Иванов Сергей Георгиевич,
Рыжик Валерий Идельевич

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС (СДВИГ) ВДОЛЬ ОСИ ОРДИНАТ

Статья представляет собой ориентировочный сценарий занятия, которым учитель может воспользоваться по своему усмотрению, используя материалы на диске. Сценарий рассматривается на примере переноса вдоль оси ординат, но аналогичным образом может быть построено занятие и по иным видам параллельного переноса.

Учитель может по материалам этого занятия провести один или несколько повторительных уроков. Можно также выбрать части этого занятия для проведения уроков по текущему материалу. Предполагается, что содержание занятия позволяет сделать то или другое как в общеобразовательных, так и в профильных классах, в том числе и специализированных по математике.

ЦЕЛЬ ЗАНЯТИЯ

1. Обобщить сведения о параллельном переносе (сдвиге) на плоскости, полученные учениками в разных математических дисциплинах.
2. Напомнить графики основных элементарных функций.
3. Напомнить графический способ решения и исследования уравнений, неравенств, систем с параметрами.

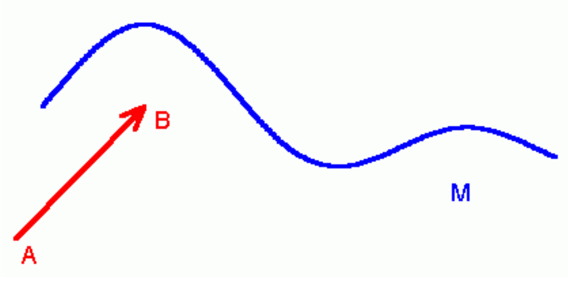


Рис. 1

ПЛАН ЗАНЯТИЯ

1. Общее понятие о сдвиге.
2. Сдвиг в координатной форме.
3. Сдвиг графика функции вдоль оси ординат.
4. Координатная форма сдвига графика функции вдоль оси ординат.
5. Примеры сдвига графика функции вдоль оси ординат.
6. Упражнения.
7. Семейство кривых, полученных сдвигом данной кривой.
8. Примеры задач с параметром.
9. Упражнения.
10. Контрольное задание в тестовой форме.

ХОД ЗАНЯТИЯ

1. Общее понятие о сдвиге фигуры на плоскости

Рассказ учителя:

Сдвиг (параллельный перенос или просто перенос) фигуры является движением. Поэтому он сохраняет расстояния между соответствующими точками. Как и всякое движение, он сохраняет прямолинейность расположения точек, величины углов, а потому параллельность и перпендикулярность прямых.

Сдвиг сохраняет ориентацию плоскости и не имеет неподвижных точек – эти два свойства вполне его характеризуют среди других движений плоскости.

Сдвиг фигуры, в том числе и графика функции, задается вектором.

Пусть нам дан вектор $\overrightarrow{AB}$ и фигура M (рис. 1).

В результате сдвига фигуры M на вектор $\overrightarrow{AB}$ она переходит в фигуру N (рис. 2).

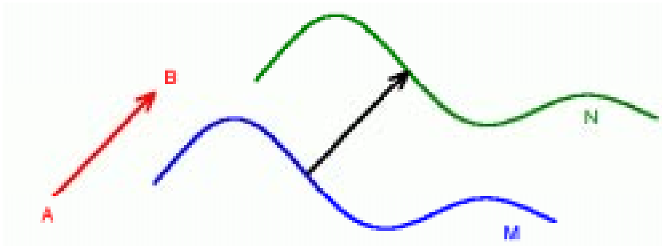


Рис. 2

При этом сдвиге каждая точка X фигуры M переходит в такую точку Y фигуры N, что выполняется равенство: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 3).

Сдвиг фигуры может осуществляться в разных направлениях и на разные расстояния.

2. Сдвиг на плоскости в координатной форме

Рассказ учителя:

На плоскости вектор в системе координат задается парой своих координат. Пусть координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ является упорядоченная пара чисел (p, q). Это записывается так: $\overrightarrow{AB} = (p, q)$.

Формула для сдвига на вектор (p, q):

$$x_2 = x_1 + p,\ y_2 = y_1 + q. \qquad (1)$$

Здесь (x_1, y_1) – координаты исходной точки, (x_2, y_2) – координаты точки, полученной в результате сдвига.

