ПРЕДМЕТНОЕ ОБУЧЕНИЕ
ОТКРЫТОЕ ПО В ШКОЛЕ

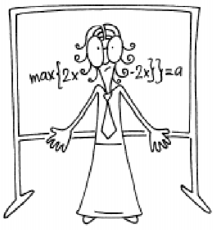
Иванов Олег Александрович

MAXIMA В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ. УРОК 4. АЛГЕБРА С MAXIMA

Принцип, на основании которого материал распределяется между этой и следующей статьей, состоит в том, что: к математическому анализу относятся задачи, в формулировках или решениях которых используются понятия и методы «высшей математики», такие как: последовательности и их пределы, непрерывность функций и их пределы, дифференцирование и интегрирование функций. Хотя по существу график функции есть понятие математического анализа, однако в связи с тем, что учащиеся знакомятся с графиками простейших элементарных функций в курсе алгебры, примеры задач, в решениях которых используются графики линейной, квадратичной и дробно-линейной функций, будут приведены в этой статье.

Автору неоднократно приходилось убеждаться, что следующая задача вводит учащихся в, образно говоря, «шоковое» состояние: они смотрят на данное уравнение и совершенно не представляют, как к нему подступиться. Компьютер может оказать им прежде всего психологическую поддержку.

Задача 1. *Определите (в зависимости от значения параметра а) количество решений уравнения* $\max\{2x-5; \min\{x; 3-2x\}\} = a$.



Решать подобные уравнения Maxima «не умеет», однако нам и не надо искать его решения. Это уравнение имеет вид $f(x) = a$. Как хорошо известно, число решений такого уравнения совпадает с числом точек пересечения графика $y = f(x)$ с прямой $y = a$ (параллельной оси абсцисс). Определим функцию, задаваемую левой частью данного уравнения, и попросим Maxima изобразить ее график (рис. 1).

Ответ теперь очевиден: при $a \in (-1; 1)$ уравнение имеет три решения, при $a = \pm 1$ – два, при $|a| > 1$ уравнение имеет одно решение. Но главное сейчас – это не ответ, а то, как выглядит график данной нам «странной» функции. Видно, что он состоит из частей прямых $y = x$, $y = 3 - 2x$ и $y = 2x - 5$. Для того чтобы понять, как же он получается, стоит сначала посмотреть на график более простой функции $y = \min\{x; 3-2x\}$ (рис. 2).

Если рядом с этим графиком нарисовать картинку, на которой изображены прямые $y = x$ и $y = 3 - 2x$, то станет ясно, что правее (так же, как и левее) точки пересечения этих прямых взят нижний из лучей, на которые эта точка разбивает каждую из двух прямых. Конечно, можно было провести непосредственное исследование. Именно, так как $x \le 3-2x$ при $x \le 1$, то $y = \min\{x; 3-2x\} = x$ при $x \le 1$ и $y = 3 - 2x$ при $x \ge 1$. Теперь добавим к полученной картинке график линейной функции $y = 2x - 5$ (рис. 3).

