Иванов Сергей Георгиевич

СОЧЕТАНИЕ ДИСКУССИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ НА УРОКЕ МАТЕМАТИКИ

Данная статья является продолжением статьи «Живая математика» с интерактивным устройством MIMIO» (см. «Компьютерные инструменты в школе» № 1, 2009 г.)

В статье на примере сюжета «Неравенство треугольника» показана возможность совмещения на одном уроке дискуссии с компьютерным экспериментом. Для компьютерного эксперимента применяются компьютерные динамические модели, или, как их называют, манипуляторы [1]. Для дискуссии используется интерактивное устройство MIMIO [2], позволяющее строить рисунок «виртуальным маркером», а также переносить иллюстрацию из манипулятора, чтобы рисовать и делать записи рядом с ней. Это будет уже не динамическая, а статическая иллюстрация, так что проверка, как в манипуляторе, школьникам на доске недоступна.

Задачи, использованные в данной статье, допускают и бескомпьютерное использование. Например, можно предлагать такие задачи в математическом кружке.

Неформальные промежуточные рассуждения, приводимые в диалогах в качестве примера, хороши при поиске гипотезы, при попытках её обоснования, но они не должны *заменять* точный ответ или доказательство. В конце концов ученики и учитель должны придти к чёткому выводу.

Если в задаче указано, что обоснование не требуется, то для учеников достаточно найти ответ. Если же это не указано, то ученики должны привести доказательство.

Задача 1.

Дана прямая a и две точки A и B по одну сторону от неё. Найдите на прямой точку, удовлетворяющую условию: модуль разности $|AC - CB|$ имеет наибольшее значение.

Всегда ли такая точка существует?

Дискуссия по этой задаче может быть, например, такой (допустим, что точка B ближе к прямой a, чем точка A).

Ученики:

Может быть, надо сделать наименьшим расстояние BC?

Учитель:

Предлагаю проверить.

Построим динамическую модель в «Живой математике» [3–8] (рис. 1).

Если немного переместить точку C, разность увеличится (см. рис. 2).

Вспомните неравенство, в котором участвует разность длин сторон треугольника.

Ученики:

Неравенство треугольника в такой формулировке: $|AC - CB| < AB$.

И когда такое число принимает наибольшее значение? Оно всегда меньше длины стороны AB.

Учитель:

Давайте проведём эксперимент (рис. 3).

Но ведь в случае, когда три точки на одной прямой, неравенство превращается в равенство!

Таким образом, наибольшее значение $|AC - CB|$ равно длине AB.

И решение существует, если точки A и B на разных расстояниях от прямой a!

Задача 2.

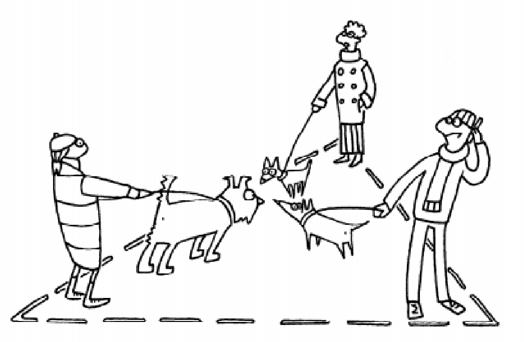
Найти внутри остроугольного треугольника ABC точку O, сумма расстояний которой до вершин наименьшая (обоснование в этой задаче не требуется).

Ученики:

Возможно, одна из вершин, тогда одно из расстояний равно нулю.

Учитель:

