ПРЕДМЕТНОЕ ОБУЧЕНИЕ
ОТКРЫТОЕ ПО В ШКОЛЕ

Иванов Олег Александрович

MAXIMA В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ. УРОК 2. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С MAXIMA

Как вы могли понять из предыдущей статьи, одна из идей использования пакетов компьютерной алгебры состоит в их применении для проведения вычислений, позволяющих понять – что же нам в данном случае надо доказывать. Второй урок посвящен развитию этой идеи. На нем, конечно, продолжится знакомство с возможностями пакета Maxima.

Порой, взглянув на результат проведенных компьютером вычислений, мы понимаем, что не стоит решать задачу «в лоб».

Задача 1. *Упростите выражение*

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}.$$

Оказывается, что данное выражение равно единице при любых a, b, c и x (см. рис. 1)! Конечно, мы можем провести упрощение самостоятельно, приведя дроби к общему знаменателю, затем раскрыв скобки, потом разложив полученное выражение на множители. Кстати, последнее действие не очень просто, если не знать предварительно, какие множители должны в нем содержаться. Компьютер нам уже помог, показав, что в числителе выражения, полученного после приведения дробей к общему знаменателю, стоит ни что иное, как произведение $(a-b)(b-c)(c-a)$. Другое дело, что человек отличается от компьютера тем, что он умеет мыслить.

Давайте посмотрим на данное выражение как на многочлен от переменной x. Ясно, что его степень не выше двух. Однако, как следует из проведенных компьютером вычислений, в действительности он постоянен. Каким образом можно доказать, что многочлен степени не выше двух есть константа? Проверив, что он принимает одно и то же значение в трех различных точках! Подставив $x = a$, мы получим сумму $0 + 1 + 0 = 1$, такое же число получится при подстановке $x = b$ и $x = c$, откуда и следует, что это выражение равно 1 при всех x.

Обратите внимание, что тем самым одновременно доказаны три следующих тождества:

```
(%i1)  t:(x-a)*(x-b)/((c-a)*(c-b))+
       (x-b)*(x-c)/((a-b)*(a-c))+
       (x-a)*(x-c)/((b-a)*(b-c))$ rat(t);
(%o2)  1
```

Рис. 1

$$\frac{1}{(c-a)(c-b)}+\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}=0,$$

$$\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}+\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{a+c}{(b-a)(b-c)}=0,$$

$$\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}=1.$$

Действительно, выражения, стоящие в левых частях этих тождеств, являются, соответственно, коэффициентами при x^2, $-x$ и свободным членом многочлена степени не выше 2, который в действительности тождественно равен 1. Попробуйте доказать эти тождества непосредственными вычислениями.

Кстати, приведенное решение порождает следующий вопрос. Да, «очевидно», что если многочлен степени не выше двух принимает одно и то же значение в трех различных точках, то он есть константа. Но сможете ли вы это *доказать*, *обобщить*?

Для решения следующей задачи важно умение «читать» свойства функции по ее графику с тем, чтобы затем провести логическое рассуждение. А график пусть нам построит компьютер.

Задача 2. *Определите число решений уравнения* $x^3-2x^2-1=0$.

Кубическое уравнение имеет от одного до трех (действительных) корней. Число корней уравнения $f(x)=a$ связано с количеством промежутков монотонности рассматриваемой функции. Если вы учитесь в 11 классе, то вы можете решить задачу, исследовав поведение функции $f(x)=x^3-2x^2-1$ при помощи производной. Однако делать это не обязательно. Взглянем на график $y=x^3-2x^2$ (см. рис. 2).

Ответ в задаче теперь, во-первых, очевиден, а, во-вторых, его несложно и обосновать. Вид графика подсказывает идею рассуждения. Так как $x^2(x-2)\le 0$ при $x\le 2$, то на промежутке $(-\infty; 2]$ данное уравнение решений не имеет. Если же $x\ge 2$, то при увеличении значения x растут также, и x^2, и $x+2$, а поскольку они неотрицательны, то растет также и их произведение. Значит, рассматриваемая функция возрастает на промежутке $[2;+\infty)$, следовательно, данное уравнение имеет только одно (действительное) решение.

