Посов Илья Александрович

РАЗБОР ЗАДАЧИ «СЕЗАМ, ОТКРОЙСЯ!» КОНКУРСА КИО-2009

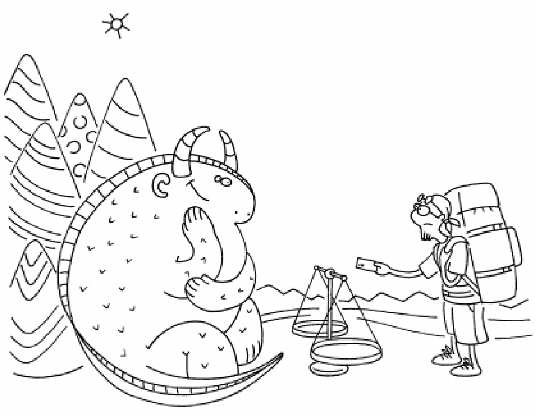
УСЛОВИЕ

Задача «Сезам, откройся!» была предложена на конкурсе КИО «Конструируй, Исследуй, Оптимизируй» в 2009 году. Она относится к классу задач на взвешивания, но ее постановка несколько нестандартна, поэтому мы сформулируем условие задачи постепенно.

Имеется набор монет, состоящий из монет двух разных типов, все монеты первого типа имеют одинаковый вес, монеты второго типа также имеют одинаковый вес, но он незначительно больше веса первых монет. Все монеты обоих типов выглядят одинаково. В задачах на взвешивания принято обозначать два подобных типа «настоящими» и «фальшивыми» монетами, но в данном случае эта аналогия неудачна, потому что оба типа монет для условия полностью равноправны.

Также в наличии есть чашечные весы без гирь. На их чаши можно положить по несколько монет и сравнить получившиеся веса. Весы способны только лишь ответить на вопрос, какая чаша легче или тяжелее, но точное значение разности весов узнать невозможно.

Зададимся следующей целью: для набора, состоящего из m монет, требуется определить, верно ли, что в нем все монеты имеют один тип. По условию мы не можем посмотреть на набор монет и узнать это, но мы можем дать ответ, произведя несколько взвешиваний на весах.



Теперь мы можем сформулировать окончательное условие задачи. При заданном количестве взвешиваний n требуется для как можно большего количества монет m научиться проверять, что все монеты набора одинаковы.

Для участников конкурса условие было литературно обработано, и взвешиваниями монет занимался путник, бросивший вызов Духу Горы Сезам и желающий добыть его сокровища. Интерфейс программы конкурса для решения задачи изображен на рис. 1, а также на обложке журнала.

Участники конкурса по традиции разделены на два уровня, участники первого уровня решали задачу с тремя взвешиваниями, участники второго – с четырьмя. Чтобы соревноваться было интереснее, требовалось не только привести способ сравнения набора из как можно большего числа монет, но также сравнить как можно больше различных наборов.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХ ВЗВЕШИВАНИЙ

Предположим, у нас есть два взвешивания, то есть $n = 2$. Покажем, как для двух взвешиваний проверить, что данные четыре монеты ($m = 4$) одинаковы. Перенумеруем монеты, и в первом взвешивании сравним монеты 1 и 2, а во втором монеты 1, 2 и 3, 4. Если хотя бы в одном взвешивании оказалось, что весы находятся не в равновесии, то, очевидно, не все монеты имеют один вес. А если при обоих взвешиваниях весы были в равновесии, то из результатов первого взвешивания следует, что монеты 1 и 2 имеют один вес, а из второго, что монеты 3 и 4 имеют тот же самый вес.

Будем записывать эти взвешивания кратко следующим образом:

[1][2]
[1,2][3,4]

Пара квадратных скобок соответствует одной чаше весов, в две строки записаны два последовательных взвешивания.

С помощью двух взвешиваний можно проверить, что совпадают веса трех монет:

[1][2]
[1][3]

И веса двух монет:

[1][2]
[][]

В последнем случае одно из двух взвешиваний не используется, так как нам достаточно одного взвешивания, чтобы проверить, что обе монеты имеют один вес.

