Нодельман Владимир Семенович

КОМПЬЮТЕР КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Продолжение. Начало статьи в предыдущем номере.

Деятельностный подход

Деятельностный подход к восприятию учебного материала реализовывался традиционными СО прежде всего в виде так называемых тетрадей с печатной основой (ТПО), где учащимся предлагалось заполнить пропуски в тексте. Пропускались слова или фразы, определяющие понимание характеристических признаков изучаемого понятия, шагов обоснования утверждения и т. д. Порой под чертой пропуска выписывались варианты для выбора подходящего. От задания к заданию количество подсказок уменьшалось, а длина пропусков увеличивалась, последовательно подводя учащихся к полностью самостоятельному выполнению заданий.

Учебные среды – а «ВижуМатика» относится именно к этому типу программных продуктов – не поддерживают массированную работу с текстами. Они представляют собой скорее «математическую лабораторию» для проведения наблюдений, экспериментов и исследований по аналогии с реальными физическими или химическими кабинетами-лабораториями. Вполне естественно, что так же, как и при выполнении традиционных лабораторных работ, ученики используют печатные материалы, в той или иной форме направляющие их учебную деятельность.

С другой стороны, разрабатываются модные системы дистанционного обучения математике, зачастую представляющие собой тексты учебника, «сдобренные» вкраплениями небольших программных модулей, позволяющих обеспечить ограниченную интерактивную деятельность в рамках изучения небольшого конкретного отрезка курса.

Современное понимание деятельностного подхода, активной работы учащихся по усвоению и/или «открытию» знаний принимает новые формы. Для их иллюстрации рассмотрим стереометрическую задачу:

«Доказать, что любую треугольную пирамиду можно пересечь плоскостью так, что сечением будет параллелограмм. Какое из решений имеет наибольшую площадь?»

Вот одна из возможных обучающих стратегий:

1. Загрузи файл с моделью тетраэдра или сконструируй его сам.
2. Построй на его ребрах три точки P_1, P_2 и P_3, через которые в дальнейшем пройдет искомая секущая плоскость. Могут ли все три точки лежать на одном ребре? Две из них? Может ли в качестве одной из этих точек быть выбрана одна из вершин пирамиды?
3. Определи плоскость, проходящую через построенные точки (рис. 11 *а*).
4. Перемещая одну из точек, скажем P_1, вдоль ребра, которому она принадлежит, обрати внимание на изменяющуюся форму четырехугольного сечения. Встречались ли среди этих четырехугольников параллелограммы? Может быть, какая-либо другая фигура претендует на роль хотя бы «частичного» параллелограмма? Какой из известных четырехугольников можно бы назвать «полупараллелограммом»? Расположи P_1 так, чтобы образовалась такая фигура (рис. 11 *б*).
5. Какую из оставшихся двух точек P_2 или P_3 будет лучше попытаться переместить, чтобы обнаружить параллелограмм? Перемещая ее, обрати внимание на изменение формы сечения. Помести точку в подходящем месте (рис.11 *в*).
6. Зависит ли решение от формы пирамиды? Проверь свой ответ, деформируя ее (рис. 11 *г*).
7. Каким условиям должны удовлетворять положения точек для того, чтобы сечение было параллелограммом? Попробуй сформулировать их, используя вершины, ребра и/или грани пи-

рамиды. Каково положение сторон параллелограмма относительно граней, которым они принадлежат? Открой диалог «Геометрия», выбери, последовательно нажимая на них, точки P_1, P_2, P_3 и обрати внимание на их определения. Все они представляют собой выражения вида «pointOnSegment(конецОтрезка, конецОтрезка, число)». Есть ли какая-нибудь связь между числовыми значениями? Равны ли они? Могут ли быть равны только два из них? Исправь, если нужно, эти числа, чтобы они соответствовали твоему предположению. Стал ли параллелограмм «выглядеть» лучше?

8. «Докажи» с помощью «ВижуМатики», что четырехугольник в сечении действительно является параллелограммом (назови его четвертую вершину P_4 и введи соответствующие проверочные условия (рис. 11 *д*). Для этого:

• Переопредели, если необходимо, числовые значения для точек P_1, P_2 и P_3 на равные.