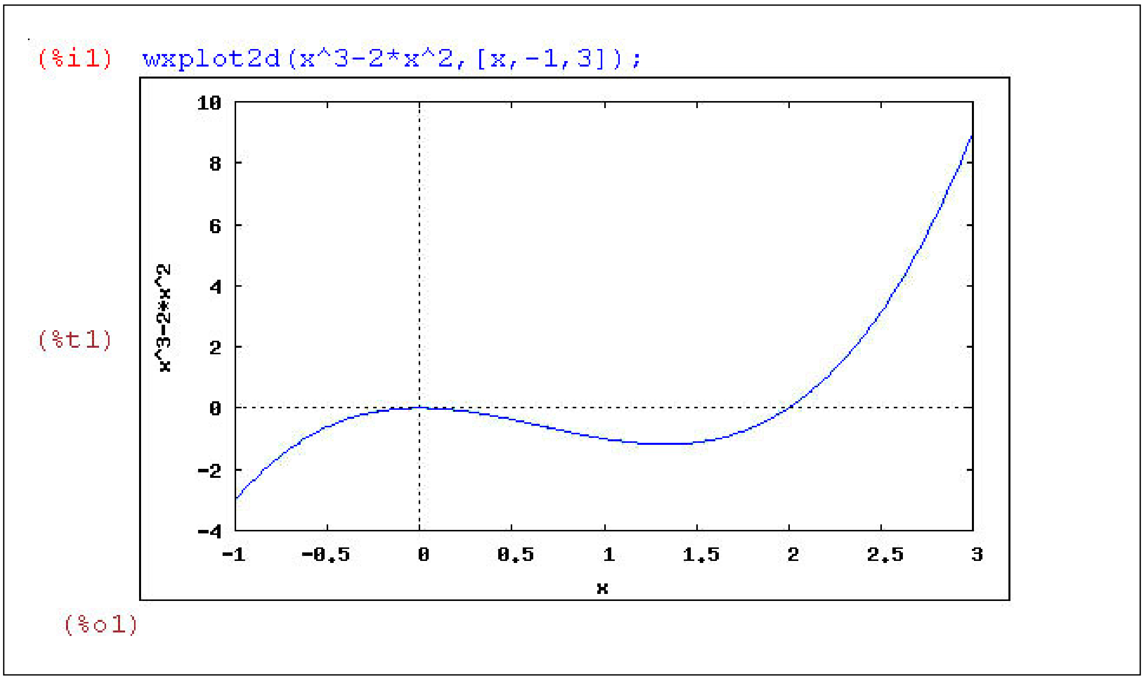


Рис. 2

Следующая задача интересна тем, что, во-первых, при помощи Maxima мы увидим «очевидный» ответ, а, во-вторых, проведенный эксперимент покажет нам, что компьютерным вычислениям нельзя доверять бездумно.

Задача 3. *Какое наибольшее число решений может иметь система*

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x^{20}+y^{20}=20? \end{cases}$$

Первое из уравнений системы задает окружность радиуса $\sqrt{a}$ на плоскости, но что за кривая задается вторым из уравнений системы? Попросим Maxima ее нарисовать, для чего обратимся к дополнительному пакету с названием "implicit_plot".

Все имеющиеся дополнительные пакеты указаны в конце раздела *Содержание* встроенной *Помощи*.

```
(%i1) load("implicit_plot")$
```

Ясно, что кривая, заданная уравнением $x^{20}+y^{20}=20$, лежит в квадрате со стороной $20^{1/20}$, поэтому посмотрим, чему же равно это число.

```
(%i2) 20^(1/20),numer;
(%o2) 1.161586349641542
```

Изобразим искомую кривую (рис. 3).