Итак, при двух взвешиваниях, оказывается, можно проверить на равенство набор из двух, трех и четырех монет. Можно ли проверить на равенство набор из пяти монет? Давайте убедимся, что это невозможно. При взвешивании имеет смысл класть на чаши весов только одинаковое количество монет, потому что если считать, что веса монет различаются незначительно, то чаша, на которой монет больше, обязательно перетянет. Мы и далее всегда будем считать, что при взвешиваниях на обе чаши весов надо класть только одинаковое число монет. Программа конкурса также запрещала класть разное число монет на чаши весов.

Почему же невозможно сравнить 5 монет? За одно взвешивание можно положить на чаши либо по одной монете, либо по две. Сначала попробуем при обоих взвешиваниях положить на чаши по одной монете. В этом случае, очевидно, во взвешиваниях участвовали не более четырех монет, и мы не могли проверить на равенство все пять. Следовательно, при одном из взвешиваний в чашах лежали по две монеты, не умаляя общности, будем считать, что взвешивались все монеты кроме 5.

[1,2][3,4]

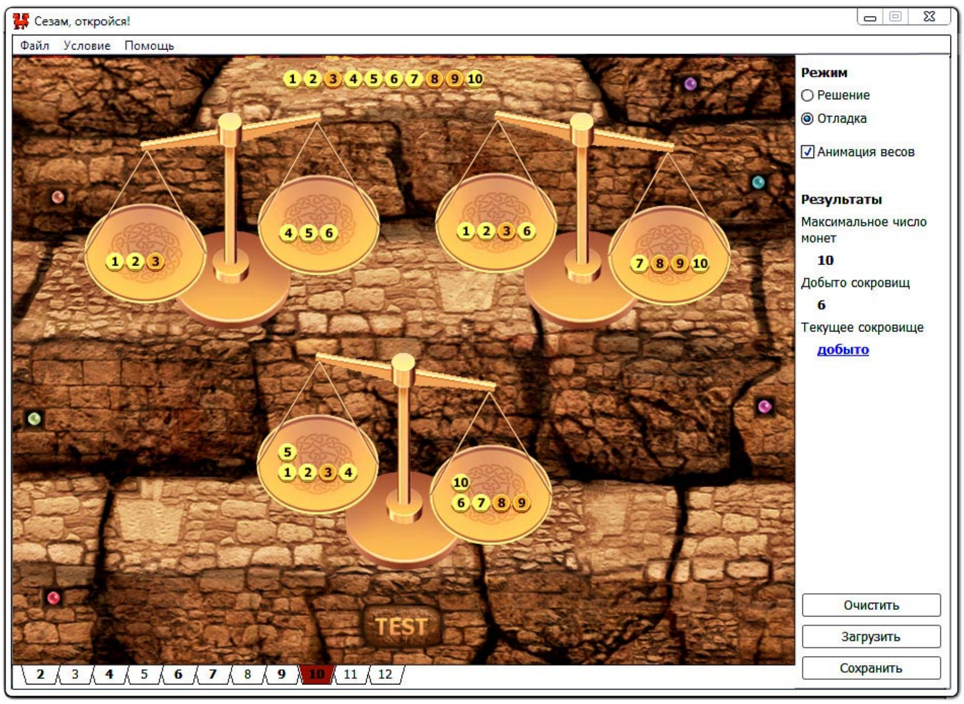


Рис. 1

Как устроено второе взвешивание? Мы обязательно должны использовать монету 5. Если взвесить ее одну с какой-то другой монетой, например, с первой, то взвешивание

[1,2][3,4]
[1][5]

не определит правильно равенствою

Не будет правильно определять равенство, потому что в случае, если монеты 1, 3, 5 имеют первый тип, а монеты 2 и 4 – второй, окажется что при обоих взвешиваниях весы были в равновесии.

Теперь мы знаем, что в обоих взвешиваниях участвовало по две монеты. Существуют только два принципиально разных варианта, как это могло быть:

[1,2][3,4]
[1,2][4,5]

или

[1,2][3,4]
[1,3][4,5]

В первом варианте весы останутся в равновесии, если монеты распределены по типам так: 1, 3, 5 и 2, 4. Во втором варианте монеты надо распределить по типам так: 1, 4 и 2, 3, 5.