Проверим на динамической модели. Если переместить точку во внутреннюю об-



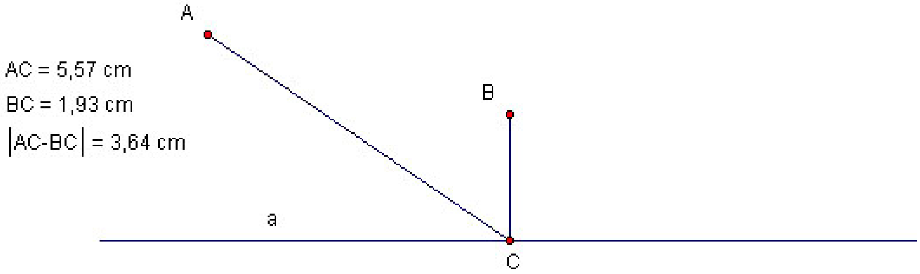


Рис. 1

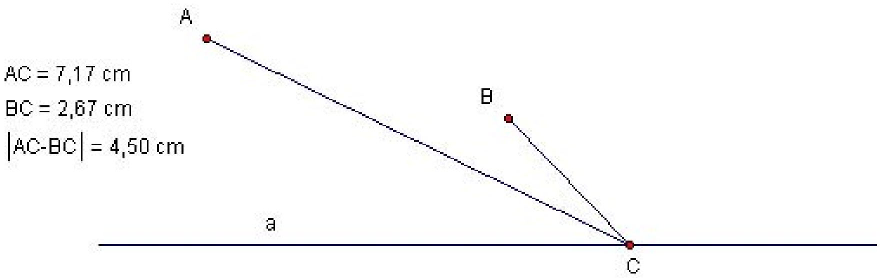


Рис. 2

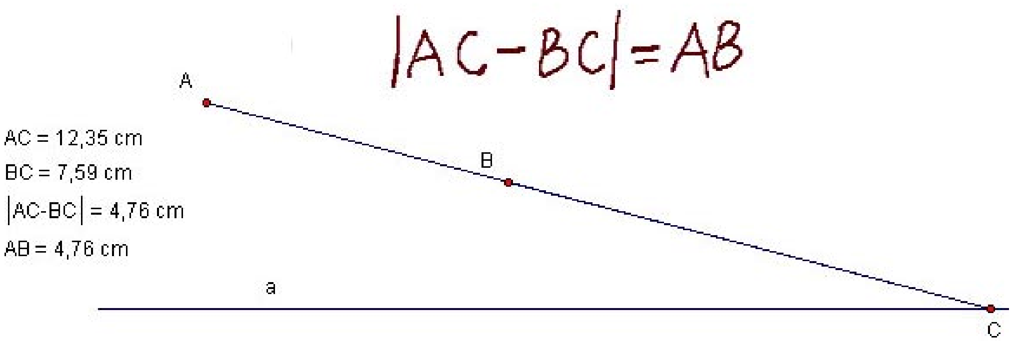


Рис. 3

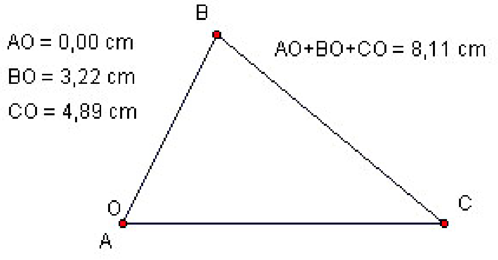


Рис. 4

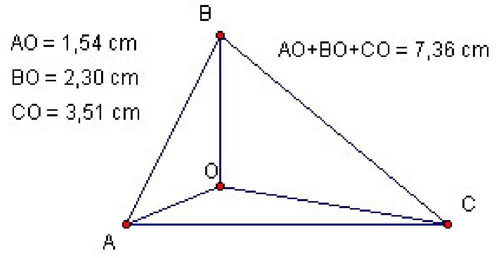


Рис. 5

ласть треугольника, сумма расстояний уменьшится. Точка *O* совпала с точкой *A* (рис. 4). Точка *O* находится во внутренней области треугольника (рис. 5).

Ученики:

В самом деле, минимум достигается во внутренней области треугольника, но в какой точке?

Учитель:

Какими величинами можно однозначно задать положение точки на чертеже?

Ученики:

Или длинами отрезков *AO*, *BO*, *CO*, или углами *AOB*, *BOC*, *COA*. Для какого случая достигается минимум?

Учитель:

Продолжим эксперимент, наблюдая за указанными длинами и углами.

Ученики:

В соотношении длин закономерность не просматривается, но углы в точке, в которой достигается минимум, судя по измерению, равны между собой (рис. 6).