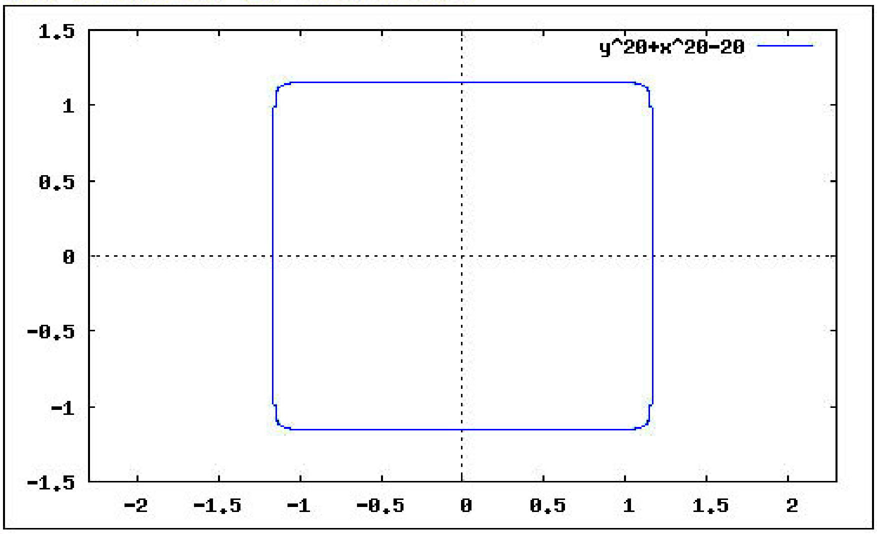
По умолчанию масштаб на оси абсцисс отличается от масштаба на оси ординат, в связи с этим для того, чтобы при отображении на экране кривая не искажалась, промежуток по переменной x следует указать примерно в полтора раза более длинным, чем промежуток по второй оси координат.

Как вы видите, рассматриваемая кривая просто близка к квадрату, поэтому окружность может пересекать ее в восьми точках (см. рис. 4).

Более того, кажется очевидным, что более восьми точек пересечения получить не удастся.

Однако картинка – это не доказательство. Естественный подход состоит в том, чтобы свести поставленный вопрос к задаче исследования функции одной переменной. Ясно, что можно ограничиться

```
(%i3) wximplicit_plot(x^20+y^20-20,
      [x,-2.3,2.3],[y,-1.5,1.5]);
(%t3)
```

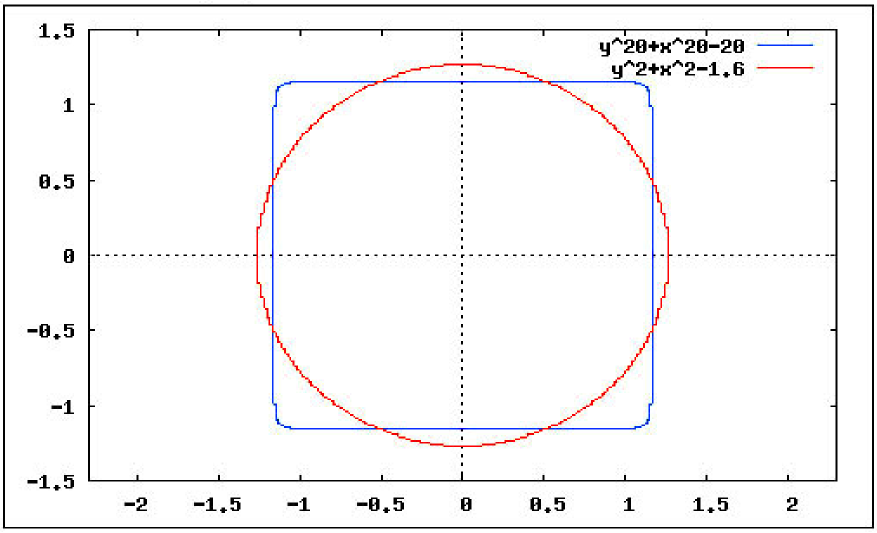



```
(%o3)
```

Рис. 3

```
(%i4) wximplicit_plot([x^20+y^20-20,x^2+y^2-1.6],
      [x,-2.3,2.3],[y,-1.5,1.5]);
rat: replaced 1.6 by 8/5 = 1.6
```

(%t4)



(%o4)

Рис. 4

точками, лежащими в первом квадранте, так что $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Выразив y^2 из второго уравнения системы и подставив полученное выражение в первое уравнение, получим уравнение $x^2 + (20 - x^{20})^{1/10} = a$.