Мы доказали, что 5 монет нельзя сравнить с помощью двух взвешиваний. Читатель может доказать самостоятельно, что с помощью двух взвешиваний нельзя взвесить не только 5 монет, но и никакое количество монет, большее 5.

Обозначим через $m(n)$ максимальное количество монет, которое можно сравнить с помощью n взвешиваний. Мы только что проверили, что $m(2) = 4$.

ЕСЛИ КОЛИЧЕСТВО ВЗВЕШИВАНИЙ БОЛЬШЕ ДВУХ

Несложно проверить, что $m(n) \geq 2^n$. Другими словами, 2^n монет всегда можно сравнить с помощью n взвешиваний, для этого надо поступить так, как показано в примере для четырех взвешиваний. Например, 16 монет сравниваются следующей цепочкой взвешиваний:

[1][2]
[1,2][3,4]
[1,2,3,4][5,6,7,8]
[1,2,3,4,5,6,7,8][9,10,11,12,13,14,15,16]

Здесь каждое взвешивание за раз сравнивает в два раза большее количество монет. Этот метод работает для любого числа взвешиваний, а главное, его можно исправить, чтобы он взвешивал любое количество монет, не превосходящее 2^n. Например, 13 монет можно сравнить с помощью четырех взвешиваний следующим образом:

[1][2]
[1,2][3,4]
[1,2,3,4][5,6,7,8]
[1,2,3,4,5,~~6,7,8~~][9,10,11,12,13]

76 участников второго уровня догадались до этой идеи и сравнили все наборы от 2 до 16 монет. Еще 4 участника догадались, как сравнить 16 монет, но сравнили не все наборы от 2 до 16. Всего во втором уровне участвовали более 400 человек.

В первом уровне 93 человека сравнили все наборы от 2 до 8 монет. Еще двое сравнили 8 монет, но не сравнили меньшее количество. Всего в первом уровне участвовали порядка 600 человек.

Можно ли сравнить больше, чем 2^n монет? При $n = 2$, как мы уже выяснили, $m(n) = 2^n$. Но оказывается, что $m(n) > 2^n$ при $n > 2$. Реально, $m(n)$ растет значительно быстрее, чем 2^n. Мы не будем это доказывать, но $m(n) = n^{(1/2 + o(1))n}$. Другими словами, при больших n, $m(n)$ примерно равно корню из n в степени n. Это много, но нам сейчас найти бы хоть одно решение для количества монет, большего, чем 2^n.

Участникам первого уровня это удалось. Из объявленных выше 93 человек 18 сумели сравнить набор из 9 монет, и из них еще трое сравнили набор из 10 монет! Вероятнее всего, при трех взвешиваниях больше 10 монет сравнить и невозможно, но проверить это утверждение очень трудно. Редакция журнала готова принять от читателей доказательства того, что 10 – максимальное возможное число монет при трех взвешиваниях, или же, обратно, пример сравнения более чем для 10 монет. Это решение будет опубликовано.

Пример решения для 9 монет (изображение приведено на обложке):

[1,2,3,4][5,6,7,8]
[1,2,3,9][4,5,6,7]
[1,2,3][4,8,9]

Пример решения для 10 монет (см. рис. 1):

[1,2,3][4,5,6]
[1,2,3,4,5][6,7,8,9,10]
[1,2,3,6][7,8,9,10]

Ни один из участников второго уровня не сравнил больше 16 монет, хотя существует алгоритм сравнения сразу для 30 монет, что значительно больше 16. Снизу приведены серии взвешивания для 18 монет:

[1,2,3,4,5][6,7,8,9,10]
[1,2,3,4,5,6,7,8][11,12,13,14,15,16,17,18]
[1,2,3,4,5,9,10][6,7,8,11,12,13,14]
[1,2,3,4,5,15,16,17,18][6,7,8,9,10,11,12,13,14]

и для 30 монет (изображение приведено на обложке):

[1,2,3,4,5,13,14,15,16,17,18]
[6,7,8,9,10,11,12,19,20,21,22]

[1,2,3,4,5,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22]
[6,7,8,9,10,11,12,23,24,25,26,27,28,29,30]

[1,2,3,4,5,23,24,25,26,27,28,29,30]
[6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18]

[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
[19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30]

Необходимо заметить, что наличие решения для, например, 18 монет, не гарантирует существование решения для 17 монет. И существование решение для 30 монет не гарантирует, что все количества монет от 2 до 30 можно сравнить четырьмя взвешиваниями.

