Агекян Гагик Ворошевич

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА

Виртуальные лаборатории по геометрии или программы по динамической геометрии являются мощным средством для изучения и преподавания геометрии. Они могут применяться по-разному (см., например [1–4]), в частности, с их помощью можно обнаружить геометрические свойства, которые трудно или невозможно обнаружить традиционными средствами, тем более, если речь идет о «динамических» свойствах геометрических фигур.

О таком примере из моей практики я и хочу рассказать.

При подготовке иллюстрацию к теореме Эйлера[1] при помощи программы «The Geometer's Sketchpad»[2], у меня возникло желание посмотреть, какие следы оставляют ортоцентр, центроид и инцентр треугольника, когда одна вершина треугольника движется по окружности, описанной около данного треугольника. В результате получилось удивительная и красивая картина, похожая на глаз (я бы назвал это «глазом Эйлера», см. рис. 1).

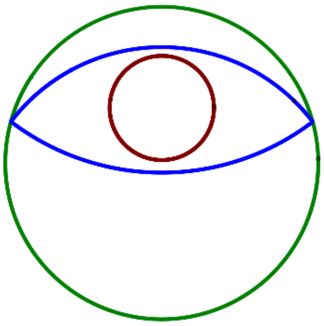

Рис. 1

Наблюдения показали, что это не случайность. Возникла гипотеза, что след ортоцентра есть окружность, след центроида – другая окружность, а след инцентра – две дуги некоторых окружностей.

Экспериментируя в среде «The Geometer's Sketchpad», я сделал гипотезы относительно радиусов и центров этих окружностей, сформулировал и доказал следующие теоремы:

Теорема 1. *Расстояние точки пересечения высот (или их продолжений) H треугольника ABC от точки O_1, симметричной точки O относительно прямой AC, равно R.* (O есть центр окружности описанной около треугольника ABC, а R – радиус этой окружности).

Теорема 2. *Любая точка H_1 (кроме двух точек, которые получаются из точек A и C, переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$) окружности с центром в точке O_1 и радиусом R, является точкой пересечения высот (или их продолжений) некоторого треугольника AB_1C, где B_1 некоторая точка окружности описанной около треугольника ABC.* (O, O_1 и R те же самые, что и в теореме 1).

[1] Центроид лежит на отрезке, соединяющем ортоцентр и центр описанной окружности, и делит его в отношении 2:1.

[2] В России этот продукт называется «Живая математика».

Теорема 3. *Пусть E и F являются точками пересечения описанной окружности треугольника ABC и серединного перпендикуляра стороны AC. Если вершина B является внутренней точкой дуги AEC, то $FK = FC$, где K есть точка пересечения биссектрис треугольника ABC.*

Теорема 4. *Любая внутренняя точка K_1 дуги AC окружности с центром F и радиусом FC, находящаяся внутри окружности, описанной около треугольника ABC, является точкой пересечения биссектрис треугольника AB_1C, где вершина B_1 принадлежит дуге AEC.* (E и F те же самые точки, что и в теореме 3).

Теорема 5. *Расстояние от точки M пересечения медиан треугольника ABC до точки P, которая делит перпендикуляр, проведенный из точки O к стороне AC, в отношении* 2:1*, считая от точки O, равен* $R/3$. (O и R те же самые, что и в теореме 1).

Теорема 6. *Любая точка M_1 окружности с центром в точке P и радиусом* $R/3$*, который не принадлежит стороне AC, является точкой пересечения медиан некоторого треугольника AB_1C, где B_1 – некоторая точка окружности, описанной около треугольника ABC.* (P и R те же самые, что и в теореме 5).

Хочу отметить, что, зная динамические свойства замечательных точек треугольника, можно составить интересные и красивые задачи, которые легко решаются с использованием этих же свойств.

Вот некоторые из них.

Задача 1. Дана вершина A треугольника ABC и прямая, содержащая высоту, проведенную из вершины A. Дан также отрезок, длина которого равна расстоянию от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC. Используя только циркуль, построить точку пересечения высот (или их продолжений), если известно, что угол A треугольника ABC острый.

