 2 0 1 2 3
1 3 2 1 0 2 0 3 2 3 1 0 3 0 2 1 0
2 0 2 3 1 3 1 3 0 0 2 0 1 1 3 1 2
2 1 3 2 0 3 2 0 3 0 3 1 0 1 0 2 1
2 2 0 1 3 3 3 1 2 0 0 2 3 1 1 3 0
2 3 1 0 2 3 0 2 1 0 1 3 2 1 2 0 3
3 0 3 1 2 0 1 0 2 1 2 1 3 2 3 2 0
3 1 2 0 3 0 2 3 1 1 3 0 2 2 0 1 3
3 2 1 3 0 0 3 2 0 1 0 3 1 2 1 0 2
3 3 0 2 1 0 0 1 3 1 1 2 0 2 2 3 1
0 1 2 3 . 0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3
```

Задача раскрасить таблицу 17 на 17 в четыре цвета возникла при решении более общей задачи. В каких случаях доску размера x на y можно раскрасить в c цветов? Здесь, как и обычно, мы говорим только о тех раскрасках, которые не содержат одноцветных прямоугольников.

Перед тем как сформулировать утверждение про раскраску в произвольное количество цветов, давайте разберемся, какие таблицы можно раскрасить в два цвета. Докажем, что раскрасить таблицу в два цвета можно в том и только в том случае, когда она не содержит ни одну из таблиц *запрещенного* множества $\{3\times7, 5\times5, 7\times3\}$. Мы говорим, что одна таблица содержит другую, если она не меньше ее одновременно по обоим измерениям. Чтобы доказать утверждение, необходимо проверить, что все таблицы 3×7 и 5×5 раскрасить невозможно, а таблицу 4×6 – можно. Действительно, любая таблица либо содержит таблицу из запрещенного множества, и тогда она не может быть раскрашена вместе с ней, либо содержится в таблице 4×6 или 6×4, то есть может быть раскрашена.

Проще всего проверить, что 4×6 раскрасить можно, для этого достаточно привести пример:

```
1 1 1 2 2 2
1 2 2 2 1 1
2 1 2 1 2 1
2 2 1 1 1 2
```

Чтобы понять, что раскрашенной таблицы 3 на 7 не существует, проведем такое рассуждение. Размер столбцов у таблицы нечетен, поэтому в каждом столбце либо больше клеток первого цвета, либо второго. Если в столбце больше клеток первого цвета, будем говорить, что весь столбец имеет цвет 1, и наоборот. Так как столбцов ровно семь, обязательно найдутся четыре столбца одного цвета. Пусть для определенности это цвет 1. Столбцы цвета 1 можно перечислить, это: 112, 121, 211 и 111. Итак, мы имеем четыре столбца и четыре возможных варианта, которыми они могут быть. Значит, либо два столбца в таблице совпадают, что сразу означает наличие одноцветного прямоугольника, либо в таблице используются все четыре приведенных столбца, но тогда легко увидеть, что образуется прямоугольник с двумя вершинами на столбце 111.

Чтобы доказать, что таблицу 5 на 5 раскрасить невозможно, в качестве первого шага сделаем следующее: рассмотрим первый столбец, он содержит пять клеток, поэтому хотя бы три из них имеют один цвет. Дальнейшие рассуждения мы предлагаем проделать читателю, необходимо рассмотреть только три строки, соответствующие найденным трем клеткам одного цвета.

Итак, таблица может быть раскрашена в два цвета в том и только том случае, если она не содержит таблицу из запрещенного множества. Можно доказать, что конечные запрещенные множества существуют для любого количества цветов. Например, для трех цветов множество выглядит так: $\{19\times4, 16\times5, 13\times7, 11\times10, 10\times11, 7\times13, 5\times16, 4\times19\}$. Доказательство такого утверждения требует разбора определенного количества случаев, например, для каждой из таблиц множества необходимо доказать, что раскрасить ее невозможно (попробуйте проделать это, например, для таблицы 4×19). Кроме этого, чтобы доказать, что перечислены все элементы запрещающего множества, необходимо привести раскраски для ряда других таблиц, аналогично тому, как для случая двух цветов мы раскрашивали таблицу 4×6.

Запрещающее множество для случая четырех цветов еще неизвестно. Оно однозначно содержит таблицы $\{41\times5, 31\times6, 29\times7, 25\times9, 23\times10, 10\times23, 9\times25, 7\times29, 6\times31, 5\times41\}$, но этот список не полон. Разбор случая 17×17, который был предложен на конкурсе, является шагом к определению запрещающего множества для четырех цветов. Автор задачи выражает уверенность, что такая раскраска существует. Более того, возможно, раскраске поддается даже таблица 18×18, обратное для нее пока не доказано. Определенность есть только для квадрата 19×19, который раскрасить невозможно.