3. Сдвиг графика функции вдоль оси ординат

Рассказ учителя:

На этом занятии мы повторим сдвиги вдоль оси y. При этом сдвиге соответствующий вектор либо сонаправлен с осью y, либо направлен противоположно оси y (рис. 4).

Посмотрите, что происходит с графиком функции при таком сдвиге, например с графиком квадратичной функции.

Про такой график говорят, что он поднимается вверх или опускается вниз на величину, равную длине вектора. Это означает, что ордината каждой точки графика изменяется на одну и ту же величину, увеличивается или уменьшается.

4. Координатная форма сдвига графика функции вдоль оси ординат

Рассказ учителя:

Если сдвиг идет вдоль оси y, то соответствующий вектор имеет координаты $(0, a)$. (При этом если график поднимается, то $a > 0$, а если он опускается, то $a < 0$. Верно и обратное: если $a > 0$, то график поднимается, а если $a < 0$, то он опускается).

Связь между координатами точки и координатами её образа при параллельном переносе: согласно равенствам (1), мы получаем для точки с координатами (x_1, y_1) такие новые координаты (x_2, y_2):

$$x_2 = x_1,\ y_2 = y_1 + a. \qquad (2)$$

При этой записи мы еще раз убеждаемся в том, что при сдвиге графика вдоль оси y абсцисса любой его точки не меняется, а ордината изменяется на величину a: увеличивается при $a > 0$ и уменьшается при $a < 0$. Полезно также записать, как старые координаты выражаются через новые:

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 - a. \qquad (3)$$

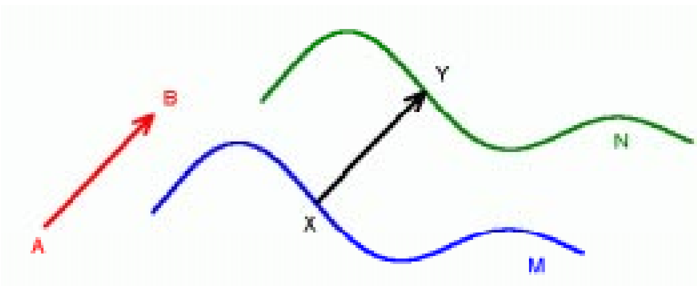


Рис. 3

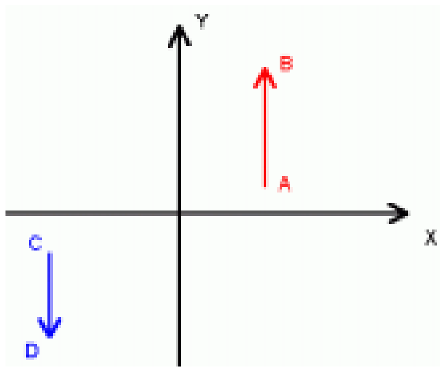


Рис. 4

Теперь рассмотрим связь между сдвигом графика функции и уравнением функции.

Пусть нам была дана функция $y = f(x)$.

Если мы график сдвигаем вдоль оси y на вектор $(0, a)$, то уравнение новой функции, график которой мы получили, будет такой: $y = f(x) + a$. А для построения графика функции $y = f(x) + a$, сначала строим график $y = f(x)$, а затем поднимаем его или опускаем на величину a: поднимаем при $a > 0$ и опускаем при $a < 0$. На практике удобно начать рисование с точек пересечения графика исходной функции с осями координат или точек экстремума (если они существуют), то есть сначала нарисовать образы именно этих точек.

На практике мы в первую очередь должны ясно понимать следующее: когда мы видим уравнение вида $y = f(x) + a$, то это значит, что произошел сдвиг графика функции f на величину a.

Объяснение тому очень простое. Мы докажем, что при одной и той же абсциссе разность ординат равна a.

Пусть была точка (x_1, y_1) на графике функции f. Но тогда выполняется равенство $y_1 = f(x_1)$. Теперь рассматривается точка (x_2, y_2), принадлежащая графику функции $y = f(x) + a$, то есть такая, что выполняется равенство $y_2 = f(x_2) + a$. Получается, что $y_2 = f(x_1) + a = y_1 + a$, то есть все соответствующие (одной и той же абсциссе) ординаты графика первой функции изменились на величину a. Тем самым произошел сдвиг графика вдоль оси y.