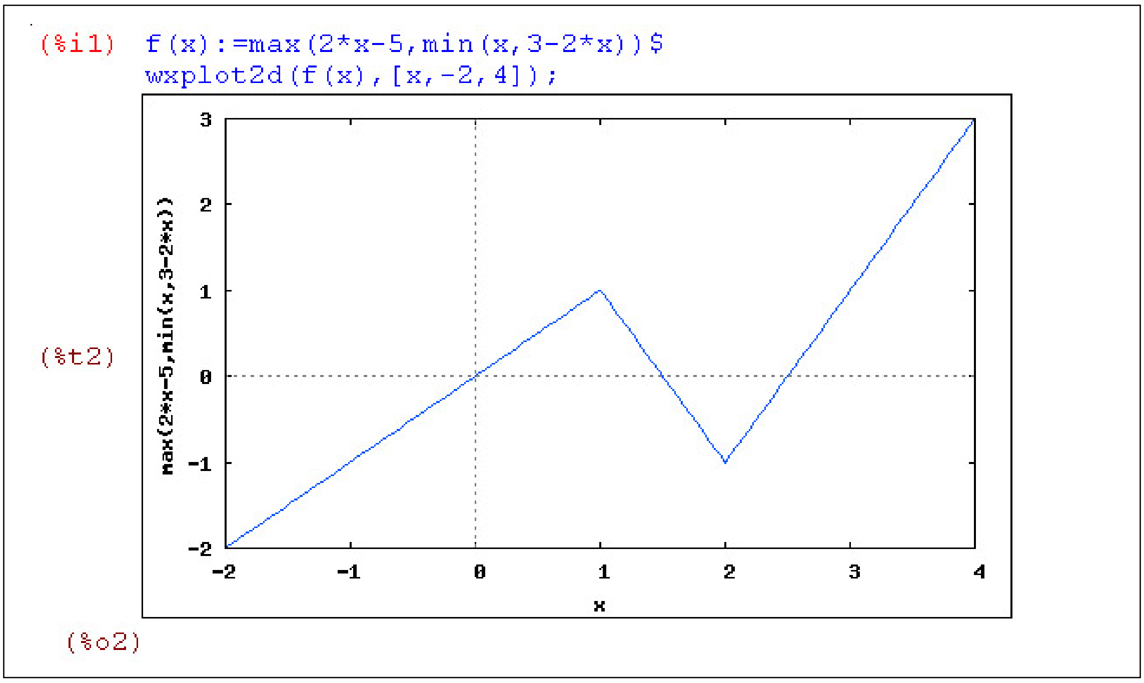


Рис. 1

Мы получим искомый график $y = \max\{2x-5; \min\{x; 3-2x\}\}$, взяв ту часть «первого» графика, которая лежит выше соответствующей части «второго» графика, и ту часть «второго» графика, что лежит выше соответствующей части «первого» графика (см. рис. 3).

Обратите внимание на то, что успех в решении задачи был связан с переходом на геометрический

