

*Морозова Анжелика Владимировна,
Энтина Софья Борисовна,*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНИКОВ ПРИ СОЗДАНИИ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

В государственный образовательный Стандарт среднего (полного) общего образования по математике элементы теории вероятностей и математической статистики входят в «зачаточном» состоянии. Вот как выглядит Обязательный минимум содержания по этой теме:

«Табличное и графическое представление данных. *Числовые характеристики рядов данных.*

Элементарные и сложные события. Рассмотрение случаев и вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события. *Понятие о независимости событий. Вероятность и статистическая частота наступления события.* Решение практических задач с применением вероятностных методов».

Даже в этом минимуме часть тем обозначена курсивом, то есть предполагается только ознакомление учащихся с этими понятиями.

Тем не менее, во многих школах, особенно экономической направленности, интерес к изучению статистики достаточно велик, в связи с чем в этих школах вводятся элективные курсы, которые мы условно назовем «практической статистикой».

Один из таких курсов разработан в 2009 году для школ Ленинградской области по заказу Ленинградского областного института развития образования (ЛОИРО).

Курс статистики нельзя назвать элементарным, так как методы статистики предполагают знакомство с неэлементарными функциями, многомерными интегралами, многомерными распределениями и достаточно сложными понятиями, такими как условное распределение, условные числовые характеристики. Однако, хотя и на элементарном уровне, представление о методах математической статистики и возможности обработки результатов наблюдений в школе можно получить, изучая и решая простые статистические задачи.

Особенно в этом могут помочь имеющиеся в свободном доступе электронные учебники и лаборатории. Так, например, в 2009 году для системы дистанционного обучения школьников Ленинградской области был создан дистанционный курс «Практическая статистика», в котором были использованы материалы свободно распространяемой книги А. Шеня «Вероятность: примеры и задачи» (М.: МЦНМО, 2008), электронная версия доступна по адресу <ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/proba.zip>, а также электронный учебник Е.А. Бунимовича и В.А. Булычева «Вероятность и статистика в школьном курсе математики», который можно найти в Единой коллекции образовательных ресурсов. Для инсталляции нужно запустить загруженный exe-файл.

Использование этого учебника и содержащихся в нём лабораторных работ позволяет в сжатые сроки (а на элективный курс отводится примерно 35 часов) познакомить учащихся с основными понятиями теории вероятности и математической статистики, провести эксперименты и обработать данные. Учебник содержит уроки, тесты, практикум (задания) и лабораторные работы.

Например, предположим, что тема урока «Случайный эксперимент».

В оглавлении учебника находим раздел 2.1. *Случайный эксперимент и его свойства*.

Открываем его и находим 10 примеров испытаний, изучение которых дает представление о случайном событии. Можно сколько угодно раз «подбрасывать» виртуальную монету и считать частоту выпадения герба или решки, экспериментировать с игральным кубиком, с разноцветными шариками, перчатками, поиграть в рулетку.

Есть возможность перейти в Excel и провести необходимые записи и вычисления, чтобы подсчитать частоту появления каждого события в эксперименте. Тесты и практикум позволяют закрепить основные понятия урока.

Если такая работа выполняется после или вместе с объяснением учителя, то экономится время на изучение и закреп-



Можно сколько угодно раз «подбрасывать» виртуальную монету и считать частоту выпадения герба или решки, экспериментировать с игральным кубиком, ... поиграть в рулетку.

ление основных сведений по теме, и, возможно, появляется более свободное владение материалом темы.

Отметим сразу, что та часть программы, которая входит в Стандарт, составляет небольшую часть учебника. Основная часть учебника выходит за пределы образовательного Стандарта, поэтому учебник можно использовать при создании элективного курса, в частности, такого как «Практическая статистика», или «Знакомство с методами математической статистики».

Если основные понятия теории вероятностей, такие как случайный эксперимент, случайное событие, элементарные события, независимые события и т.д., можно довольно быстро и доступно изложить, решить необходимое количество задач, то совсем не такая ситуация в статистике. Для изучения статистических явлений необходим сбор и обработка данных, понятие о генеральной совокупности, случайной выборке, группировке данных, полигоне частот, гистограмме и т.п.

Знакомство с этими понятиями требует значительного времени, и, наверно, трудно проделать необходимую работу без компьютерных инструментов, без виртуальной лаборатории, которая генерирует случайную выборку, определяет числовые характеристики выборки, строит полигоны частот и гистограммы. Важное место при изучении методов математической статистики занимает представление об основных случайных величинах и их связи между собой.

В образовательный Стандарт входит только повторение испытаний, при этом не акцентируется внимание на том, что речь идет о *случайной величине* с определенными свойствами.