• Замени это значение на другое. Остается ли сечение параллелограммом? Замени это значение на параметр, скажем a. Замени характеристики параметра (максимум, минимум, шаг) на подходящие условию принадлежности точки отрезку. Используй ползунок и/или кнопку «фильм» для плавного изменения параметра, а вместе с ним и модели сечения (рис. 11 *д*). Убедись, что сечение остается параллелограммом:

– наблюдая динамическую модель и

– проверяя постоянство значений двух введенных ранее условий (они всегда остаются TRUE).

• Деформируй пирамиду и повтори анимацию... Каковы другие решения, приводящие к «семейству» параллелограммов в сечении пирамиды? Существуют ли они, и если «Да», то сколько?

9. Для исследования площади параллелограмма добавь выражение «Area(P1,P2,P3,P4)» в окно условий/выражений. Меняя значение параметра a, сравнивай меняющиеся значения этого выражения. Когда оно становится максимальным? Каково значение параметра a в этом случае? Каков геометрический смысл этого? Как расположены наши точки на ребрах пирамиды?

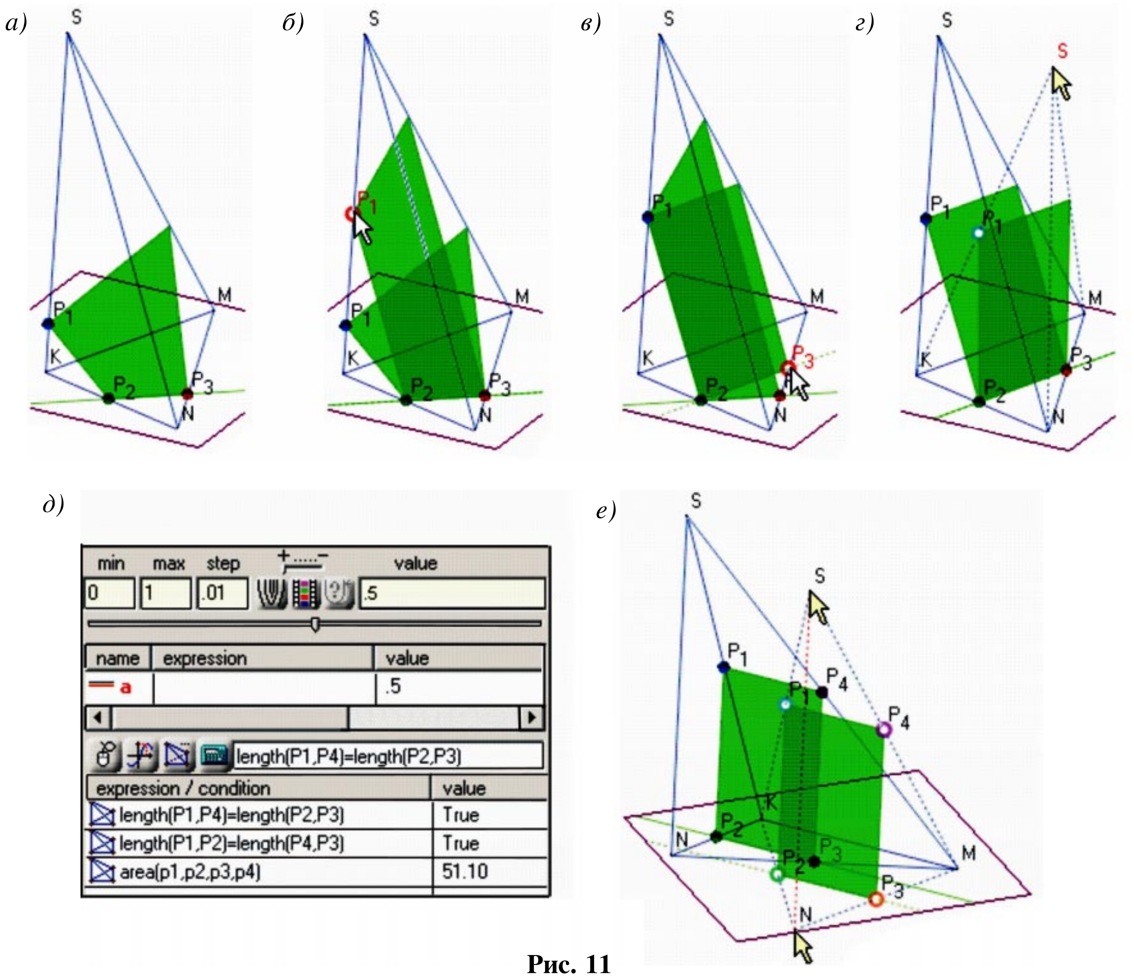


Рис. 11

10. Докажи справедливость нашего предположения. Для этого:

• Выясни, от каких ребер пирамиды зависит параллелограмм. «Подвигай» их (рис. 11 *е*). Меняется ли параллелограмм во время перемещения этих ребер? Как его угол зависит от них? Как длины его сторон зависят от этих ребер (используй параметр *a*)?

• Выпиши подходящую формулу площади параллелограмма по углу и двум сторонам. Замени длины сторон соответствующими выражениями, основанными на длинах ребер и *a*. Полученная формула площади параллелограмма имеет вид $const \cdot a \cdot (1 - a)$, где *const* – постоянный множитель, определяемый характеристиками заданной пирамиды. Это выражение представляет собой функцию от переменной *a*.

• Какому типу известных тебе функций она принадлежит (линейная, квадратичная)? Каковы ее корни? Имеет ли она максимум и почему? При каком значении *a* функция достигает максимума (используй значения корней и свойства функции)? Ты можешь использовать «ВижуМатику» для исследования функции и обнаружения точки ее максимума.

11. Сделай выводы.

Этот пример демонстрирует эффективность интерфейса программы в организации ученических взаимодействий с динамически изменяющейся моделью в процессе поиска решения задачи. Программная поддержка ввода формальных определений, точных значений и «плавных» параметрических изменений математических объектов является принципиально важной для обеспечения осознанного и качественного усвоения изучаемого материала.

Кроме детально обсуждавшихся выше, сформулируем некоторые дополнительные, специфические требования к программным продуктам, предназначенным для использования в преподавании математики.

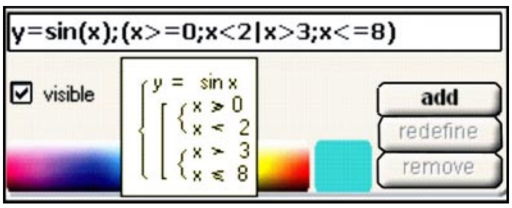


Рис. 12

1. Поддержка преподавания широкого спектра разделов курса (алгебра, геометрия, анализ и др.)

2. Доступность объектов из различных областей при построении конкретных моделей.

3. Доступность аналитической и числовой информации о любом объекте модели.

4. Простота определения и переопределения математических объектов.

5. Поддержка «синхронизированного» многооконного представления модели.

6. Возможность программирования алгоритмически функционирующих моделей и организации соответствующей учебной деятельности.

7. Доступность необходимого инструментария для исследования характеристик изучаемого материала.

Этот список не претендует на полноту и включает как характеристики, смысл и значимость которых вполне ясны из формулировки, так и требующие пояснений. Кратко коснемся лишь четырех последних.

Простота определения и переопределения математических объектов

Определения, по возможности, должны быть представимы в виде, предельно близком к привычным определениям математических объектов. Следует избегать или свести к минимуму потребность в специальном синтаксисе («Plot», «Solve» и т. п.). Программа должна распознавать введенный текст автоматически на основании соответствующих паттернов (рис. 12).

Возможность переопределения существующих объектов позволяет с легкостью делать обобщения. В качестве примера приведем следующую последовательность учебных действий:

1. Построй график функции $y = x^2$ (функция f_1).

2. Добавь график функции $y = f_1(x - a) + b$.

3. Меняй значения параметров *a* и *b* и сравни графики.

4. Выбери первую функцию и переопредели[1] ее как $y = \sin x$.

[1] Выбор существующей функции активирует кнопки «переопределить» и «убрать» (рис. 12). Ученик вводит определение новой функции и нажимает кнопку «redefine».

5. Как изменился второй график?

6. Поменяй значения параметров a и b и сравни графики.

7. Построй в тетради от руки график функции $y = x^3$ (функция f_1). и $y = f_1(x - a) + b$ при тех же значениях параметров. Запиши вторую функцию в «обычном виде» – без f_1.