Задача 2. Даны точки, симметричные центру окружности, описанной около треугольника ABC, относительно сторон треугольника. Построить точку пересечения высот (или их продолжений) треугольника ABC.

Задача 3. Дана окружность, описанная около треугольника ABC, а также биссектриса угла ABC (луч). Используя только циркуль, построить центр окружности вписанной в треугольник.

Задача 4. Даны точки, которые делят перпендикуляры, проведенные из центра O окружности, описанной около треугольника ABC, к сторонам треугольника, в отношении 2:1, считая от точки O. Построить точку пересечения медиан треугольника ABC.

Эксперименты, которые помогли уточнить, где находятся центры окружностей и величины их радиусов, могут служить сценариями для проведения интересных лабораторно-исследовательских работ, которые будут хорошим средством для усиления прикладной и практической направленности обучения. Сюжеты исследовательских задач можно найти и в работе [5].

В качестве примера рассмотрим задачу ортоцентра треугольника. В конце приведем доказательства теорем 1 и 2.

ОРТОЦЕНТР ТРЕУГОЛЬНИКА

Возьмем окружность и впишем в нее треугольник ABC.

Построим точку пересечения высот (или их продолжений).

Оставляя неподвижными вершины A и C треугольника, вершину B перемещаем по окружности, описанной около треугольника, при этом получаем след ортоцентра H

Используя только циркуль...

Табл. 1

a \ R	3		7	
	r	d	r	d
1	3,00	1,01	7,04	1,02
2	3,00	1,98	7,04	2,00
2,5	2,98	2,51	7,05	2,51

треугольника ABC (см. рис. 2).

Полученная кривая похожа на окружность.

Но визуальные наблюдения нуждаются в экспериментальном подтверждении. А как это сделать?

Для этого создадим инструмент, который строит окружность и центр окружности по трем заданным точкам. В программе «The Geometer's Sketchpad» есть такая возможность.

Используя созданный инструмент, строим окружность по трем точкам следа ортоцентра (см. рис. 3). Результат эксперимента можно считать положительным.

Из соображения симметрии можем предположить, что центр этой окружности (точка O_1) находится на серединном перпендикуляре отрезка AC. Но где именно? Местонахождение центра этой окружности и величина радиуса могут зависеть от радиуса окружности, описанной около треугольника, и от расстояния стороны AC от центра этой окружности. Поочередно меняя эти параметры и измеряя радиус и расстояние центра предполагаемой окружности от стороны AC, получаем следующие значения (см. табл. 1). Здесь R – радиус окружности, описанной около треугольника, a – расстояние стороны AC от центра окружности, описанной около треугольника, r – радиус предполагаемой окружности (следа), d – расстояние центра предполагаемой окружности от стороны AC.

Данные таблицы с учетом погрешности построений (след имеет толщину) приводят к мысли, что r зависит только от R, а d – только от a. Кроме того, значения r почти не отличаются от значений R, а значения d – от значений a.

Надо обратить внимание и на то, что точки O и O_1 находятся по разные стороны от отрезка AC.

Таким образом, мы приходим к гипотезе, что центр предполагаемой окружности (следа) и центр окружности, описанной около треугольника, симметричны относительно прямой AC, а радиус предполагаемой окружности (следа) равен R.

Чтобы укрепить наши предположения, можно построить предполагаемую окружность (это построение уже будет точным) и посмотреть, движется ли ортоцентр треугольника по этой окружности, когда вершина B движется по окружности, описанной около треугольника ABC. При этом можем менять как R, так и a. Эксперименты подтверждают наши предположения (см. рис. 4).