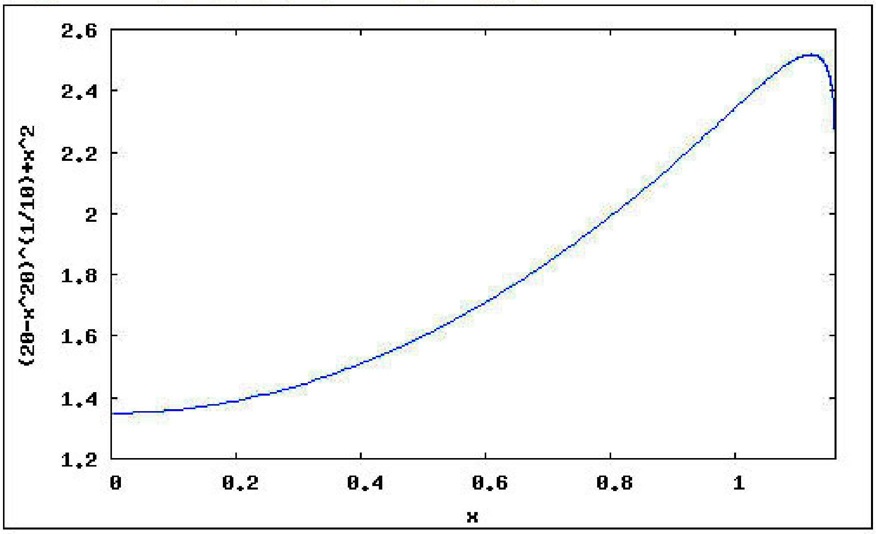
Введем функцию $f(x) = x^2 + (20 - x^{20})^{1/10}$.

```
(%i5) f(x):=x^2+(20-x^20)^(1/10);
```

(%o5) $f(x) := x^2 + \left(20 - x^{20}\right)^{1/10}$

```
(%i6) wxplot2d(f(x),[x,0,20^(1/20)]);
```

(%t6)



(%o6)

Рис. 5

Указанная в строке ввода (%i5) синтаксическая конструкция определяет *функцию* с именем *f*, определенную заданной формулой.

Посмотрим на ее график (рис. 5). Не кажется ли он странным?... Дело в том, что хотя $f(0) = f(20^{1/20}) = 20^{1/10}$, но изображенная на графике функция явно имеет различные значения в указанных точках. Неужели Maxima может так ошибаться?!

```
(%i7) f(0);f(20^(1/20));
(%o7) 2^(1/5) 5^(1/10)
(%o8) 2^(1/5) 5^(1/10)
```

Нет, как вы видите, Maxima верно знает, чему равны рассматриваемые значения. Однако посмотрите на приближенные значения (рис. 6).

```
(%i9) f(0),numer;f(20^(1/20)),numer;
(%o9) 1.349282847673563
(%o10) 1.396020707785177
```

Рис. 6

Они отличаются почти на 0,05. Теперь взгляните на следующие строчки

```
(%i11) y:f(20^(1/20))$ y,numer;
(%o12) 1.349282847673563
```

Как вы видите, здесь приближенное значение найдено верно.

Отличие приближенного вычисления значения $f(20^{1/20})$ в строке (%io9) от вычисления в строке (%io11) состоит в том, что в первом случае вычислялось значение функции *f* не при $x = 20^{1/20}$, а при значении аргумента, являющемся приближением к нему, что и привело к такой значительной ошибке.

При построении графика значения функции вычисляются в определенном наборе точек, число которых задается специальной опцией. Если, к примеру, написать [nticks,1000], то график будет строиться по тысяче точек. Проследите, как будет меняться график функции $f(x)$ при увеличении числа точек, используемых для его построения.

Тем не менее рисунок (%t6) говорит нам, что бояться не надо, надо просто провести исследование функции $f(x)$ при помощи производной. Так и сделаем (конечно, производную нетрудно было найти «руками») (рис. 7).

При $x > 0$ неравенство $f'(x) > 0$ равносильно неравенству $(20 - x^{20})^{9/10} > x^{18}$, или $20 - x^{20} > x^{20}$, откуда $0 < x < 10^{1/20}$. Тем самым функция $f(x)$ возрастает на отрезке $\left[0; 10^{1/20}\right]$ и убывает на отрезке $\left[10^{1/20}; 20^{1/20}\right]$, таким образом, число решений уравнения $f(x) = a$ на их объединении не может быть больше двух. Значит, наибольшее число решений данной системы действительно равно восьми.

Во всех предыдущих задачах «компьютерный эксперимент» был короток и прост, в последней задаче, разбираемой на этом уроке, он будет существенно более сложным.