8. Повтори шаги 4–6, используя функцию $y = x^3$. Сравни графики в тетради с картинкой на экране.

9. Сделай выводы.

Поддержка «синхронизированного» многооконного представления модели

Поддержка «синхронизированного» многооконного представления модели обсуждалась выше в контексте преобразований плоскости и функций комплексного переменного. Трудно переоценить ее роль при изучении линейной алгебры. Представление матриц как преобразований пространства в сочетании с использованием трехмерных объектов и многооконного интерфейса позволяет сделать наглядными такие формальные понятия как *образ, ранг, ядро, собственные значения и собственные векторы линейного оператора, вырожденная матрица, фундаментальное решение системы, и др.*

В качестве примера расмотрим модель, иллюстрирующую преобразование пространства, заданное матрицей поворота на угол α вокруг оси z (рис. 13 *а*). Как и в двумерном случае, в верхнем левом окне изображено «исходное пространство», в котором размещена полупрозрачная пирамида *MKNS* (само пространство представлено цветным параллелепипедом, ребра которого направлены параллельно осям координат и соответственно окрашены, а плоскость *XOY*, на которой расположено основание пирамиды, выделена фиолетовым цветом); в верхнем правом окне представлен образ пространства как результат действия оператора, здесь же штриховой линией изображено исходное положение пространства, облегчающее анализ действия линейного оператора; внизу представлен совместный вид. Учащемуся предлагается «осмотреть» исходную сцену с помощью интерфейса програм-