Познакомить учащихся с основными случайными величинами и их свойствами, тем более выяснить связи между ними за отведенное в школьном курсе время не представляется возможным.

Но использование электронного учебника может в этом помочь.

Виртуальная лаборатория не только позволяет изучить основные случайные

величины, но и исследовать существующие между ними связи.

Пример 1. Тема «Связь биномиального распределения и распределения Пуассона»

К этому моменту предполагается, что учащиеся уже имеют представление о случайной величине, законе её распределения. В частности, к этому моменту они уже знают распределение Бернулли, относящееся к случайной величине, описывающей повторные испытания, в результате которых с вероятностью p может появиться и с вероятностью $q = 1 - p$ не появиться некоторое событие A . К такой случайной величине приводят многие испытания (стрельба по цели, бросание монеты, контроль определенного параметра у детали и т. п.). Известно, что при большом числе испытаний N и при малой вероятности каждого исхода p , такой, что $pN \approx \lambda$ распределение Бернулли практически совпадает с распределением Пуассона.

Как можно в этом убедиться? Естественно, на эксперименте. Но как провести такой эксперимент, в котором происходит большое количество повторений испытания, а наблюдение ведется за маловероятным исходом, например, при статистическом контроле качества изделий при условии, что доля бракованных изделий мала, например 1%. Отбирают N изделий, число бракованных изделий в данной выборке – это случайная величина, описываемая распределением Бернулли. Однако, если N велико, а p мало, то соответствующие формулы Бернулли становятся неудобными, сложными. Хорошее приближение даётся другими формулами, соответствующими распределению Пуассона.

Чтобы все это продемонстрировать учащимся, мы и воспользуемся виртуальной лабораторией.

Предлагаем учащимся открыть лабораторную работу по теме «Дискретные величины» (раздел 9.2).

Первая часть работы

1) Выбрать биномиальное распределение (распределение Бернулли), положить в нем $N = 10$, $p = 0,6$ и рассмотреть получившийся полигон частот (рис. 1).

2) Выбрать распределение Пуассона, положить в нем $\lambda = 1,5$, рассмотреть получившийся полигон частот (рис. 2).

3) Сравнить оба полигона частот.

Учащиеся могут убедиться, что эти полигоны частот не имеют между собой ничего общего.

Вторая часть работы

Теперь предлагается изменить данные:

1) Выбрать биномиальное распределение (распределение Бернулли), положить в нем $N = 150$, $p = 0,01$, рассмотреть получившийся полигон частот (рис. 3).

2) Выбрать распределение Пуассона, положить в нем $\lambda = 1,5$, рассмотреть получившийся полигон частот.

3) Сравнить оба полигона частот.

Учащиеся обратят внимание, что полигоны частот практически совпадают.

Третья часть работы

Повторить этот эксперимент, самостоятельно выбирая параметры распределений и делая соответствующие выводы.