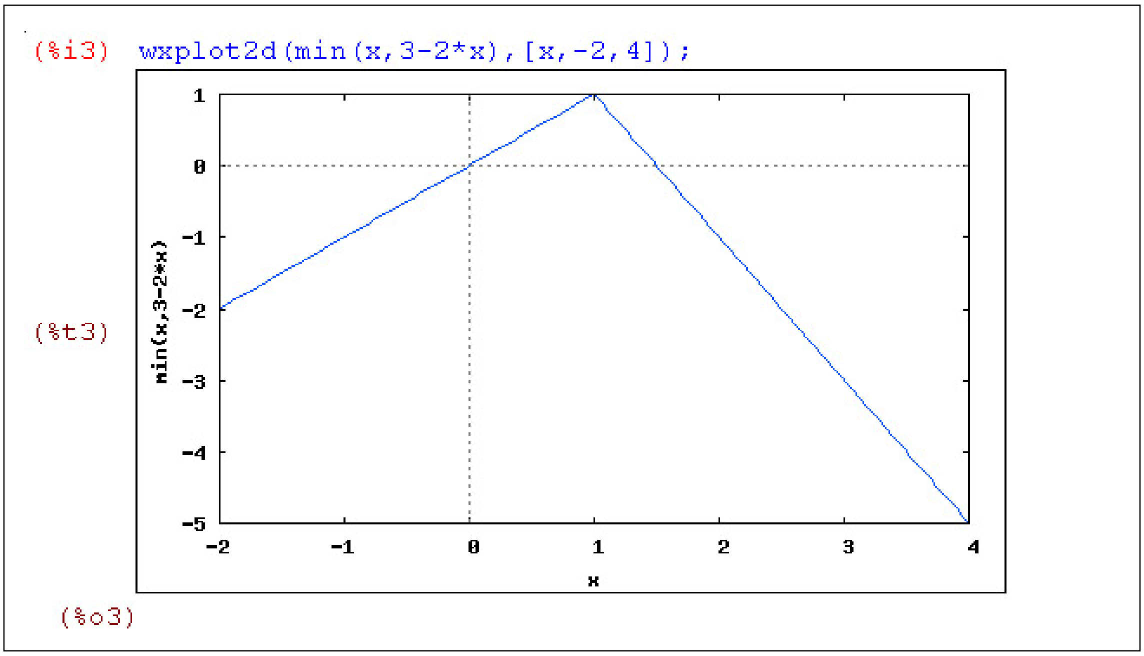


Рис. 2

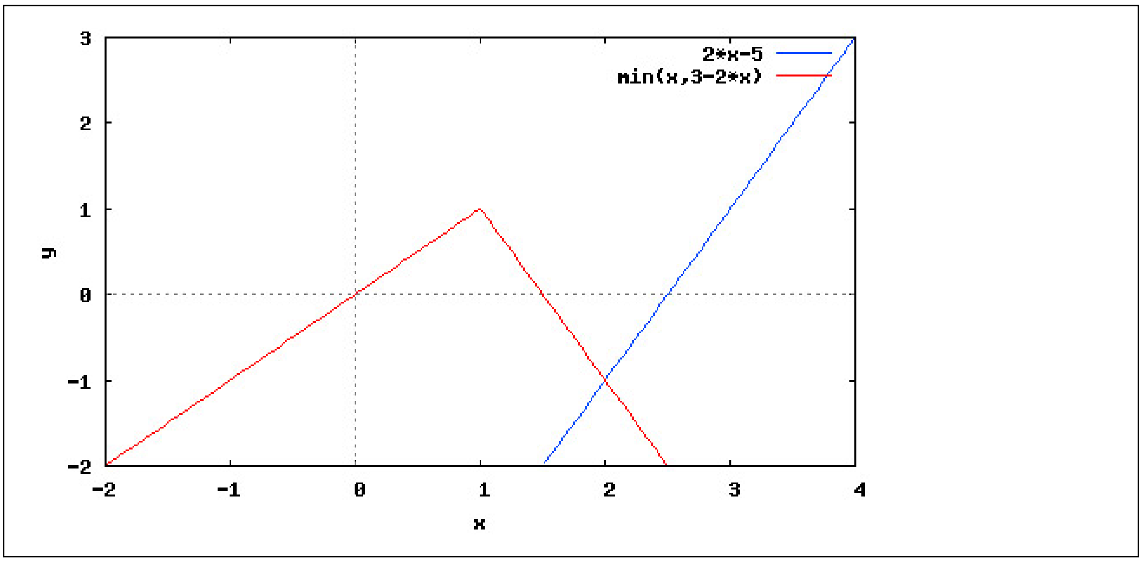


Рис. 3

язык, после которого задачу смог решить даже компьютер. Одним из качеств, которое надо воспитывать в старших классах школы и, тем более, в вузе, как пишут в своей статье «О тенденциях и перспективах математического образования» Л.Д. Кудрявцев, А.И. Кириллов и др., является «умение правильно сформулировать задачу, которую поручается выполнить компьютеру».

Следующая задача являет собой пример использования схожей методической идеи. Несмотря на то, что (как вы далее увидите) ее решение нетрудно получить и без компьютера, редко кто из учащихся возьмется его провести, а если и возьмется, то вряд ли проведет без ошибок. Причина в том, что для получения верного ответа «без картинки» необходима точность рассуждений, подкрепленная техникой преобразований. Наконец, все проведенное рассуждение надо еще перенести «на бумагу».

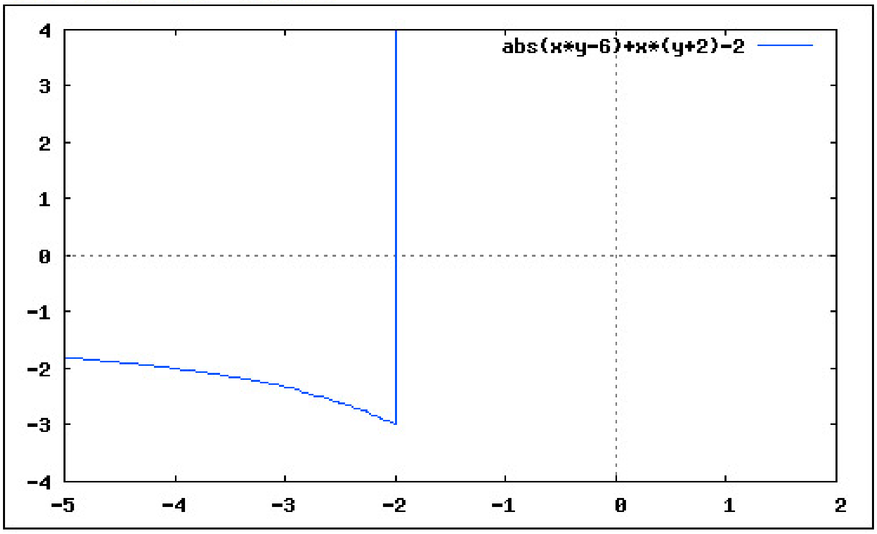
Задача 2. *Найдите все значения параметра a, при которых уравнение* $|ax-6| = 2-(a+2)x$ *имеет единственное решение.*

Воспользуемся следующим обобщением идеи решения предыдущей задачи: количество (при заданном значении a) решений уравнения $f(x,a)=0$ совпадает с числом точек пересечения кривой, заданной уравнением $f(x,y)=0$, с прямой $y=a$. К сожалению, вряд ли кто-нибудь из ребят сможет верно изобразить кривую, заданную уравнением $|xy-6|+(y+2)x-2=0$. Попросим сделать это компьютер, а далее, имея картинку перед глазами, проведем независимое построение (рис. 4).