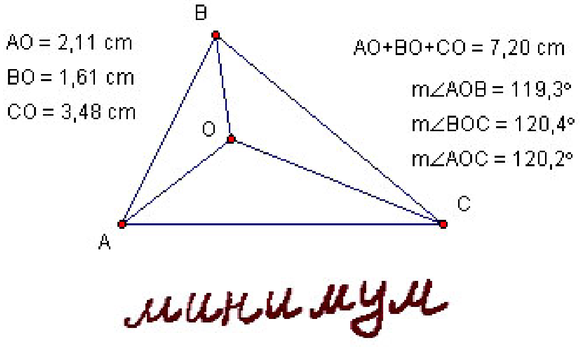


Рис. 6

Учитель:

Верно, именно для точки, из которой каждая сторона видна под углом 120 градусов, достигается минимум суммы расстояний до вершин остроугольного треугольника. Такую точку называют точкой Торричелли, иногда её называют точкой Ферма, иногда точкой Штейнера.

Задача 3.

Найти внутри треугольника ABC точку O, сумма расстояний которой до вершин и до середин сторон наименьшая (A_1 – середина BC, B_1 – середина AC, C_1 – середина AB).

Ученики:

Может быть, здесь тоже нужно измерять углы?

Учитель:

Проверим (рис. 7, 8).

В точке Торричелли минимум не достигается.

Представьте сумму

$$AO + BO + CO + A_1O + B_1O + C_1O$$

в виде

$$(AO + A_1O) + (BO + B_1O) + (CO + C_1O).$$

Когда достигается минимум величины $(AO + A_1O)$? Можем проверить это на динамической иллюстрации.

Ученики:

Для этого точки A, O, A_1 должны лежать на одной прямой. Аналогично, минимум величины $(BO + B_1O)$ достигается, если точки B, O, B_1 лежат на одной прямой. Минимум величины $(CO + C_1O)$ достигается, если точки C, O, C_1 лежат на одной прямой.

Учитель:

Могут ли эти три условия выполняться одновременно?

Ученики:

Могут – для точки пересечения медиан! Она и будет решением задачи.

Учитель:

Верно.

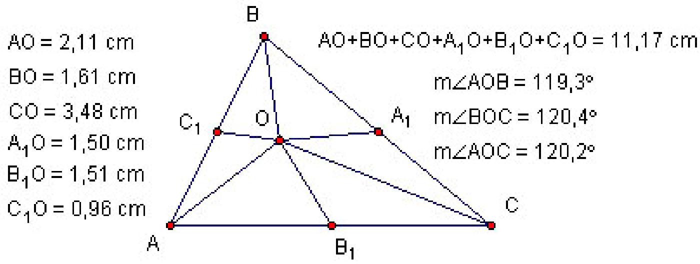


Рис. 7

Задача 3 оказалась проще задачи 2, хотя формулировка выглядит более громоздкой.

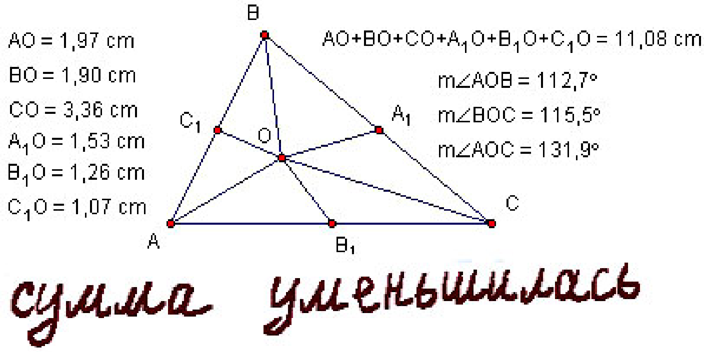


Рис. 8

Задача 4.

Найти на плоскости точку O, для которой AO + BO + + CO + DO – наименьшая, если A, B, C, D – вершины выпуклого четырехугольника.

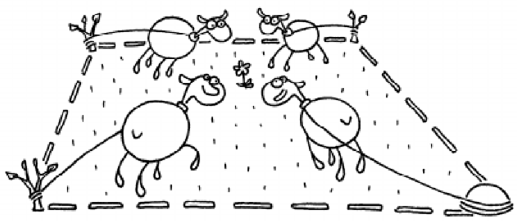
Ученики:

Если *ABCD* – квадрат, то минимум, наверное, достигается для его центра?