Как обстоит дело с большим количеством цветов? Как было сказано, запрещающее множество существует для любого количества цветов c. Размер этого множества не менее $2\sqrt{c}$ и не более $2c^2$. Может быть поставлен вопрос: какого размера таблицы попадают в это множество? Уже для четырех цветов встречаются длинные таблицы, размера 5×41. Так как запрещающее множество существует, очевидно, что можно найти квадрат достаточно большого размера, который невозможно раскрасить в c цветов. Но оценить размер такого квадрата оказывается нелегко. Лучшие известные оценки на длину стороны квадрата растут очень быстро при увеличении c (используется двойное возведение в степень).

Можно ли решить задачу про таблицу 17×17, перебирая возможные раскраски на компьютере? Раскрасок очень много, это 4^{289}, количество уменьшается незначительно, если не перебирать симметричные таблицы или таблицы, отличающиеся перестановкой цветов. С помощью компьютера были найдены раскраски для квадратов размера 16×16 и меньше, а вот для квадрата 17×17 этого пока сделать не удалось. Для небольших квадратов работает даже такой несложный алгоритм, как создание случайных раскрасок и последующая проверка, не подходит ли она под условие. Для случая 17×17 вероятность случайно получить допустимую раскраску очень мала. Давайте оценим, сколько *в среднем* образуется одноцветных прямоугольников, если раскрасить квадрат случайным образом. Мы приведем короткие интуитивные вычисления, при желании читатель может разобраться, почему эти вычисления действительно дают правильный ответ. Всего прямоугольников, не обязательно одноцветных, в таблице 17×17 находится $C_{17}^{2}\cdot C_{17}^{2} = 17\cdot17\cdot16\cdot16 / 4$. Каждый прямоугольник при случайной раскраске будет одноцветным с вероятностью $4 / 4^4$ (так как каждая из 4 вершин может быть раскрашена 4 красками, а число одноцветных прямоугольников равно числу цветов – 4). Таким образом, в среднем после умножения получается, что случайная раскраска имеет $17\cdot17\cdot16\cdot16 / 4^4 = 289$ одноцветных прямоугольников.

Вернемся к общей задаче, как определить, можно ли раскрасить таблицу заданного размера в заданное количество цветов. Какому классу сложности принадлежит эта задача? При фиксированном количестве цветов задачу можно решить эффективно, необходимо взять запрещающее множество для этого количества цветов (оно существует и имеет размер не больше c^2) и проверить, не содержится ли какая-то таблица из множества в проверяемой таблице. Тратить вычислительные ресурсы для определения множества не требуется, так как c фиксировано, это множество можно заранее записать в алгоритм. Если количество цветов не фиксировано, то задачу вряд ли можно решить эффективно. Очевидно, что эта задача принадлежит классу NP, потому что мы можем легко проверить раскраску на правильность, если она дана. Автор задачи предполагает, что эта задача не является NP-полной, другими словами задача принадлежит NP, скорее всего не решается полиномиально и не является NP-полной. Получается, что эта задача, скорее всего, является NP-промежуточной. Известно, что если $P \neq NP$, то такие промежуточные задачи существуют. Пример промежуточной задачи может быть приведен, но он является искусственным и интересным только для теории. «Жизненные» NP-промежуточные задачи достоверно не известны. Сейчас мы привели пример задачи, которая, возможно, является NP-промежуточной. Другими известными задачами, которые, скорее всего, таковы, являются задачи об изоморфизме графов (можно ли сопоставить вершины двух графов так, чтобы графы совпали), разложении числа на множители (существует ли у числа множитель, меньший заданного числа), поиск дискретного логарифма (в какую степень надо возвести число x, чтобы получить число y по модулю n).

Повторим, что на момент написания статьи решения у задачи 17×17 еще не было. Если вы сумеете найти раскраску, пошлите ее автору задачи, найдя его координаты по приведенной выше ссылке. Приз в 289 $ до сих пор не отменен. По определенным причинам автор предлагает приз только тем, кто сумеет привести пример раскраски, но все равно будет рад, если вы сумеете доказать, что такой раскраски не существует.

Посов Илья Александрович,
ассистент кафедры ВМ–2
СПбГЭТУ «ЛЭТИ».