Ответ в задаче будет ясен, если мы поймем, что за кривая составляет часть изображенного на рисунке множества. Догадаться нетрудно: при $xy \geq 6$ это множество задается уравнением $2xy+2x=8$, или $y=4/x-1$, таким образом, оно является той частью гиперболы $y=4/x-1$, которая лежит в множестве, заданном неравенством $xy \geq 6$. Эта часть задается неравенством $x(4/x-1) \geq 6$, или $4-x \geq 6$, откуда $x \leq -2$. Значит, на рисунке изображена та часть гиперболы $y=4/x-1$, абсциссы точек которой удовлетворяют неравенству $x \leq -2$. Если $xy \leq 6$, то мы получаем уравнение $x=-2$, опять-таки, в предположении, что $(-2)y \leq 6$, или $y \geq -3$.

Автор должен признаться, что он так и решал эту задачу. Роль компьютера, опять-таки, прежде всего – психологическая, картинка показала нам, что задачу не так уж и трудно решить!

```
(%i1) load("implicit_plot")$
(%i2) wximplicit_plot(abs(x*y-6)+(y+2)*x-2,
      [x,-5,2],[y,-4,4]);
(%t2)
```




```
(%o2)
```

Рис. 4

Maxima (в отличие от Mathematica) не умеет решать уравнения, в записи которых присутствует модуль некоторых выражений. Попросим ее решить уравнение $|x-1|=2x-1$.

```
(%i1) solve(abs(x-1)-2*x+1,x);
```

(%o1) $[\ x=\frac{|x-1|+1}{2}\ ]$

Все, что мы увидели – это малоосмысленное преобразование данного уравнения. Безусловно, это является недостатком рассматриваемого пакета, однако, с точки зрения его использования для обучения математике, это, наоборот – его достоинство.

В главе 1 книги [2] автор писал, что «по-настоящему можно проверить, понятен ли метод (рассуждения), на примере решения задач с параметрами». Если под руками есть компьютер, то можно проверить понимание метода, предложив написать программу, его реализующую.

Задача 3. *Напишите на языке пакета Maxima программу для решения уравнений вида* $|f(x)|=g(x)$, *где* $f(x)$ *и* $g(x)$ *– некоторые рациональные алгебраические выражения.*

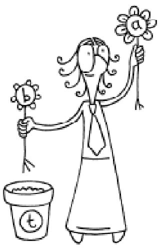
```
(%i1) eqwmod(f,g):=block([z,s:[],t],
      z:append(solve(f(x)+g(x),x),solve(f(x)-g(x),x)),
      for a in z do(t:subst(a,x), if g(t)>=0
      then s:append(s,[t])),return(s))$
(%i2) f(x):=x-1$ g(x):=2*x-1$ eqwmod(f,g);
```

(%o4) $[\frac{2}{3}]$

Рис. 5

Существуют два стандартных варианта решения подобных уравнений. Можно «раскрыть модуль», рассмотрев два случая: $f(x) \ge 0$ и $f(x) \le 0$. Есть другой вариант – ввести условие $g(x) \ge 0$. Мы пойдем вторым путем (см. рис. 5).

Объясним смысл оператора `subst(a,x)`. Дело в том, что, как вы уже могли заметить, значением оператора `solve` является не список решений соответствующего уравнения, а список, элементами которого являются «равенства» вида $x = x_i$. Поэтому для того, чтобы получить собственно значение x_i, нам надо осуществить подстановку $x = x_i$.



Значением оператора `subst(a,b,t)` является результат подстановки a вместо b в выражение t. При этом данный оператор может иметь синтаксическую форму `subst(b=a,t)`. Следовательно, значением оператора, к примеру, `subst(x=1,x)` и будет число 1.

Конечно, Maxima легко продемонстрирует нам графическую интерпретацию этой задачи (см. рис. 6).

Задачи «с модулями» сложны для учащихся тем, что при их решении всегда надо проводить *рассуждения*. Очень опасен с точки зрения обучения математике, так сказать, «рецептурный» подход, при котором вводятся определенные типы уравнений (неравенств), для каждого из которых указывается формальный метод их решения. Разумнее, вместо этого, на первых порах использовать компьютер, для того чтобы приводить *графическую интерпретацию* каждой из рассматриваемых задач.

Бывают ситуации, когда задача станет ярче и интереснее для учащихся, если «автоматизировать» вычисления, необходимые для ее решения.

Задача 4. *Предположим, что числа* a_1, a_2, ... *образуют арифметическую прогрессию, а числа* b_1, b_2, ... *– геометрическую. Найдите первый член арифметической прогрессии, если известно, что* $a_5 = b_5$, $a_6 = b_6$, $a_7 + b_4 = 8$ *и сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна* 30.