Сдвиг... фигуры...

Аналогичное соответствие между двумя множествами на плоскости и уравнениями, задающими эти множества, будет и тогда, когда дано уравнение $f(x, y) = 0$. Если мы кривую, заданную эти уравнением, сдвигаем вдоль оси y на вектор $(0, a)$, то уравнение новой кривой будет таким: $f(x, y - a) = 0$.

Уравнение $f(x, y - a) = 0$ можно обосновать, например, так. В случае явной зависимости $y = g(x)$ мы имеем уравнение $f(x, g(x)) = 0$. После сдвига графика функции $y = g(x)$ на вектор $(0, a)$ мы получим график зависимости $y = g(x) + a$. Тогда $y - a = g(x)$, и уравнение $f(x, g(x)) = 0$ соответствует уравнению $f(x, y - a) = 0$.

Для построения кривой, заданной уравнением $f(x, y - a) = 0$, сначала строим кривую, заданную уравнением $f(x, y) = 0$, а затем поднимаем ее или опускаем на величину a: поднимаем при $a > 0$ и опускаем при $a < 0$.

Разумеется, вместо сдвига фигуры мы можем сдвигать ось x, например, вместо подъема фигуры на 2 можно нарисовать новую ось x, опущенную по сравнению со старой осью x на 2.

Приведем соответствующие примеры.

5. Примеры на сдвиг вдоль оси y

Комментарий:

Учитель выбирает пример из приведенного списка. Он показывает эти примеры сам, либо разбирает их вместе с классом.

В первой серии примеров предлагается написать уравнение (неравенство), которому удовлетворяют координаты точек фигуры, полученной из данной сдвигом вдоль оси y.

В принципе, эта серия не обязана быть первой по счету. Она может появиться и третьей по счету, и даже вообще ею можно не заниматься.

Серия 1

1. Дана функция $y = x$. Ее график сдвинули на вектор $(0, 1)$. Каково уравнение для новой функции?

Решение. Воспользуемся равенствами (3): $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 - 1$. Так как $y_1 = x_1$, то $y_2 - 1 = x_2$. Отсюда $y_2 = x_2 + 1$. Получаем такое уравнение для новой функции: $y = x + 1$.

2. Дана функция $y = x^2 - 1$. Ее график опустили на 2. Каково уравнение для новой функции?

Решение. Вектор сдвига (0, –2). Воспользуемся равенствами (3): $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2$. Так как $y_1 = x_1^2 - 1$, то $y_2 + 2 = x_2^2 - 1$. Отсюда $y_2 = x_2^2 - 3$. Получаем уравнение для новой функции: $y = x^2 - 3$.

3. Дана функция $y = \lg x$. Ее график подняли на 10. Каково уравнение для новой функции?

Решение. Вектор сдвига (0, 10). Воспользуемся равенствами (3): $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 - 10$. Так как $y_1 = \lg x_1$, то $y_2 - 10 = \lg x_2$. Отсюда $y_2 = \lg x_2 + 10$. Получаем уравнение для новой функции: $y = \lg x + 10$.

4. Дана окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Ее подняли на 1. Каково уравнение для новой кривой?

Решение. Вектор сдвига равен (0, 1). Теперь воспользуемся равенствами (3): $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 - 1$. Так как $x_1^2 + y_1^2 = 1$, то $x_2^2 + (y_2 - 1)^2 = 1$.

Получаем уравнение: $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

5. Фигура на плоскости задана неравенством $x + y \le 2$. Ее опустили на 2. Каким неравенством задается полученная фигура?

Решение. Вектор сдвига равен (0, –2). Теперь воспользуемся равенствами (3): $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2$. Так как $x_1 + y_1 \le 2$, то $x_2 + (y_2 + 2) \le 2$ или $x_2 + y_2 \le 0$. Получаем неравенство: $x + y \le 0$.

Серия 2

Комментарий:

Во второй серии примеров предлагается нарисовать фигуры, которые получаются из данной сдвигом вдоль оси y.