а) *б)*

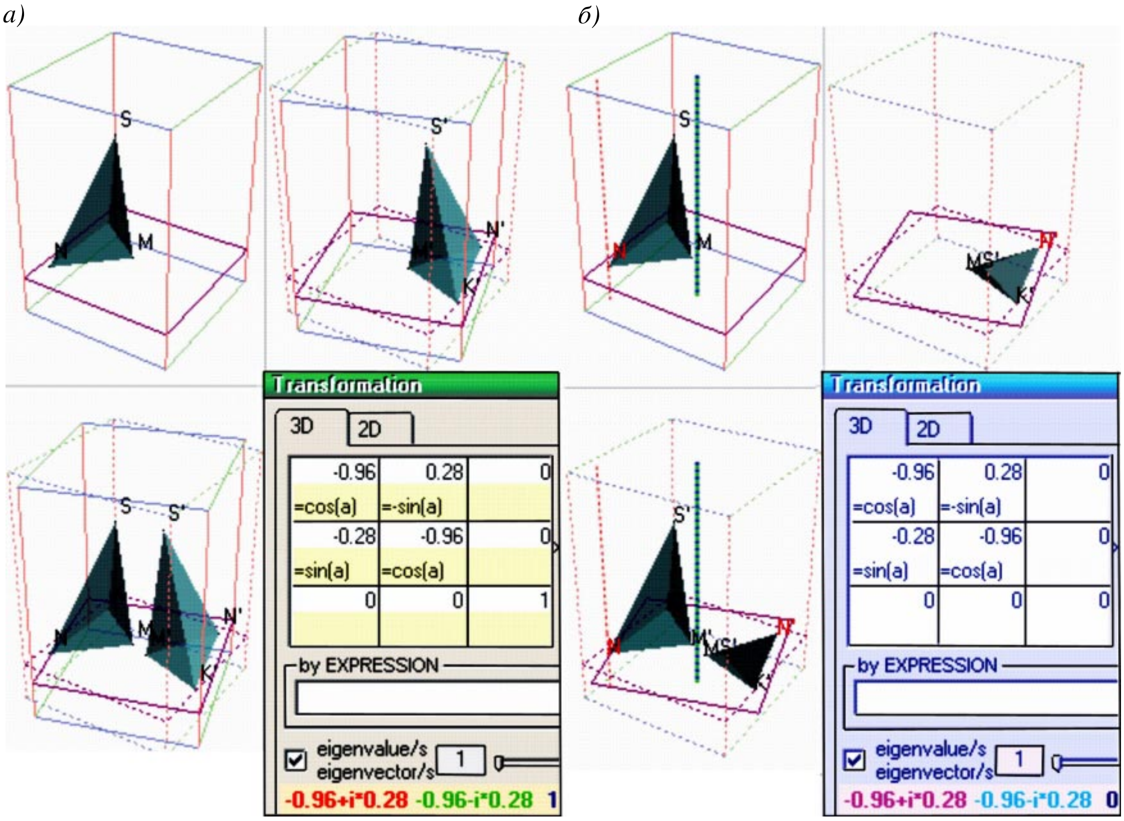


Рис. 13

мы, поддерживающего трехмерную геометрию, при этом изображения во *всех трех окнах* изменяются синхронно. Меняя значение угла поворота, он переопределяет само преобразование. Поворачивается только сцена в первом окне и, соответственно, меняется нижняя картинка. Именованные вершины пирамиды и их образы облегчают восприятие соответствия. Пирамиду, ее вершину, ребро можно перемещать в *любом из окон*, например, с помощью мышки, и наблюдать соответствующие изменения в двух других окнах. Таким образом, связь образа и прообраза становится доступной материальному манипулированию. Учащийся может добавить к сцене любые объекты, будь то плоскости или другие поверхности, и наблюдать характер их трансформации под действием линейного оператора.

Дидактически, особый интерес представляют вырожденные случаи. Достаточно заменить диагональный элемент нижней строки матрицы с 1 на 0, – и все пространство «сплющивается» в плоскость, а пирамида превращается в треугольник или четырехугольник (рис. 13 *б*). Сине-черная штриховая линия представляет ядро оператора: ранг матрицы равен двум, поэтому ядро одномерно, а образ двумерен. Для полноты восприятия ученику предлагается повторить манипуляции, выполнявшиеся прежде. Попытка перемещения точки образа (N' на рис. 13 *б*) приводит к «высвечиванию» ее прообраза – прямой, параллельной ядру и содержащей точку N, или, что то же самое, прямой-ядра, сдвинутой параллельным переносом на вектор N, зримо отображаемый в N'.

Обнулим матрицу и оставим в ней единственную единицу – первый элемент первой строки (рис. 14). В результате все пространство «сжалось» в прямую: ранг матрицы равен 1, поэтому образ пространства одномерен, зато ядро – прообраз 0 – двумерно, это «зеленая» плоскость на рисунке. Попробуем потянуть точку K' – и высветится «красная» плоскость, параллельная ядру и содержащая точку K, то есть плоскость, полученная параллельным переносом плоскости ядра на вектор K, тогда как образом K является «затронутая» точка K'. На эти результаты можно посмотреть и по-другому: «сине-черная» прямая и «зеленая» плоскость проходят через начало координат (содержат нулевой вектор), и их образом является нулевой вектор[1]; другими словами, они представляют фундаментальное решение однородного уравнения $Mx = 0$, определяемого соответствующей матрицей. Прообраз же точки, не совпадающей с началом координат, – это решение неоднородного уравнения ($Mx = N'$ или $Mx = K'$) – прямая или плоскость, представляющие собой ядро, сдвинутое на соответствующий вектор (N или K – частное решение системы, хорошо известное нам из построений). Итак, мы получили иллюстрацию фундаментального факта: решение неоднородной системы уравнений представляет собой сумму: фундаментальное решение (прямая/плос-