Первый шаг решения состоит в том, чтобы свести данную задачу к решению некоторой системы уравнений. Для простоты положим $a_1 = a$, и $b_1 = b$, как обычно, через d и q обозначим, соответственно, разность арифметической прогрессии и знаменатель геометрической прогрессии. В результате мы получим следующую систему

$$\begin{cases} a + 4d = bq^4, \\ a + 5d = bq^5, \\ a + 6d + bq^3 = 8, \\ 2a + 9d = 6. \end{cases}$$

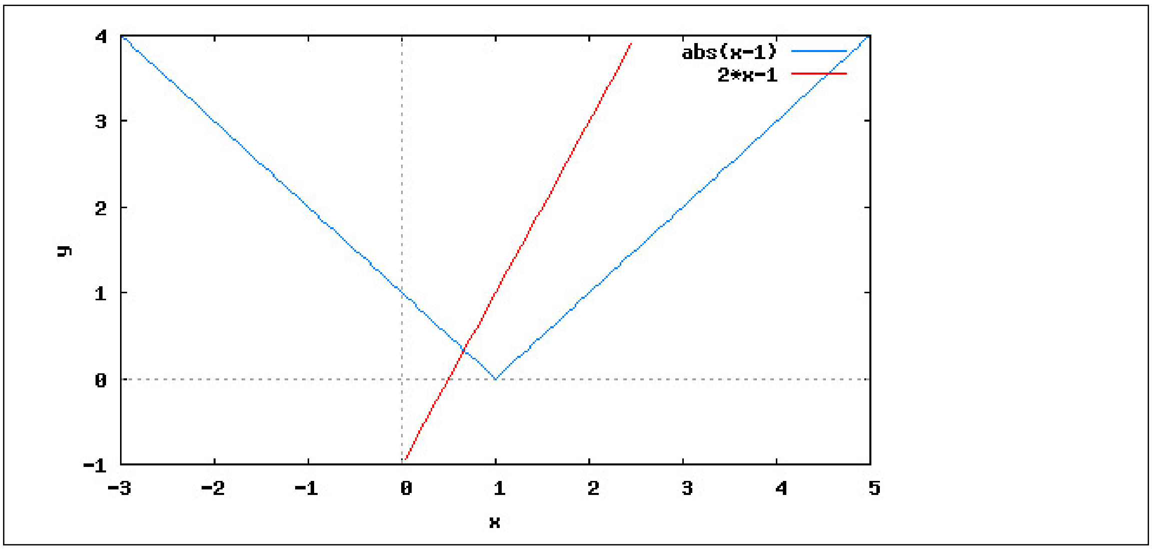
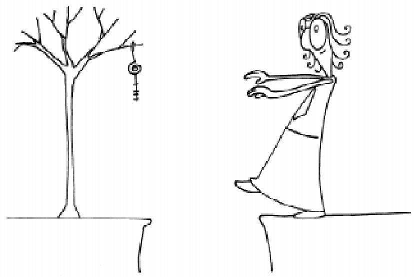


Рис. 6

Следующий шаг – чисто технический, из полученной системы надо найти возможные значения переменной *a*. Тем не менее, у учащихся он может вызвать серьезные затруднения (при этом невелика вероятность получения верного ответа), в итоге они потратят понапрасну много времени. Работа будет более продуктивной, если перед глазами у них будет ответ. Опять-таки, уверенность в «хорошем» ответе будет стимулировать решение (рис. 7).



Еще более ярким примером является следующая задача (предлагавшаяся в 1997 году на вступительных экзаменах в СПбГУ).

Задача 5. *Двое рабочих, выполнив половину задания, увеличили свои производительности, один на* $20\,\%$*, а другой – на* $16\,\%$*. В результате вторая половина задания была выполнена ими на один день быстрее, чем первая. Уложились ли рабочие с выполнением задания в двухнедельный срок?*

Обозначим через *x* и *y* производительности труда рабочих, а через *t* время, затраченное ими на выполнение первой половины задания. Их производительности при работе над второй половиной задания равны, соответственно, $6x/5$ и $29y/25$. Поскольку эту работу они выполнили за $t-1$ дней, то мы приходим к системе,

$$\begin{cases} t(x+y)=1/2, \\ (t-1)(6x/5+29y/25)=1/2. \end{cases}$$

Решим полученную систему относительно переменных *x* и *y* (см. рис. 8).

Конечно, вычисления можно провести «на бумаге», но уж слишком они, с одной стороны, рутинные, а с другой – утомительные.

Что же мы получили в результате? Обратите внимание, что по самому смыслу значения производительностей являются положительными числами. Значит, $4t<29$ и $t>6$. Поскольку вся работа была сделана за $2t-1$ дней, то на нее потребовалось не менее 11 дней и не более 13,5 дней. Значит, в двухнедельный срок рабочие уложились.