Итак, ясно, что для формулировки гипотезы надо найти ответы на разные воп-

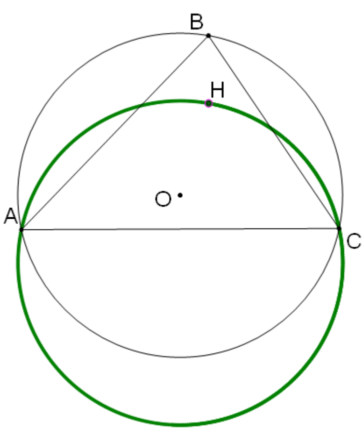

Рис. 2

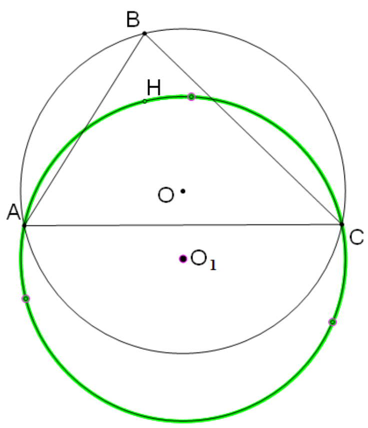

Рис. 3

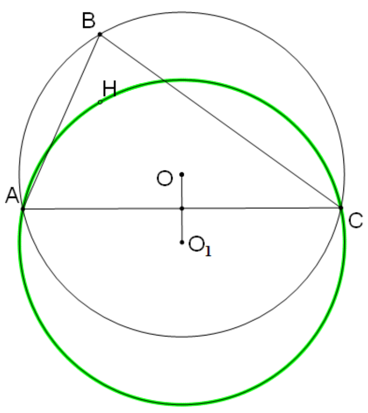

Рис. 4

росы, решить некоторые подзадачи, попытаться всесторонне изучить задачу. Но лучше, если все это ученики будут делать самостоятельно. Конечно, при необходимости им надо помогать, задать наводящие вопросы, но основную работу они должны делать сами. Тогда это будет учебно-исследовательская, созидательная работа, и ученики получат огромную пользу и удовольствие.

Перейдем к доказательству теорем.

Центр и радиус окружности, описанной около треугольника ABC, соответственно обозначим через O и R.

Доказательство теоремы 1. Если $\angle B = 90^\circ$, то точка H совпадает с точкой B, а точка O_1 совпадает с точкой O (см. рис. 5). И тогда очевидно, что $O_1H = OB = R$.

Если $\angle A = 90^\circ$ (или $\angle C = 90^\circ$), то точка H совпадает с точкой A (или с точкой C). Так как прямая AC есть серединный перпендикуляр отрезка OO_1, то $AO = AO_1$ (см. рис. 6). Следовательно $HO_1 = AO_1 = AO = R$.

Докажем, что если треугольник ABC не прямоугольный, то $HD = DE$, где D есть точка пересечения прямых BH и AC, а E есть точка пересечения прямой BH и окружности, описанной около треугольника ABC (отличной от точки B).

Рассмотрим три случая.

1) треугольник ABC остроугольный (см. рис. 7);

2) угол B треугольника ABC тупой (см. рис. 8);

3) угол A треугольника ABC тупой (см. рис. 9).

В первом и втором случаях $\angle ABE = 90^\circ - \angle BAC$, $\angle FCA = 90^\circ - \angle BAC$.

Но визуальные наблюдения нуждаются в экспериментальном подтверждении.

Следовательно, $\angle ABE = \angle FCA$. Кроме того, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, $\angle ABE = \angle ACE$. Таким образом, $\angle FCA = \angle ACE$. Из последнего следует равенство прямоугольных треугольников HDC и EDC. А из этого следует, что $HD = DC$.

В третьем случае $\angle ABE + 90^\circ = \angle BAC$, $\angle FCA + 90^\circ = \angle BAC$. И снова будем иметь, что $\angle ABE = \angle FCA$. Вписанные углы ABE и ACE равны, так как опираются на одну и ту же дугу. Из последнего следует равенство прямоугольных треугольников HDC и EDC. Следовательно, $HD = DC$.

Докажем, что $BH = 2a$, где a есть расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны AC. Несмотря на то, что для прямоугольных треугольников теорема доказана, заметим, что и тогда $BH = 2a$.