Задача 4. *Исследуйте поведение последовательности* x_n, *первый член которой равен* 2, *а все последующие вычисляются по правилу* $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$.

Введем функцию $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

```
(%i13) rat(diff(f(x),x,1)),radcan;
```

$$(\%o13)\quad \frac{2\,x\,(20 - x^{20})^{9/10} - 2\,x^{19}}{(20 - x^{20})^{9/10}}$$

Рис. 7

```
(%i1) f(x):=(x+2/x)/2$
```

Таким образом, последовательность x_n задается правилом: $x_1 = 2$ и $x_n = f(x_{n-1})$ при $n \ge 2$. Давайте так и напишем, введя новый оператор-функцию $x(n)$ (рис. 8).

Значением *условного оператора* `if` *test* `then` *expr1* `else` *expr2* является первое выражение, если условие `test` является истинным, в противном случае его значением является второе выражение.

Знак равенства в строке `(%i2)` означает не присвоение, а условие: если n равно единице, то значением оператора будет число 2, в противном случае его значение равно значению функции f в предыдущем члене последовательности.

Конечно, начальные члены данной последовательности можно найти и без использования пакета, но, как вы сейчас увидите, только самые первые из них (см. рис. 9).

На эти рациональные числа мы еще взглянем внимательно, но пока результат несколько ошеломляет. Понятно, что последующие члены этой последовательности выводить на экран не следует. Вместо этого посмотрим на десятичные представления чисел данной последовательности. При этом нам не будут нужны все их 16 знаков, поэтому используем оператор `fpprintprec`, задающий число знаков числа, выводимое на экран (рис. 10).

Бросается в глаза, что последовательность x_n, во-первых, убывает, во-вторых, явно стремится к числу, которое кажется знакомым: с цифр 1,4142 начинается десятичная запись числа $\sqrt{2}$. Если мы докажем, что данная последовательность убывает и ограничена снизу, то, в силу теоремы Вейерштрасса, она является сходящейся.

В силу неравенства $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел справедливо неравенство

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \ge \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2},$$

значит, данная последовательность ограничена снизу. Так как

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{2} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{2} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \ge 0,$$

(поскольку уже доказано, что $x_n^2 \ge 2$), то рассматриваемая последовательность – убывающая. Пусть $x_n \to a$. Перейдя к пределу

```
(%i2) x(n):= if n=1 then 2 else f(x(n-1))$
```

Рис. 8

```
(%i3) makelist(x(n),n,1,6);
```

$$\text{(\%o3)}\quad [2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \frac{886731088897}{627013566048}]$$

Рис. 9

```
(%i4) fpprintprec:5$ makelist(x(n),n,1,6), numer;
(%o5) [2, 1.5, 1.4167, 1.4142, 1.4142, 1.4142]
```

Рис. 10

в обеих частях равенства $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, получим, что $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$, откуда следует, что $a^2 = 2$. Осталось заметить, что поскольку число a положительно, то $a = \sqrt{2}$.

Задача решена, но вопросы остаются. Как вы видели, уже у четвертого члена последовательности четыре знака после запятой совпадают со знаками десятичного представления числа $\sqrt{2}$. Интересно, сколько же их в действительности (рис. 11)?

Результат ошеломляет, поскольку уже дробь $x_4 = \frac{577}{408}$ дает приближение к корню из 2 с 11 верными знаками после запятой! Таким образом, разве можно считать, что задача решена?! Откуда берется и с чем связана такая «сверхсходимость» данной последовательности?

Вернемся к строке вывода `(%o3)`. Естественно посмотреть на квадраты имеющихся в ней дробей, среди которых имеется данная дробь. Бросается в глаза то, что $289 = 2 \cdot 144 + 1$. Да и $9 = 2 \cdot 4 + 1$. Возникает предположение, что между числителями p_n и знаменателями q_n дробей $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ при $n \geq 2$ имеется соотношение $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$. Прежде чем доказывать это соотношение, убедимся в том, что оно верно.

Для всякой дроби (рационального числа) r значением оператора `num(r)` является ее числитель, а значением оператора `denom(r)` – ее знаменатель (рис. 12).