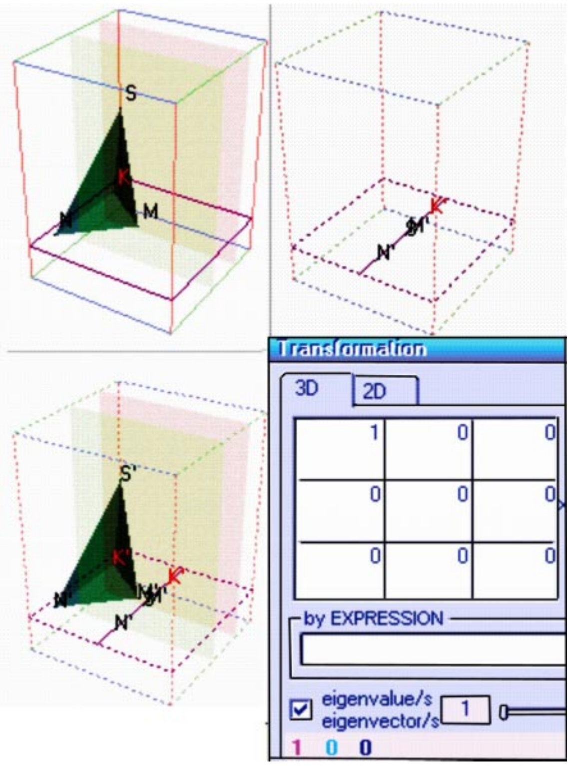
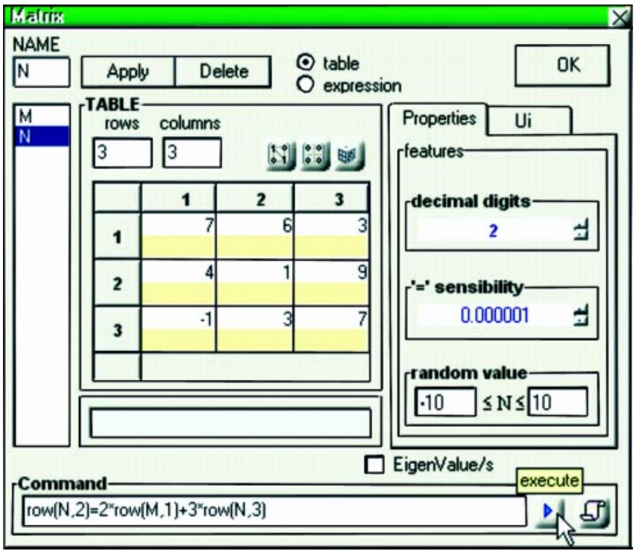


Рис. 14

[1] Для большей убедительности можно предложить учащимся добавить к сцене точку $O(0,0,0)$ и проверить тот факт, что она принадлежит изображению ядра, и на совместной нижней картинке точка O совпадает с точкой O'.

а)



б)

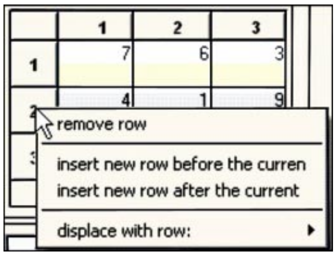


Рис. 15

кость) плюс частное решение (точка-вектор сдвига). И этот результат мы получили по-настоящему «в одно касание», оставалось лишь его осмыслить.

Возможность программирования алгоритмически функционирующих моделей и организации соответствующей учебной деятельности

Учащиеся встречают алгоритмы как в самом содержании математического материала, так и в ходе знакомства с методами и техническими приемами решения математических задач. Компьютерная поддержка познавательных действий алгоритмического типа может осуществляться, по крайней мере, двумя различными путями. Во-первых, это разбиение учебного действия, процесса решения задачи на элементарные шаги и их последовательное аналитическое или «ручное» выполнение в виде отдельных команд. Продолжая линию линейной алгебры, в качестве примера рассмотрим операции над строками матрицы. На рис. 15 *а* изображен ввод команды преобразования строки, а на рис. 15 *б* – демонстрируются возможности манипулирования строками, обеспечиваемые интерфейсом (меню, всплывающее в результате нажатия на правую кнопку мышки, расположенной над заголовком строки). Второй тип поддержки алгоритмических действий основан на использовании встроенного Си-подобного языка программирования и возможности исполнять всю программу или конкретную ее процедуру в режиме отладки: пошагово или только с остановками в определенных местах с индикацией текущих значений переменных (рис. 16). Имеющийся набор готовых программ помогает организовать активное усвоение учебного материала. Собственно программирование может быть темой нетривиального творческого ученического проекта.

Доступность необходимого инструментария для исследования характеристик изучаемого материала

Указанное в подзаголовке условие является важным требованием, которому должна удовлетворять программа, используемая в преподавании математики. Одних лишь стандартных элементов интеракции (мышь, клавиатура, меню и т. д.) недостаточно для поиска и обнаружения скрытых свойств и зависимостей математических объектов. Соответствующие инструменты могут быть представлены в виде специальных тематических диалоговых окон, обслуживающих работу учащихся по изучению различных разделов математики. Эти окна содержат элементы интерфейса, которые позволяют детально определить желаемое действие, охарактеризовать математический объект, настроить конфигурацию сцены и т. д. Рис. 11 *д*, 15 *а*, 16 содержат примеры таких окон-