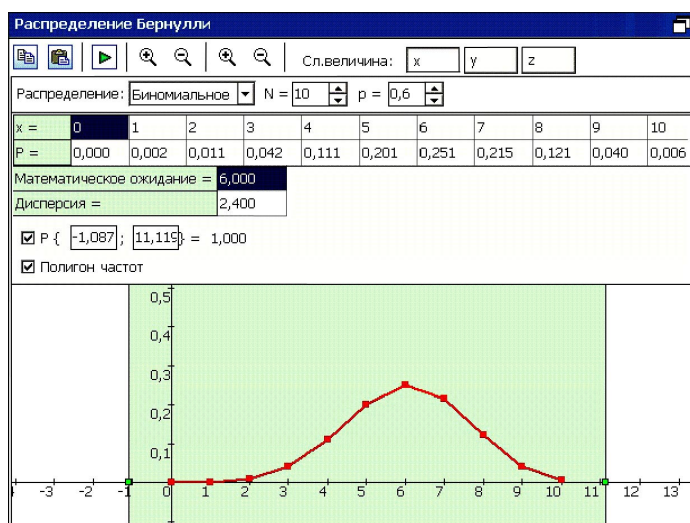


Рис. 1

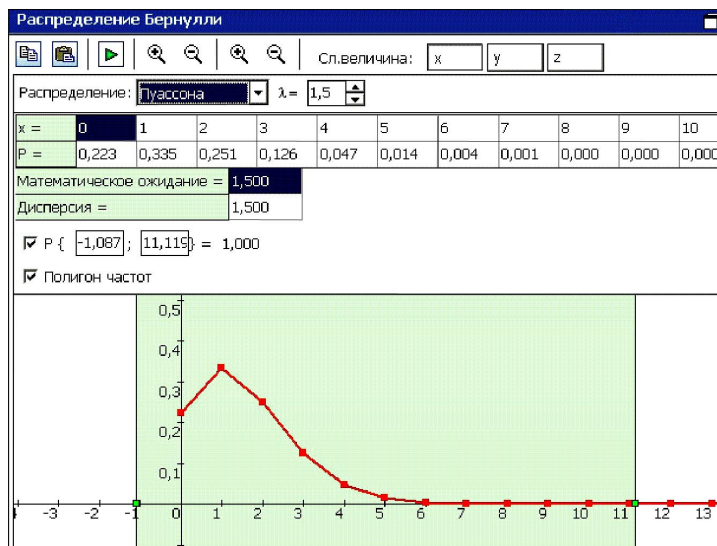


Рис. 2

Обратить внимание учащихся на вероятность попадания значений случайной величины в заданный интервал в том случае, когда $\lambda = np$ и в том случае, когда $\lambda \neq np$, причем отличие λ от np существенное.

Составить таблицу результатов (табл. 1).

Теперь можно немного времени посвятить более подробному изучению распределения Пуассона.

Учащимся станет понятно, почему распределение Пуассона называется распределением очень редких событий и почему

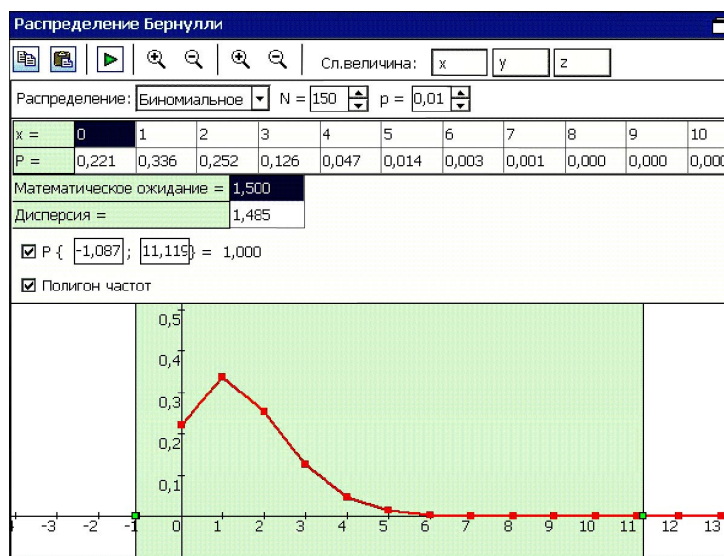


Рис. 3

в том случае, когда, например, доля бракованных изделий p в большой партии достаточно мала, применяется не биномиальное распределение, а распределение Пуассона при определении вероятности обнаружения k бракованных изделий.

Пример 2. Тема. «Знакомство с нормальным распределением»

Наиболее известным и часто применяемым при решении задач математической статистики и статистического контроля качества распределением случайной величины является нормальное распределение.

Перед выполнением лабораторной работы учащиеся должны знать определение *нормально распределенной* случайной величины, формулу для плотности, график плотности (рис. 4), функцию распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

не являющуюся элементарной функцией, параметры нормального распределения: σ^2 – дисперсию, m – математическое ожидание.

Для изучения нормально распределенной случайной величины учащимся предлагается выбрать раздел 9.3.

Часть первая. Изучение плотности нормального распределения

1) Выбрать «Нормальное распределение».

2) Задать различные значения математического ожидания $m = a$.

Следует обратить внимание учащихся на то, как изменяется при фиксированном значении a высота «колокола» в зависимости от параметра σ .

Табл. 1

Распределение Бернулли	N	p	np	E	D	Распределение Пуассона	λ	E	D	a, b	$P(a \leq x < b)$
1											
2											
...

3) Задать различные значения параметра σ .

Обратить внимание, как изменяется график плотности распределения при фиксированном значении σ в зависимости от параметра a .

Часть вторая. Изучение свойств нормального распределения

Выбрать лабораторную работу «Непрерывные случайные величины».

1. Выбрать нормальное распределение. Задать значение $a = 0$, $\sigma = 1$.

Задать границы интервалов слева вверху так, чтобы интервал был симметрично расположен относительно нуля.

Начать с границ интервала $\pm 0,2$, затем увеличивать интервал на $0,2$:

$[-0,2; 0,2], [-0,3; 0,3], [-0,4; 0,4], \dots$

Следить за вероятностью попадания значений случайной величины в данный интервал.

2. Выяснить, если границы интервала обозначить через $\pm h$, то при каких значе-

ниях h вероятность попадания в интервал будет равна $0,995$; $0,997$; $0,999$?

3. Повторить задание 1, изменяя значения $\sigma = 0,8$; $0,6$; $0,4$; $0,2$, оставив $a = 0$.