Учитель:

Проверим (рис. 9, 10).

Действительно, судя по нашему эксперименту, для квадрата минимум достигается в центре. Но какую гипотезу можно выдвинуть для произвольного четырёхугольника?



Ученики:

Центр вписанной окружности? Но не в каждый четырёхугольник можно вписать окружность. И описать окружность можно не около каждого четырёхугольника.

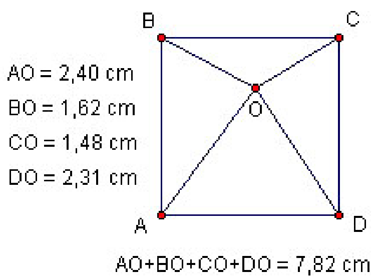


Рис. 9

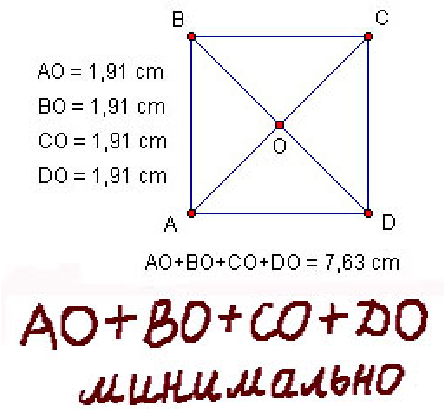


Рис. 10

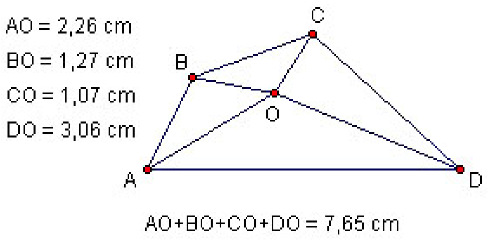


Рис. 11

Учитель:

Проведём эксперимент (рис. 11). Какое предположение?

Ученики:

Точка пересечения диагоналей!

Учитель:

Почему?

Ученики:

Аналогично предыдущей задаче- представим сумму $AO + BO + CO + DO$ в виде $(AO + CO) + (BO + DO)$. В точке пересечения диагоналей обе суммы – $AO + CO$ и $BO + DO$ принимают наименьшее значение.

Учитель:

Верно.

Задача 4 оказалась проще задачи 2, хотя задача 4 относится к четырёхугольнику, а задача 3 – к треугольнику.

Задача 5.

Постройте кратчайшую сеть дорог, соединяющую вершины прямоугольного треугольника (обоснование в этой задаче не требуется). Сетью дорог данной системы точек называют множество отрезков, по которым можно каждую точку с каждой соединить непрерывным путём, проходящим по отрезкам.

Ученики:

Очевидно, это два катета!

Учитель:

Проверим на динамической модели. Рассмотрим сеть из трёх отрезков *AO, BO, CO*. Объединение катетов соответствует совпадению точки *O* с вершиной прямого угла. Если переместить точку *O* во внутреннюю область треугольника, то длина сети дорог уменьшится.

Точка *O* совпала с вершиной прямого угла (рис. 12). Точка *O* не совпала с вершиной прямого угла (рис. 13).

В какой точке достигается минимум?

Ученики:

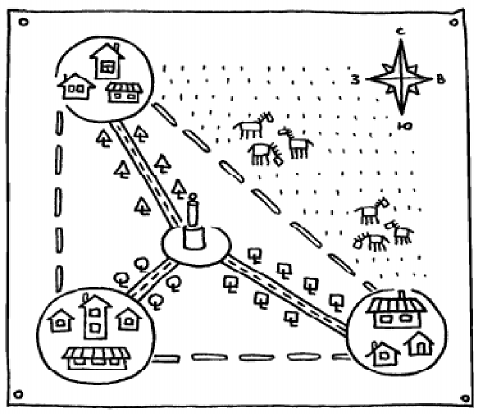
Аналогично задаче 2 – в точке Торричелли.