Нарисовать фигуры, которые задаются такими условиями:

1. $y = 1 - 2x$;
2. $y = x^2 + x - 1$;
3. $y = (x + 1)/x$;
4. $y = -1 - \sqrt{x}$;
5. $y = \lg 10x$;
6. $|x| + |y - 1| = 1$;
7. $y < 2^x + 1$.

Серия 3

1. Приведите пример такой функции, которая после сдвига графика вверх на 1, положительна на всей области определения.

2. Приведите пример такой функции, у которой после сдвига графика вниз на 2 число нулей увеличивается.

3. Приведите пример такой функции, что при любом сдвиге графика вдоль оси y она принимает значения разных знаков.

4. Приведите пример такой функции $f(x)$, что $f(-x) - 1 > 0$.

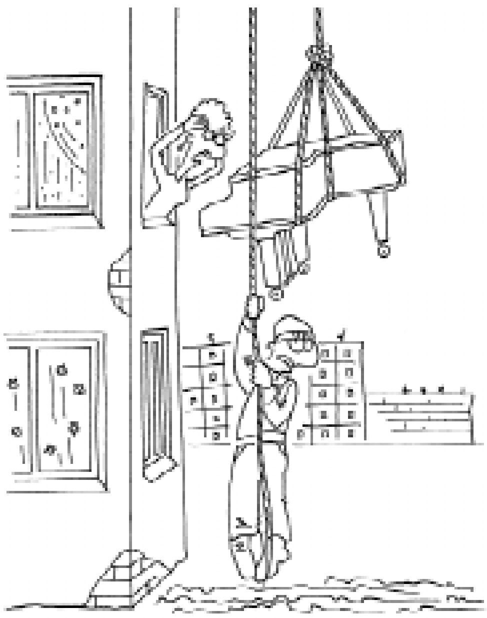
5. Нарисуйте множество комплексных чисел z таких, что $|z + i| \le 3$.

6. Нарисуйте интегральную кривую, которая удовлетворяет условию $y' = y$ и проходит через точку (0,–1).

7. Можно ли сдвигом вдоль оси y получить из графика функции $y = x^2 - x$ график функции $y = x^2 + x$?

8. График производной одной функции получается из графика производной другой функции сдвигом вдоль оси y. Будет ли это верно для графиков самих функций?

9. Существует ли сдвиг, в результате которого кривая, заданная уравнением $y = 1 / (x^2 + 1)$ перейдет в кривую, заданную уравнением $y = -x^2/(x^2 + 1)$?



...сдвиг вдоль оси y...

10. Кривая, уравнение которой $y = \log_2(-2x)$ получена сдвигом на вектор (0, 1). Из какой кривой?

6. Упражнения на сдвиг вдоль оси *y*

Серия 4

Каким условием задается фигура, полученная сдвигом вдоль оси y:

1) графика функции $y = 1/x$ на вектор (0, –5);

2) графика функции $y = \sin x$ на вектор (0, 1);

3) кривой, заданной уравнением $y - |x| = 0$ и поднятой на 3;

4) фигуры, заданной неравенством $x^2 + y^2 \le 1$ и опущенной на 4.

Серия 5

Нарисуйте фигуры, которые задаются такими условиями:

1) $y = -1 - 0{,}5x$;

2) $y = -x^2 + x + 1$;

3) $y = (1 - x)/x$;

4) $y = |1 - \sqrt{x}|$;

5) $y = -\lg_2(4x)$;

6) $|x| + |y + 1| \ge 3$;

7) $\sin x - \sin y = 0$;

8) $\cos(x + y) = 0$.

7. Семейство кривых, полученных сдвигом данной кривой

Рассказ учителя:

Теперь мы можем трактовать уравнение вида $y = f(x) + a$, где a – произвольное число, как уравнение фигуры, полученной из графика функции $y = f(x)$ в результате сдвига на вектор $(0, a)$, иначе говоря – как график функции $y = f(x)$, поднятый или опущенный на величину a вдоль оси y. (Аналогично можно трактовать неравенства вида $y > f(x)$ или уравнения вида $f(x, y) = 0$). При каждом значении a мы будем получать конкретную кривую. Все вместе они образуют семейство кривых, полученных из данной сдвигом вдоль оси y.

Ясно, что все семейство кривых нарисовать в данном случае невозможно, так как оно бесконечно.