Решение задачи 1 урока 2 является собой хороший пример того, как следует применять пакеты символьных вычисле-

```
(%i1) solve([2*a+9*d-6,a+4*d-b*q^4,a+5*d-b*q^5,
      a+6*d+b*q^3-8],[a,d,b,q]);
```

$$\text{(\%o1)}\quad [[a=12,\ d=-2,\ b=64,\ q=\frac{1}{2}],\ [a=-\frac{21}{2},\ d=3,\ b=\frac{1}{54},\ q=3]]$$

Рис. 7

```
(%i1) factor(solve([t*(x+y)-1/2,
      (t-1)*(6*x/5+29*y/25)-1/2],[x,y]));
```

$$\text{(\%o1)}\quad [[x=-\frac{4t-29}{2(t-1)t},\ y=\frac{5(t-6)}{2(t-1)t}]]$$

Рис. 8

```
(%i1) factor(b*c*(x-a)^2/(a-b)/(a-c)+
      c*a*(x-b)^2/(b-c)/(b-a)+a*b*(x-c)^2/(c-a)/(c-b));
(%o1) x^2
```

Рис. 9

ний при обучении собственно алгебре. Продолжим начатую при ее решении тему.

Задача 6. *Упростите выражение*

$$\frac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}$$

и объясните полученный ответ.

Посмотрим сначала на ответ (рис. 9).

Для доказательства достаточно убедиться в том, что при x, равном a, b и c, данное выражение равно, соответственно, a^2, b^2 и c^2. При подстановке получаем выражение

$$\frac{ca(a-b)}{c-b}-\frac{ab(a-c)}{c-b}=\frac{a^2c-abc-a^2b+abc}{c-b}=a^2,$$

что и требовалось. При подстановке двух других значений вычисления аналогичны. Кстати, проведите эти вычисления на компьютере.

Подчеркнем еще раз, что с методической точки зрения полезнее формулировать *открытые* задания, не говоря – «докажите тождество», если в распоряжении учащихся есть средство, которое позволит им получить красивую формулу самостоятельно.

Задача 7. *Разложите на множители многочлен* $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ *и объясните полученный ответ.*

Конечно, можно непосредственно «раскрыть скобки», после чего надо будет «правильным образом» сгруппировать одночлены. Однако для того чтобы увидеть способ группировки, хорошо бы знать ответ (см. рис. 10).

Ответ получен, он прост, после чего будет нетрудно провести все вычисления «на бумаге». Посмотрим вот еще на что. Относительно переменной x перед нами квадратичный многочлен. Запишем его в стандартном виде, воспользовавшись еще одним оператором пакета Maxima (см. рис. 11).

Оператор `facsum(t,x)` запишет выражение t по степеням переменной x и при этом дополнительно произведет разложение на множители полученных коэффициентов.

Оператор `collectterms(t,x)` произведет приведение подобных членов относительно степеней переменной x.

Таким образом, получаем, что данное нам выражение может быть записано в

```
(%i1) factor((x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3);
(%o1) 3(y - x)(z - x)(z - y)
```

Рис. 10

```
(%i2) facsum((x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3,x);
(%o2) - 3 x(z - y)(z + y)+ 3 y z(z - y)+ 3 x^2(z - y)
```

Рис. 11

виде $3(z-y)(x^2-x(y+z)+yz)$. Стоящий в скобках квадратный трехчлен имеет своими корнями числа y и z, а потому является произведением $(x-y)(x-z)$. То, что корнями квадратного трехчлена являются числа y и z – очевидно, поскольку подставив, к примеру, y вместо x, мы получим тождественно равное нулю выражение $(y-z)^3+(z-y)^3$. С другой стороны, данный многочлен равен нулю при $y=z$, значит, он делится и на $y-z$. Все, что останется сделать, так это найти числовой коэффициент при произведении $(x-y)(y-z)(z-x)$.

Задача 8. *Найдите квадратный трехчлен, график которого проходит через точки M_i (x_i, y_i), i = 1, 2, 3.*

Не будем считать «руками». Удобно ввести переменные x_1, x_2, x_3, что делается посредством оператора `concat` (см. рис. 12).

Оператор `concat(a,b)` осуществляет слияние символьных строк *a* и *b*.

Аналогичным образом введем переменные y_1, y_2, y_3. Составим систему для поиска коэффициентов квадратного трехчлена и решим ее (рис. 13).

Теперь посмотрим на найденные значения *a*, *b* и *c* коэффициентов квадратичной функции (рис. 14).