Как строить подобные «большие» решения, будет рассказано в следующем разделе. Но опять же, неизвестно, является ли 30 максимальным количеством монет, которые можно сравнить за 4 взвешивания. Проверить это не так просто.

РЕШЕНИЯ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ МОНЕТ

Решения с большим числом монет можно получить подбором, но для того чтобы строить их целенаправленно, необходима математическая основа. Она описана в статье [1] и мы попробуем повторить здесь некоторые факты. К сожалению, для полного понимания рассказа необходимы знания основ линейной алгебры. Мы не будем предполагать эти знания, опустим доказательства некоторых фактов, а те, кто знаком с линейной алгеброй, без проблем переведут все на ее язык и самостоятельно докажут приведенные утверждения.

Для начала научимся иначе записывать серию взвешиваний. Вместо перечисления, какие монеты лежат на каких чашах, нарисуем матрицу (таблицу). Строка соответствует взвешиванию, столбец – монете. В клетке таблицы стоит 0, если монета не участвует в соответствующем взвешивании, 1 – если монета лежит на правой чаши при взвешивании, –1 – если на левой.

Например, взвешивание

[1,2][3,4]
[1,2][4,5]

Записывается таблицей

$$\begin{matrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

В матрице содержатся числа 0, 1 и –1. При каждом взвешивании на левой и на правой чаше весов лежит поровну монет, поэтому в каждой строке записано поровну чисел 1 и –1. Можно переформулировать это условие иначе, сумма всех столбцов матрицы равна нулевому столбцу. Под суммой столбцов понимается поэлементная сумма чисел в столбцах. Например, первый и третий столбец из примера дают в сумме столбец с числами (0, –1). (Столбцы, естественно, расположены вертикально, но в тексте их получается писать только горизонтально).

Как по матрице проверить, соответствует ли она правильной серии взвешиваний, которая проверяет, что все монеты одинаковы? Оказывается, что хорошие матрицы устроены следующим образом: никакое подмножество ее столбцов, кроме сразу всех столбцов, не дает в сумме нулевой. Это простое утверждение, не будем доказывать подробно, только поясним. В примере выше – второй и четвертый столбцы дают в сумме нулевой. Это значит, что если для нашей серии взвешиваний все монеты кроме второй и четвертой назначить первым типом, а вторую и четвертую – вторым, то весы при всех взвешиваниях останутся в равновесии.

Итак, для того, чтобы построить решение с как можно большим количеством монет, надо построить как можно более широкую матрицу из 0, 1, –1 такую, что сумма всех ее столбцов равна нулевому, но сумма любого подмножества столбцов не равна нулевому. Для взвешиваний с 10 монетами из примера выше матрица устроена так:

$$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Попробуйте убедиться, что любое подмножество ее столбцов не дает в сумме нулевой. Опишем теперь технику, как получать такие матрицы. Будем вести рассказ для примера $n = 3$ взвешивания, но все рассуждения можно повторить для любого другого значения n.

Рассмотрим матрицу из трех строк и четырех столбцов ($n \times n + 1$). Пусть она выглядит, например, вот так:

$$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{matrix}$$

Нас будут интересовать не любая подобная матрица, а только удовлетворяющая определенным условиям. Для знакомых с линейной алгеброй, условие означает, что ее ранг равен 3. Мы сформулируем его без понятия ранга, но надо отметить, что для практики это условие не имеет большого значения. Подавляющее большинство матриц этому условию удовлетворяет, и если мы случайным образом назначим элементам матрицы значения 0, 1, –1, она нам подойдет. Если с матрицей все-таки не повезет, мы получим неправильную серию взвешиваний, но значит надо попробовать воспользоваться другой матрицей.

Рассмотрим всевозможные суммы столбцов матрицы с коэффициентами. Допустим, 4 первых столбца плюс два вторых минус 1 третий плюс 0 четвертых. Кратко это можно записать 4(1) + 2(2) – (3), если вычислить это, получится столбец (–5, 2, –3). Такие суммы столбцов называются линейными комбинациями столбцов. Тривиальная линейная комбинация соответствует сумме с нулевыми коэффициентами, в результате получается, соответственно, нулевой столбец.