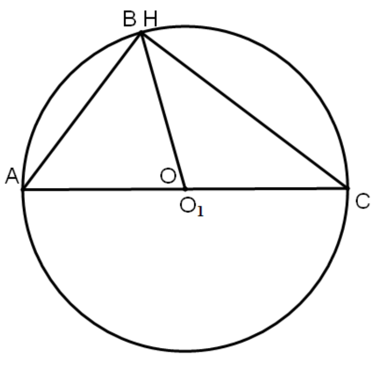

Рис. 5

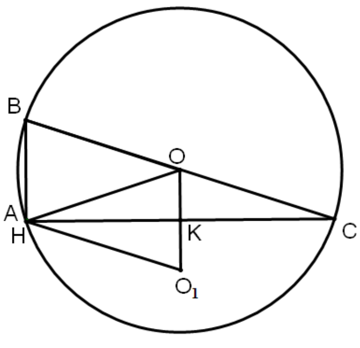

Рис. 6

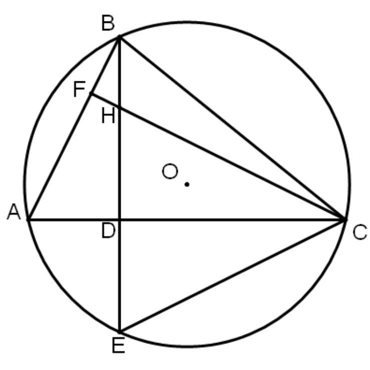

Рис. 7

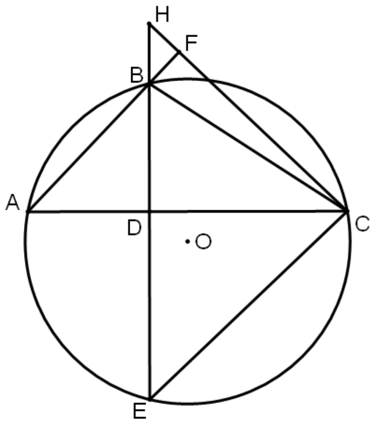

Рис. 8

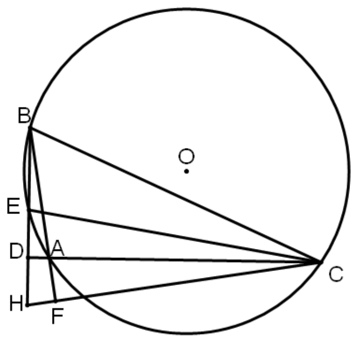

Рис. 9

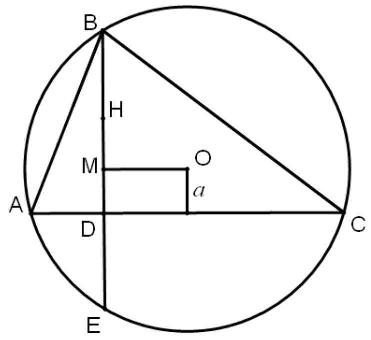

Рис. 10

Возьмем $OM \perp BE$. Тогда $MD = a$. Кроме того, OM делит пополам хорду BE, то есть $BM = ME$. Как уже доказали, $HD = DC$. Обозначим $HD = DC = b$. Тогда в случае 1) вместо $BM = ME$, будем иметь $b - a + BH = b + a$ (см. рис. 10). Следовательно, $BH = 2a$. В случае 2) вместо $BM = ME$, будем иметь $b - BH + a = b - a$ (см. рис. 11). Следовательно, $BH = 2a$. В случае 3) вместо $BM = ME$, будем иметь $BH - b - a = a - b$ (см. рис. 12). Следовательно, $BH = 2a$.

Теперь, обращая внимание на расположение точки H, можно сказать, что точка H получается из точки B переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$. А это означает, что четырехуголник $HBOO_1$ есть параллелограмм. Следовательно $O_1H = OB = R$.

Нетрудно убедиться, что, если точка B находится на срединном перпендикуляре к стороне AC (то есть когда точки H, B, O, O_1 находятся на одной прямой), снова $O_1H = R$.

Теорема 1 доказана.

Верно и обратное.

Доказательство теоремы 2. В качестве B_1 возьмем точку, которая получается из точки H_1 переносом на вектор $-2\overrightarrow{OO_1}$ (см. рис. 13). Тогда B_1 не совпадет ни с точкой A, ни с точкой C. Кроме того, четырехугольник $H_1B_1OO_1$ будет параллелограммом. Следовательно, $OB_1 = OH_1 = R$. А это значит, что B_1 некоторая точка окружности, описанной около треугольника ABC.