Полученные значения коэффициентов можно сравнить с коэффициентами интерполяционного многочлена Лагранжа (см. [3]), а можно поставить и другие вопросы. К примеру, ясно, что означает положительность коэффициента *a* с точки зрения свойств квадратичной функции. Однако, какое геометрическое свойство расположения точек


```
(%i1) xx:makelist(concat(x,i),i,1,3);
(%o1) [ x1 , x2 , x3 ]
```

Рис. 12

```
(%i2) yy:makelist(concat(y,i),i,1,3)$
      t:makelist(a*xx[i]^2+b*xx[i]+c-yy[i],i,1,3)$
      cc:factor(solve(t,[a,b,c]))$
```

Рис. 13

```
(%i5) a:subst(cc,[a,b,c])[1];
```

(%o5) $$\frac{x2\,y3-x1\,y3-x3\,y2+x1\,y2+x3\,y1-x2\,y1}{(x2-x1)(x3-x1)(x3-x2)}$$

```
(%i6) b:subst(cc,[a,b,c])[2];
```

(%o6) $$-\frac{x2^2\,y3-x1^2\,y3-x3^2\,y2+x1^2\,y2+x3^2\,y1-x2^2\,y1}{(x2-x1)(x3-x1)(x3-x2)}$$

```
(%i7) c:subst(cc,[a,b,c])[3];
```

(%o7) $$\frac{x1\,x2^2\,y3-x1^2\,x2\,y3-x1\,x3^2\,y2+x1^2\,x3\,y2+x2\,x3^2\,y1-x2^2\,x3\,y1}{(x2-x1)(x3-x1)(x3-x2)}$$

Рис. 14

$M_i\ (x_i,\ y_i)$, $i = 1, 2, 3$ равносильно положительности этого коэффициента? Пусть, для определенности, $x_1 < x_2 < x_3$. Убедитесь в том, что $a > 0$ тогда и только тогда, когда точка M_2 лежит под отрезком с концами в точках M_1 и M_3.

Компьютер может также облегчить учащимся решение задач на делимость целых чисел.

Задача 9 ([3]). *Докажите, что сумма кубов трех последовательных целых чисел кратна* 9.

Так как

```
(%i1) factor(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3);
(%o1) 3(k+1)(k^2+2k+3)
```

то если $k+1$ не делится на 3, то делится на 3 число $k\,(k+2) + 3$, поэтому сумма кубов делится на 9.

Задания для самостоятельной работы

1. Напишите процедуру для нахождения решений уравнений вида

$$|f(x)| + |g(x)| = h(x).$$

2. Найдите условия на коэффициенты кубического многочлена $p(x)$, для которого функция $y = p(\sin x)$ имеет период $2\pi/3$.

3. Найдите геометрическую прогрессию наибольшей длины, все члены которой являются семизначными натуральными числами.

4. Каких чисел больше среди n-значных натуральных чисел: тех, в записи которых имеется единица, или же тех, в записи которых она отсутствует?

5. Решите уравнение $ax + |x-3| = 1$ и приведите его графическую интерпретацию.

6. Разложите на множители многочлен $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$.

7. Напишите процедуру для поиска всех рациональных корней многочлена, коэффициенты которого являются целыми числами.

8. Дополните следующее вычисление рассуждением, из которого будет следовать решение задачи 9, отличное от приведенного выше.

```
(%i2) factor((k+2)^3-(k-1)^3);
(%o2) 9(k^2+k+1)
```

Ответы и решения заданий для самостоятельной работы урока 3

1. Пусть $n > k$. Для краткости введем обозначение $a_p = 2^p - 1$. Так как $(2^n-1) - 2^{n-k}(2^k-1) = 2^{n-k} - 1$, то наибольший общий делитель чисел a_n и a_k равен наибольшему общему делителю чисел a_k и a_{n-k}. В результате мы получим, что искомый НОД – это число a_d, где d есть наибольший общий делитель n и k. Кстати, найдите наибольший общий делитель чисел, записанных, соответственно, n и k единицами.

2. Как видно из следующего вычисления, число, состоящее из 19 единиц, является простым.

```
(%i1) x:11111$ i:5$ do if primep(x) then return(i)
      else (x:10*x+1,i:i+1);
(%o3) 19
```

3. Интереснее даже посмотреть на частоты первых цифр у первых 1000 степеней двойки.

```
(%i2) a:makelist(0,i,1,9)$ x:1$ thru 1000 do
      (x:2*x,t:first(intdig(x)),a[t]:a[t]+1)$
      a;
(%o5) [301, 176, 125, 97, 79, 69, 56, 52, 45]
```

Элементами списка *a* является количество раз, когда запись степени 2 начиналась, соответственно, с 1, 2, ..., 9. Чтобы получить частоты, надо каждое из этих чисел разделить на 1000. А теперь посмотрите на следующую табличку, содержащую значения десятичных логарифмов дробей $\frac{k+1}{k}$, k = 1, 2, ..., 9.

```
(%i6) fpprintprec:5$
      makelist(log((i+1)/i)/log(10),i,1,9),numer;
(%o7) [0.301, 0.176, 0.125, 0.0969, 0.0792, 0.0669, 0.058, 0.0512, 0.0458]
```

Красивые совпадения, не правда ли? (См. задачу 7.15 в [1] и ее последующее обсуждение.)