Сомнений в справедливости соотношения нет, остается лишь доказать его. Если

$$x_n = \frac{p_n}{q_n}, \text{ то } x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{q_n} + \frac{2q_n}{p_n}\right) = \frac{p_n^2 + 2q_n^2}{2p_nq_n}.$$

Рассуждаем по индукции, предполагая, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ несократима, причем число p_n является нечетным, а число q_n четным. Число $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$ нечетно, кроме того, ни один из делителей чисел p_n и q_n не является его делителем, следовательно, дробь $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n^2 + 2q_n^2}{2p_nq_n}$ несократима. Имеем

$$p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (p_n^2 + 2q_n^2)^2 - 8p_n^2q_n^2 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2,$$

поэтому из равенства $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ следует равенство $p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = 1$. Итак, мы доказали, что $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ при всех $n \geq 2$, откуда следует, что $x_n^2 - 2 = \frac{1}{q_n^2}$. Поскольку знаменатели q_n дробей x_n растут чрезвычайно быстро, то разность $x_n^2 - 2$ уменьшается стремительно. Осталось заметить, что, в силу неравенства $x_n - \sqrt{2} = \frac{x_n^2 - 2}{x_n + \sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{2}\,q_n^2}$, последовательность стремится к $\sqrt{2}$ еще быстрее.

```
(%i6) fpprintprec:16$ x(5),numer; sqrt(2),numer;
(%o7) 1.41421356237469
  (%o8) 1.414213562373095
```

Рис. 11

```
(%i9) p(n):=num(x(n))$ q(n):=denom(x(n))$
      makelist(p(n)^2-2*q(n)^2,n,2,10);
(%o11) [1,1,1,1,1,1,1,1,1]
```

Рис. 12

Все ли вам понятно? Надеюсь, что понятно рассуждение. Однако остается еще множество вопросов, например, откуда берется формула, по которой строится данная последовательность? Или что будет, если мы зададим другое значение ее первого члена?

Подумайте над ними (см. также [1: § 9.1]).

Поведение функции хорошо видно из ее графика. В пакете Maxima можно графически изображать также и поведение последовательностей (рис. 13).

Первая часть аргумента `[discrete,z]` оператора `wxplot2d` (или `plot2d`) – слово `discrete` – указывает на тип данных, его второй частью является список, каждым элементом которого является список из двух элементов. Если z – это список $[[x_1,y_1],[x_2,y_2],\ldots]$, то на экране появится ломаная с вершинами в точках плоскости с координатами (x_1,y_1), $(x_2,y_2),\ldots$ Заметим, что аргумент можно задавать также и в виде `[discrete,x,y]`, где `x` – это список абсцисс данных точек, а `y` – список их ординат.

На рис. 13 также видно поведение данной последовательности.

В заключение – некоторые методические комментарии. В первых трех задачах компьютер решает, можно сказать, психологические проблемы.

1. Конечно, задание задачи 1 можно было сформулировать явно. Однако интереснее предоставить учащимся возможность самим сделать очень симпатичное открытие.

2. Задачу 2 естественнее предлагать учащимся, еще не знакомым с понятием производной и, тем самым, с исследованием функций при помощи производной. Как вы видели из ее решения, все, что от них потребуется, – это понять, какие свойства функции существенны для ответа, а затем доказать эти свойства. Заметим (в скобках), что иногда ребята считают, что произведение любых возрастающих функций есть возрастающая функция – полезно их в этом разубедить.

3. Несмотря на всю простоту задачи и стандартность решения задачи 3, она почти всегда вызывает трудности, связанные с тем, что учащиеся «пугаются» второго