Для треугольника AB_1C, как было установлено при доказательстве теоремы 1, точка пересечения высот (или их продолжений) H_2 получается из точки B_1 переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$. Так как B_1 получена из

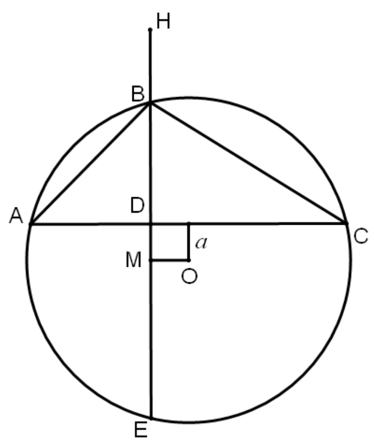

Рис. 11

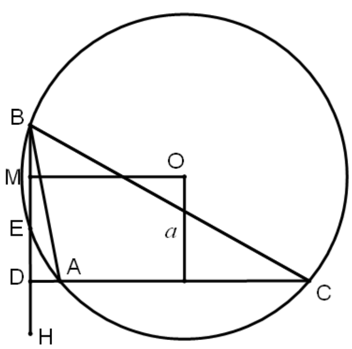

Рис. 12

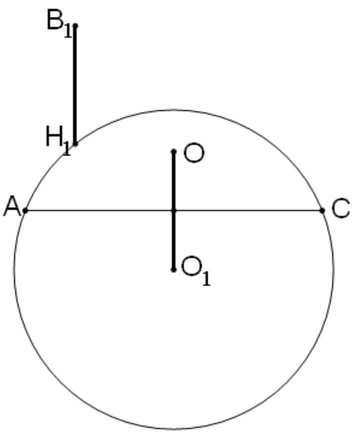

Рис. 13

точки H_1 переносом на вектор $-2\overrightarrow{OO_1}$, то точки H_2 и H_1 совпадают, то есть H_1 есть точка пересечения высот (или их продолжений) треугольника AB_1C.

Из теорем 1 и 2 получаем следствие:

Следствие. *Если две вершины треугольника неподвижны, а третья вершина движется по окружности, описанной около треугольника с центром в точке O и радиусом R, то точки пересечения высот (или их продолжений) треугольников заполняют окружность (кроме двух точек, которые получаются из концов неподвижной стороны, переносом на вектор* $2\overrightarrow{OO_1}$*), центр которой* O_1 *есть точка, симметричная точке O относительно неподвижной стороны, а радиус равен R.*

Заметим, что когда подвижная вершина совпадает с каким-то концом неподвижной стороны, то мы имеем дело не с треугольником, а с отрезком. И если будем в таких случаях считать, что точка пересечения высот (или их продолжений) есть точка, которая получается из этого же конца неподвижной стороны переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$, то следом ортоцентра (с вышесказанным обобщением) будет замкнутая кривая.

Литература

1. *Кобельский В.Л., Степанова Е.В.* Компьютерная обучающая система «Планиметрия 7–9» // Компьютерные инструменты в образовании, 2001. № 2. С. 58–67.

2. *Храповицкий И.С.* Эвристический полигон для геометрии // Компьютерные инструменты в образовании, 2003. № 1. С. 15–26.

3. *Петриченко Д.Н., Поздняков С.Н., Рыжик В.И.* Электронная рабочая тетрадь по геометрии для 9 класса // Компьютерные инструменты в образовании, 2006. № 2. С. 58–64.

4. *Дубровский В.Н., Лебедева Н.А., Белайчук О.А.* 1С: Математический конструктор – новая программа динамической геометрии // Компьютерные инструменты в образовании, 2007. № 3. С. 47–56.

5. *Иванов С.Г., Люблинская И.Е., Рыжик В.И., Ron Armontrout, Lauire Boswell, Tim Corica.* Исследовательские сюжеты для среды «The Geometer's Sketchpad» // Компьютерные инструменты в образовании, 2003. № 3. С. 14–20.

Агекян Гагик Ворошевич,
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и математического моделирования Российско-Армянского (Славянского) университета,
г. Ереван, Армения.