Важно заметить, что через точку на плоскости может проходить только одна кривая из данного семейства. Эта ситуация хорошо известна, например, при нахождении первообразной для данной функции. Имея равенство $\int f(x)dx = F(x) + C$, мы толкуем его так: для данной функции $f(x)$ существует бесконечное множество первообразных. Все они отличаются от какой-либо одной из них на постоянную C. Это как раз и означает, что графики всех первообразных получены из какого-то одного сдвигом вдоль оси y. Так, например, все первообразные для функции $y = x^2$ имеют вид $y = (1/3)x^3 + C$.

Графическая иллюстрация с помощью сдвига позволяет разобраться в решении и исследовании уравнений, неравенств, систем с параметром.

8. Примеры задач с параметром

1. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - x - a = 0$ больше 1, а другой меньше 1?

Решение. Запишем это уравнение в таком виде: $x^2 = x + a$.

Нарисуем график функции в левой части: $y = x^2$. На этом же рисунке нарисуем несколько кривых из правой части равенства: $y = x + a$.

Можно заметить, что при $a < 0$ оба корня уравнения, если они есть, отвечают условию задачи. Аналитическое решение задачи дает нам необходимое и достаточное условие существования обоих корней: $a > -1/4$.

Рассмотрим случай $a = 0$. Видим, что условию задачи отвечает один корень уравнения.

Рассмотрим случай $a > 0$. Условию задачи отвечает один корень уравнения.

Теперь можно сформулировать ответ на поставленный вопрос: уравнение имеет оба корня, отвечающие условию задачи, при $0 > a > -1/4$.

2. Может ли неравенство $|1 - |x|| < a - x$ иметь решением симметричный промежуток?

3. Может ли уравнение $\lg(ax) = x$ иметь два решения?

4. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases}$ имеет одно решение?

9. Упражнения

1. При каких значениях параметра a решением неравенства $\sqrt{x} \geq a - x$ является промежуток [1, 2] ?

2. Сколько решений имеет уравнение $\sin x - x = a$?

3. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + a = 1 \end{cases}$ имеет одно решение?

4. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y > a \end{cases}$ имеет решения в третьей четверти?

5. Сколько решений имеет система $\begin{cases} \sin(x + y) = 1 \\ \sin(x - y) = 1 \end{cases}$, если $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$?

6. При каких значениях параметров a и b решением неравенства $x^2 + a > x + b$ является промежуток [–1, 1]?

10. Контрольное задание (в тестовой форме)

Комментарий:

Ученикам предлагается несколько утверждений. На каждое из них ответ дается либо в утвердительной форме («да»), либо в отрицательной форме («нет»).

Тестирование проходит в классе. Из последующего списка учитель может выбрать любые задания.

Это утверждение верно:

1. В результате сдвига на вектор (0, –1) график функции $y = \lg x$ переходит в график функции $y = \lg (x/10)$. (Да)

2. Существует сдвиг вдоль оси y, в результате которого график функции $y = (x - 1) / x$ переходит в график функции $y = (2x - 1) / x$. (Да)

3. Существует функция, имеющая единственный нуль, и такая, что в результате любого сдвига вдоль оси y она имеет единственный нуль. (Да)

4. Существует такое значение параметра a, при котором система уравнений $\begin{cases} x^3 - a = 1 \\ y = x^{1/3} + a \end{cases}$ имеет больше двух решений. (Нет)

5. Если первая функция больше второй, то и первообразная первой функции больше. (Нет)

6. Если две линейные функции имеют один и тот же угловой коэффициент, то их графики совмещаются сдвигом. (Да)

7. Существует сдвиг, в результате которого фигура, заданная неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$ переходит в фигуру, заданную неравенством $x^2 + (y - 1)^2 \geq 1$. (Нет)

8. Существует сдвиг, в результате которого фигура, заданная неравенством $|x - y| \leq 1$ переходит в фигуру, заданную неравенством $y - 4 \leq x \leq y - 2$. (Нет)

Иванов Сергей Георгиевич,
кандидат педагогических наук,
научный сотрудник лаборатории
продуктивного обучения ИСМО РАО,

Рыжик Валерий Идельевич,
кандидат педагогических наук,
заслуженный учитель РФ, учитель
Санкт-Петербургского лицея
«Физико- техническая школа».