Предположим, что у матрицы нет трех столбцов, у которых есть нетривиальная линейная комбинация, дающая нулевой столбец. Матрица из примера ровно такая. Это и означает, что ранг равен 3.

Известно, что четыре столбца (высоты 3) всегда имеют нетривиальную линейную комбинацию, дающую нулевой столбец. Например, это комбинация 3(1) + 2(2) – 4(3) + (4). При перечисленных выше условиях известно, что все такие линейные комбинации отличаются друг от друга домножением на константу. Например, другая линейная комбинация может выглядит так: 6(1) + 4(2) – 8(3) + 2(4). Она в два раза больше исходной. Или (домножаем на -3): –9(1) – 6(2) + 12(3) – 3(4). Можно рассмотреть нецелую линейную комбинацию: 1.5(1) + (2) – 2(3) + 0.5(4). Кроме как домножением на число другие комбинации получить невозможно. Давайте выберем из всех этих комбинаций ту, у которой все коэффициенты целые, и сумма модулей коэффициентов – минимальна. В нашем случае, это комбинация 3(1) + 2(2) – 4(3) + (4).

Имея минимальную целую линейную комбинацию, мы можем получить решение задачи. Первый столбец умножается на 3. Повторим этот столбец три раза:

$$\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix}$$

Далее, второй столбец умножается на 2, напишем его 2 раза. Третий столбец умножается на –4, поэтому изменим знак чисел в столбце и напишем его четыре раза. Четвертый столбец напишем 1 раз. Получим:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

Это матрица, которая соответствует правильной серии взвешиваний. Если бы некоторое подмножество ее столбцов давало в сумме нулевой столбец, это означало бы, что есть более маленькая целочисленная нулевая линейная комбинация столбцов исходной матрицы.

Нам повезло, в матрице оказалось 10 столбцов, значит, мы придумали алгоритм взвешивания для 10 монет:

[1,2,3,4,5][6,7,8,9,10]
[4,5,10][1,2,3]
[1,2,3,10][6,7,8,9]

При неудачном выборе исходной матрицы столбцов оказалось бы меньше. Поэтому для решения задачи нужно устроить перебор матриц n на $n + 1$ с рангом n. Оказывается, матрицы, по которым строятся матрицы с большим числом столбцов, находятся быстро, и можно быстро подобрать хорошее решение к задаче.

Необходимо заметить, что описанный метод позволяет находить хорошие решения, но не позволяет перебрать все возможные решения. Для трех взвешиваний не составляет труда перебрать все возможные матрицы и убедиться, что больше 10 монет с их помощью получить нельзя. Тем не менее, это не является доказательством того, что с помощью трех взвешиваний сравнить более 10 монет невозможно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье [1] с помощью описанного метода доказана уже приведенная ранее формула, что $m(n) = n^{(1/2 + o(1))n}$. В частности, получено, что $m(4) \geq 30$ (это мы видели сами), $m(10) \geq 259606$, $m(15) \geq 2132870658$. Задачу на проверку равенства монет в наборе можно обобщить. Что, если есть не два типа монет, а три и более? Пусть, имеется k типов монет. Обозначим за $m(n, k)$ максимальное количество монет, которые можно сравнить с помощью n взвешиваний. В той же статье проверено, что $m(n, k)$ растет совсем не так быстро при $k \geq 3$ как при $k = 2$. Существуют абсолютные константы c и C, такие, что

$$c \cdot n \log n / \log k \leq m(n, k) \leq C \cdot n \log n / \log k.$$

То есть $m(n, k)$ растет с той же скоростью, что и $n \cdot \log n / \log k$. Надо заметить, что формула верна только при $n + 1 \geq k$. В качестве заключительного упражнения читателю предлагается доказать, что $m(n, k) = n + 1$ при $k > n + 1$.

Литература

1. *Noga Alon, Dmitry N. Kozlov, Van H. Vu:* The Geometry of Coin-Weighing Problems. FOCS 1996: 524–532.

Посов Илья Александрович,
ассистент кафедры ВМ–2
СПбГЭТУ «ЛЭТИ».