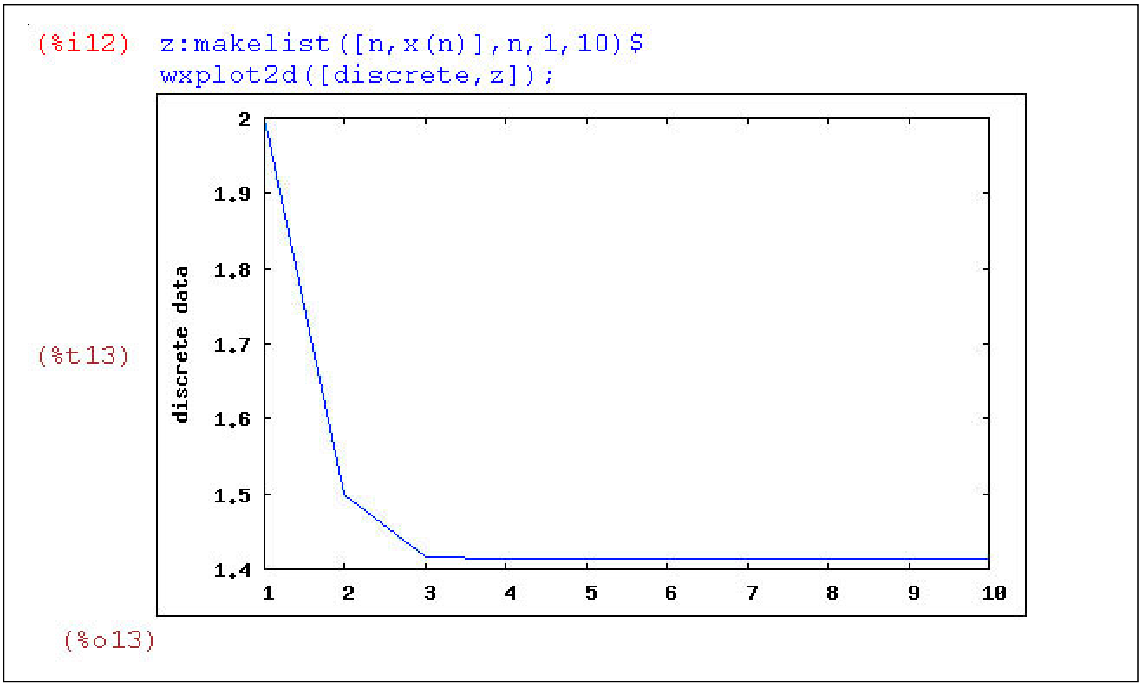


Рис. 13

Рис. 11

из уравнений данной системы. После того как на экране появится «слегка сглаженный вблизи своих вершин квадрат», психологическая трудность будет снята – и можно приступать к решению.

Совсем другую роль играет компьютер при решении задачи 4. Значения членов данной последовательности бессмысленно считать «руками», тем более – считать их десятичные приближения. Компьютер существенно ускоряет вычисления и, тем самым, решение задачи.

Наконец, очень важным моментом, появившимся при решении задачи 3, является пример того, что в процессе приближенных вычислений могут возникать значительные ошибки. Поэтому требование точных формулировок и аккуратных доказательств – не прихоть преподавателей математики. Компьютер нам только помогает и подсказывает. Кроме того, его надо использовать разумно – в чем вы должны будете убедиться, решая задачу 3 из числа заданий для самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы

1. Упростите выражение

$$\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}.$$

Найдите обобщения и следствия найденного вами тождества.

2. Докажите, что если два многочлена степени не выше n принимают одинаковые значения в $n + 1$ точках, то эти многочлены тождественно совпадают (то есть совпадают все их коэффициенты).

3. Определите число решений уравнения $x^6 = 6^x$.

4. Исследуйте поведение последовательностей, заданных формулами:

а) $\frac{n^3}{2^n}$ и б) $\frac{n^{10}}{2^n}$.

5. Найдите все значения a, при которых число решений системы $\begin{cases} y = 1 - ax^2 \\ x = 1 - ay^2 \end{cases}$ равно двум.

6. Сформулируйте и постарайтесь ответить на вопросы, возникающие в процессе решения задачи 4.

Ответы и решения заданий для самостоятельной работы урока 1

1. *Ответ:* $tg\frac{\pi}{2n+1}\cdot tg\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot tg\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}$. В обозначениях из решения задачи 2 урока 1, в силу обобщенных формул Виета, справедливо равенство $t_1t_2\ldots t_n=\frac{1}{2n+1}$, откуда, в силу положительности данных тангенсов, и следует ответ.