Учитель:

Верно.

Ученики:

Да, неожиданный результат.



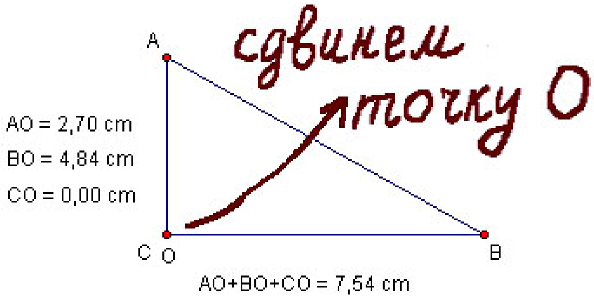


Рис. 12

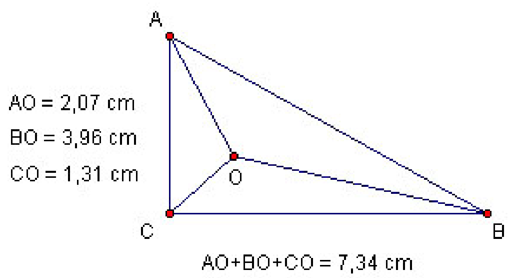


Рис. 13

Задача 6.

Верно ли, что для каждой точки внутри выпуклого четырехугольника сумма расстояний от нее до вершин меньше периметра?

Ученики:

Например, для прямоугольника сумма расстояний от каждой точки внутри него меньше периметра.

Учитель:

Почему?

Ученики:

Для точки пересечения диагоналей и для вершин это выполнено, для остальных точек сложнее проверить...

Учитель:

Проведём эксперимент с динамической моделью (рис. 14).

Как видите, для прямоугольника при перемещении точки внутри него сумма расстояний до вершин меньше периметра. Но, во-первых, почему это так? Во-вторых, возможно, для другого четырёхугольника условие не будет выполнено? Ведь четырёхугольники бывают разной формы.

Проведём ещё один эксперимент.

Рассмотрим четырёхугольник, не являющийся прямоугольником (рис. 15).

При перемещении точки внутри него сумма расстояний до вершин также меньше периметра.

Означает ли это, что так будет для каждого четырёхугольника?

Ученики:

Нет, ведь мы таким способом не сможем рассмотреть все четырёхугольники.

Учитель:

При поиске примеров полезно рассмотреть крайние, вырожденные случаи.

Ученики:

Например, пусть три вершины находятся очень близко одна от другой. Тогда точка может находиться или близко к ним – в таком случае сумма расстояний будет меньше периметра. А если точка будет далеко от этих трёх вершин, тогда сумма расстояний больше периметра! То есть для точки внутри такого почти вырожденного четырехугольника сумма расстояний до вершин может быть больше периметра!

Учитель:

С помощью динамической модели можно построить пример (рис. 16).

Ещё вопрос: как формализовать выражение «почти вырожденный четырёхугольник»?

Ученики:

Рассмотрим вырожденный случай четырехугольника, у которого вершины B, C и D совпадают. Допустим, что точка O совпала с точкой A. Тогда периметр «четырёхугольника» равен $2AB$, а сумма расстоя-