4. Составить таблицу (табл. 2) при заданных σ и h .

5. Определить при разных значениях σ те значения h , при которых вероятность попадания значений случайной величины в интервал $[-h; +h]$ равно $0,997$.

6. Установить соотношение между этими σ и h (правило 3σ).

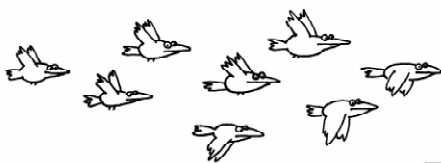
Виртуальная лаборатория позволяет познакомить учащихся и с другими непрерывными случайными величинами, такими как *показательное распределение, треугольное распределение, равномерное распределение*, убедиться, что для них не имеет места правило 3σ .

Пример 3. Обработка результатов наблюдений с помощью MSExcel

Урок 1

Зайти по ссылке на страницы учебника и выбрать раздел 4.2.

1. Повторить теоретический материал:
а) таблица частот; б) полигон частот.



«Непрерывные случайные величины»

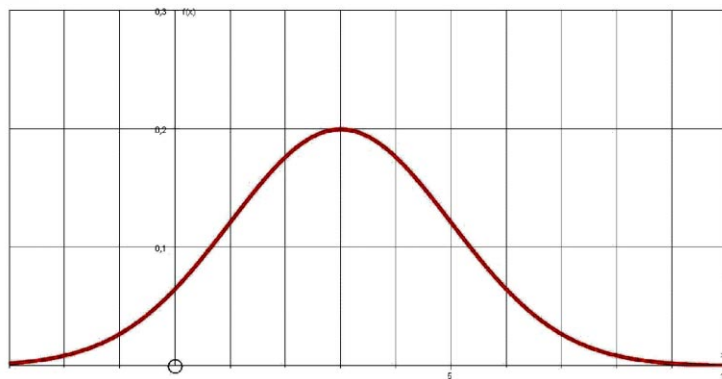


Рис. 4

Табл. 2

σ_1	h_1	$P(x < h_1)$	h_1 / σ_1	h_2	$P(x < h_2)$	h_2 / σ_1	...
σ_2	h_1	$P(x < h_1)$	h_1 / σ_2	h_2	$P(x < h_2)$	h_2 / σ_2	...
...

2. Рассмотреть приведенные к ним примеры.

3. Выполнить тесты 1–3.

4. Выполнить задания 1–10

Урок 2

Зайти по ссылке на страницы учебника и выбрать раздел 4.2.

1. Повторить теоретический материал:

а) группировка данных; б) гистограмма частот.

Рассмотреть приведенные к ним примеры.

2. Выполнить тесты 1–3.

3. Выполнить задания 1–10.

Урок 3

Зайти по ссылке на страницы учебника и выбрать раздел 5.1.

1. Повторить теоретический материал:

а) среднее значение; б) мода; в) медиана.

Рассмотреть приведенные к ним примеры.

2. Выполнить тесты 1–6.

3. Выполнить задания 1–17.

Урок 4

Зайти по ссылке на страницы учебника и выбрать раздел 5.2.

Повторить теоретический материал:

а) вычисление среднего; б) вычисление моды; в) вычисление медианы.

1. Рассмотреть приведенные к ним примеры.

2. Выполнить тесты 1–3.

3. Выполнить задания 1–17.

Урок 5

Зайти по ссылке на страницы учебника и выбрать раздел 5.3.

Повторить теоретический материал: а) размах; б) среднее отклонение от среднего; в) дисперсия; г) стандартное отклонение.

1. Рассмотреть приведенные к ним примеры.

2. Выполнить тесты 1–5.

3. Выполнить задания 1–10.

Урок 6

Зайти по ссылке на страницы учебника и выбрать раздел 5.4.

Повторить теоретический материал: а) вычисление размаха по таблице частот; б) вычисление среднего по таблице частот.

1. Рассмотреть приведенные к ним примеры.

2. Выполнить тесты 1–4.

3. Выполнить задания 1–8.

Эти уроки дадут представление о методах обработки результатов наблюдений. Далее можно предложить учащимся реальную задачу в зависимости от их интересов (например, изучить частоту появления слов с буквой «ё» в литературе различной направленности и тем самым внести свой вклад в дискуссию об этой букве, изучить распределение цен на какой-нибудь товар в различных магазинах города и т. п.), провести исследования (наблюдения) и сделать анализ полученных результатов.



Наши авторы, 2010.

Our authors, 2010.

*Морозова Анжелика Владимировна,
ассистент кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ
(«ЛЭТИ»),*

*Энтина Софья Борисовна,
доцент кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ
(«ЛЭТИ»).*