2. Из вычислений

```
(%i1) fpprintprec:5$
(%i2) [2*cos(%pi/18),2*cos(7*%pi/18),
      2*cos(13*%pi/18)],numer;
(%o2) [1.9696, 0.684, - 1.2856]
(%i3) x:2*cos(%pi/18)$
      z:x/(1-x^2),numer;
      y:z/(1-z^2),numer;
(%o4) - 0.684
(%o5) - 1.2856
(%i6) x:2*cos(7*%pi/18)$
      z:x/(1-x^2),numer;
      y:z/(1-z^2),numer;
(%o7) 1.2856
(%o8) - 1.9696
```

следует, что если $x = x_0 = 2\cos\frac{\pi}{18}$, то $z = 2\cos\frac{25\pi}{18} = x_4$, а $y = 2\cos\frac{13\pi}{18} = x_2$, а если $x = x_1 = 2\cos\frac{7\pi}{18}$, то $z = 2\cos\frac{31\pi}{18} = x_5$, а $y = 2\cos\frac{19\pi}{18} = x_3$. Теперь становится ясно, что, кроме тривиального решения $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, все остальные могут быть записаны в виде $(x, y, z) = (x_k, x_{k+2}, x_{k+4})$, где $k = 0, 1, \ldots, 5$.

3. Посмотрим, может ли Maxima решить данное уравнение

```
(%i1) solve(x^4+4*x-1,x);
```

$$\text{(\%o1)}\quad [x = -2^{-\frac{3}{4}}\sqrt[4]{4-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}},\ x = 2^{-\frac{3}{4}}\sqrt[4]{4-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2^{-\frac{3}{4}}\sqrt[4]{\sqrt{2}+4}\,\%i,\ x = 2^{-\frac{3}{4}}\sqrt[4]{\sqrt{2}+4}\,\%i + \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

```
(%i2) rat(solve(x^4+4*x-1,x)),radcan;
```

$$\text{(\%o2)}\quad [x = -\frac{\sqrt{4-\sqrt{2}} + 2^{1/4}}{2^{3/4}},\ x = \frac{\sqrt{4-\sqrt{2}} - 2^{1/4}}{2^{3/4}},\ x = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+4}\,\%i - 2^{1/4}}{2^{3/4}},\ x = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+4}\,\%i + 2^{1/4}}{2^{3/4}}]$$

Решения найдены, правда, проведенное Maxima упрощение даже с опцией `radcan` не дает записи ответа в естественной форме. Перепишем полученный ответ. Первую пару чисел можно записать в виде $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$, вторую пару (комплексных) корней – в виде $\frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}$. В силу формул Виета, первая пара состоит из корней квадратного уравнения $x^2 + x\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$, вторая – из корней уравнения $x^2 - x\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$. Естественно предположить, что данный многочлен степени 4 раскладывается в произведение двух многочленов степени 2 – правых частей найденных уравнений. Обратите внимание, что эти уравнения можно записать одновременно: $x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}(x-1)$, или $(x^2+1)^2 = 2(x-1)^2$. Остается заметить, что

$$x^4 + 4x - 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 + 4x - 2 = (x^2+1)^2 - 2(x-1)^2,$$

откуда и следует разложение данного многочлена в произведение двух квадратных.

4. Посмотрим на таблицы значений чисел Фибоначчи и сумм чисел Фибоначчи.

```
(%i1) makelist(fib(n),n,1,10);
(%o1) [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]
(%i2) makelist(sum(fib(i),i,1,n),n,1,10);
(%o2) [1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 143]
```

Бросается в глаза, что числа второй из них на единицу меньше некоторых чисел из первой таблицы. Естественная формула $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$ без труда доказывается по индукции.

Действительно, $F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$ и $F_1 + F_2 = 2 = 3 - 1 = F_4 - 1$.

Предположим, что $F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$.

Тогда $F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} + F_n = F_{n+1} - 1 + F_n = F_{n+2} - 1$.

5. Пакет Maxima без труда находит соответствующие формулы

```
(%i1) sum(i^2,i,1,n),simpsum;
```

$$(\%o1)\quad \frac{2\,n^3+3\,n^2+n}{6}$$

```
(%i2) factor(sum(i^2,i,1,n)),simpsum;
```

$$(\%o2)\quad \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$$

```
(%i3) factor(sum(i^3,i,1,n)),simpsum;
```

$$(\%o3)\quad \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

Их доказательство – простое упражнение на применение метода математической индукции.

Литература

1. *Иванов О.А.* Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009. 384 с.

Иванов Олег Александрович, профессор, доктор педагогических наук и кандидат физико-математических наук, профессор кафедры общей математики и информатики СПбГУ.