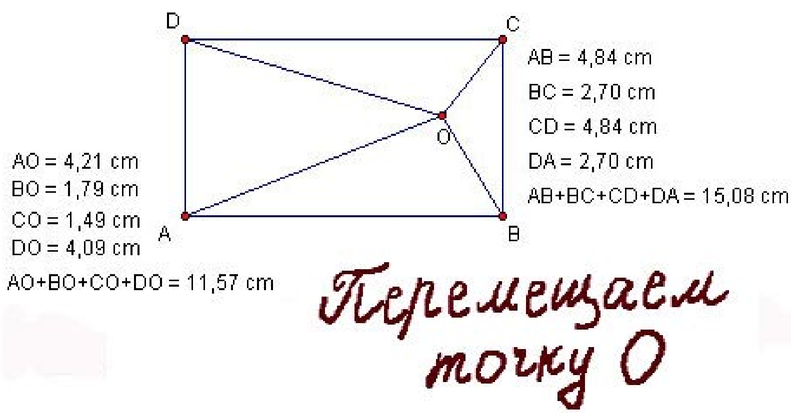


Рис. 14

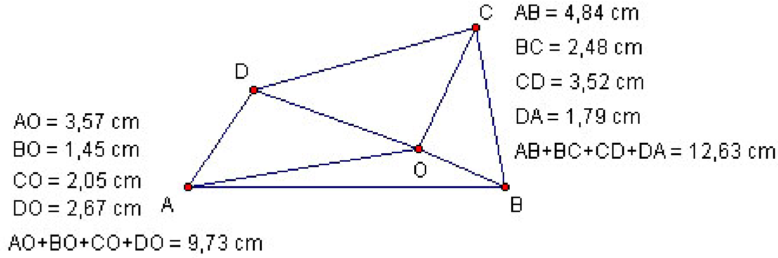


Рис. 15

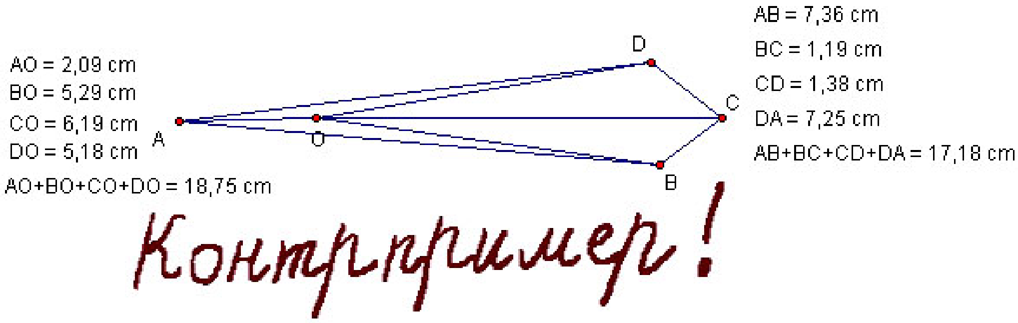


Рис. 16

ний до вершин равна 3AB. Немного «пошевелив» вершины (например, переместив B и D на 1/1000 длины AC, чтобы четырёхугольник стал невырожденным) и сместив точку O во внутреннюю область четырёхугольника $ABCD$, получим четырехугольник, у которого сумма расстояний от точки O до вершин больше периметра.

Учитель:
Верно.

Литература

1. *Иванов С.Г., Поздняков С.Н.* Компьютер в продуктивном обучении математике или Как информационные технологии могут поддержать интеллектуальную свободу обучаемого // Компьютерные инструменты в образовании, 2003. № 5.

2. http://itc.tgl.ru/wiki/index.php/Семинар_Интерактивная_доска_на_уроке

3. *Дубровский В.Н., Поздняков С.Н.* Динамическая геометрия в школе. Занятие 1 // Компьютерные инструменты в школе, 2008. № 1.

4. *Дубровский В.Н., Поздняков С.Н.* Динамическая геометрия в школе. Занятие 2. Геометрические построения. Геометрические места точек // Компьютерные инструменты в школе, 2008. № 2.

5. *Дубровский В.Н., Поздняков С.Н.* Динамическая геометрия в школе. Занятие 3. Геометрические преобразования // Компьютерные инструменты в школе, 2008. № 3.

6. *Дубровский В.Н., Поздняков С.Н.* Динамическая геометрия в школе. Занятие 4. Измерения и вычисления // Компьютерные инструменты в школе, 2008. № 4.

7. *Дубровский В.Н., Поздняков С.Н.* Динамическая геометрия в школе. Занятие 5. Работа с графиками функций средствами динамической геометрии // Компьютерные инструменты в школе, 2008. № 5.

8. *Дубровский В.Н., Поздняков С.Н.* Динамическая геометрия в школе. Занятие 6. Стереометрия в двумерных средах. // Компьютерные инструменты в школе, 2008. № 6.

Иванов Сергей Георгиевич,
кандидат педагогических наук,
научный сотрудник лаборатории
продуктивного обучения ИСМО РАО.