4. Список *t* содержит количества трехпозиционных чисел, сумма цифр которых равна, соответственно, 0, 1, ..., 27. Рассмотрим, к примеру, все такие числа, сумма цифр которых равна 5.

```
(%i4) t[6];
(%o4) 21
```

Как вы видите, их имеется 21. Обозначим их через $n_1^{(5)}, n_2^{(5)}, \ldots, n_{21}^{(5)}$. Тогда, записав рядом любую пару $n_i^{(5)} n_j^{(5)}$, мы получим $21^2 = 441$ счастливых номеров, в которых сумма первых трех цифр и сумма последних трех цифр равна 5. Следовательно, количество всех счастливых билетов равно сумме квадратов элементов списка *t*. Следует только иметь в виду, что, поскольку по умолчанию элементы списка нумеруются, начиная с 1, то t_i равно количеству трехпозиционных чисел, сумма цифр которых равна $i-1$.

5. Как вы видели, для вычисления F_3 нужны 2 сложения, для вычисления F_4 нужны 4 сложения. Так как $F_5 = F_4 + F_3$, то для вычисления этого числа нам потребуется $4+2+1=7$ сложений. Аналогичным образом находим, что для вычисления F_6 нужно 12 сложений. Получим теперь общую формулу. Обозначим через s_n число сложений, нужное для вычисления *n*-го числа Фибоначчи. Как вы видели, справедливо соотношение $s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + 1$, при этом $s_0 = s_1 = 0$. Из проведенных вычислений возникает предположение, что $s_n = F_n - 1$. Проведем доказательство по индукции. Действительно, $s_{n-1} + s_{n-2} + 1 = F_{n-1} - 1 + F_{n-2} - 1 + 1 = F_n - 1$.

6. К примеру, для вычисления x^{17} нам потребуется не 16, а всего 5 умножений. В этом и состоит идея: так как 17 = 1 + 2 · 2 · 2 · 2, то можно последовательно возвести *x* в квадрат, еще раз в квадрат, и так всего 4 раза, получив x^{16}, чтобы затем, умножив результат на *x*, получить x^{17}. Для нахождения x^{1001} потребуются всего 15 умножений! Для этого запишем, что $1001 = 1 + 2\cdot 2\cdot 2\cdot(1 + 2\cdot 2\cdot(1 + 2\cdot(1 + 2\cdot(1 + 2\cdot(1+2)))))$. В силу этого имеем равенство $x^{1001} = (((((((x\cdot x^2)^2\cdot x)^2\cdot x)^2\cdot x)^2)^2\cdot x)^2)^2)^2\cdot x$.Теперь напишем процедуру `pow(x,n)`. Если число *n* четно, то полагаем $x^n = (x^{n/2})^2$, если оно нечетно, то $x^n = x\cdot x^{n-1}$.

```
(%i1) pow(x,n):= if n=1 then x elseif oddp(n)
      then x*pow(x,n-1) else pow(x,n/2)^2$
```

Проверим скорость ее работы, возведя в сотую степень все числа от 1 до 1000.

```
(%i2) pow(makelist(i,i,1,1000),100)$ time(%o2);
(%o3) [0.77]
```

Процедура, в которой степени вычисляются последовательно, работает медленнее.

```
(%i4) pow1(x,n):=if n=1 then x else x*pow1(x,n-1)$
(%i5) pow1(makelist(i,i,1,1000),100)$ time(%o5);
(%o6) [2.26]
```

Конечно, разница кажется не очень большой, однако и 100 – не очень большое число.

Литература

1. *Иванов О.А.* Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009. 384 с.

2. *Иванов О.А.* Задачи по алгебре и началам анализа. СПб: БХВ-Петербург, 2005. 384 с.

3. *Пратусевич М.Я., Столбов К.М., Головин А.Н.* Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. Профильный уровень. М.: Просвещение, 2009. 416 с.

Иванов Олег Александрович, профессор, доктор педагогических наук и кандидат физико-математических наук, профессор кафедры общей математики и информатики СПбГУ.