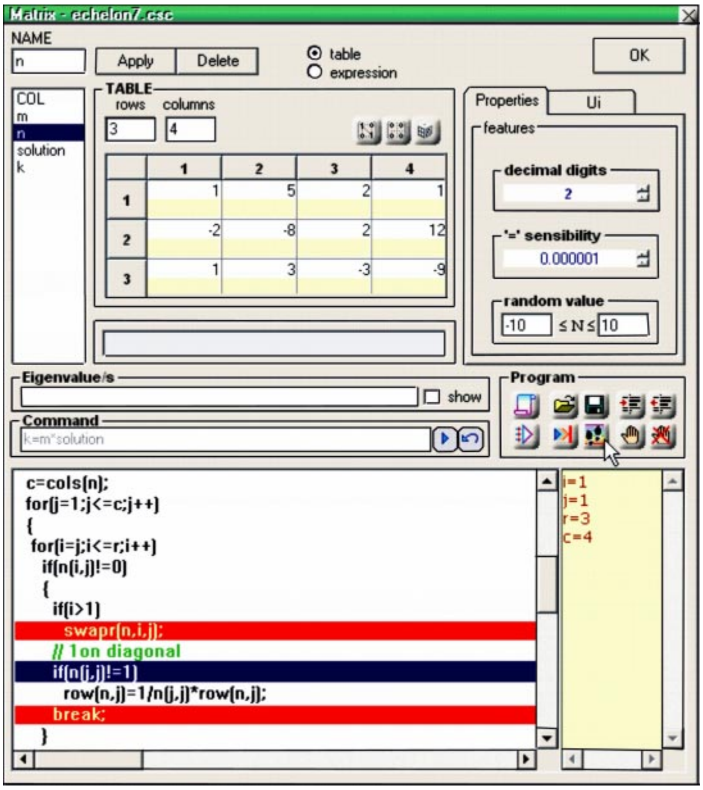


Рис. 16

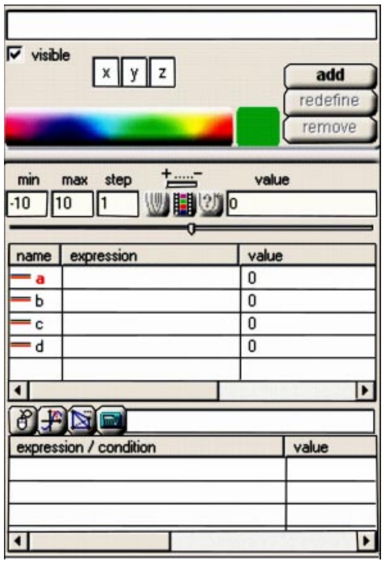


Рис. 17

диалогов. В «ВижуМатике» большинство таких окон имеют классический тип прямоугольников, свободно перемещаемых по экрану. Те же из них, обращение к которым наиболее часто и не зависит от специфики темы, сгруппированы в единую линейку (вдоль правой границы окна программы). Это окно аналитического ввода объектов, окно параметров и окно условий (рис. 17).

Приведенный анализ далеко не полон даже номинально. В стороне осталось, например, использование Интернета в преподавании математики. Компьютер несомненно является средством обучения принципиально нового типа, уже совершившим переворот как в теории, так и в практике преподавания математики. Эти изменения коснулись всех ее аспектов: целей, содержания, методов, форм и средств. И они не завершились, поскольку обусловлены, пожалуй, наиболее быстро меняющимся предметом современного мира – компьютерными технологиями.

Литература

1. *Болтянский В.Г.* Формула наглядности – Изоморфизм плюс простота // Советская педагогика, 1970. № 5.

2. *Антоновский М.Я.* Простота восприятия – важнейшая часть понятия наглядности // Математика в школе, 1971. № 4.

3. *Антоновский М.Я., Болтянский В.Г., Волович М.Б. и др.* Комплексы учебного оборудования по математике. М.: Педагогика, 1971.

4. *Нодельман В.С.* Создание обучающих программ для ЭВМ. Минск, 1988.

5. *Горелик Л.В.* Электронный учебник с динамическими моделями // Компьютерные инстру-

Dr. Vladimir Nodelman,
Holon Institute of Technology,
Faculty of Sciences,
Dept. of Computer Sciences, Israel.