Иванов Сергей Георгиевич

«ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА» С ИНТЕРАКТИВНЫМ УСТРОЙСТВОМ MIMIO

За прошедшие несколько лет нашли применение различные компьютерные средства для поддержки обучения школьников математике и другим школьным предметам. На эту тему проводятся открытые уроки, семинары для учителей.

Как показывает практика, учителя часто задают вопрос: будут ли ученики после такой работы лучше решать задачи на бумаге? Иногда задают и другой вопрос: как при компьютерной поддержке организовать дискуссию с классом – например, при объяснении нового теоретического материала или разборе типовых примеров? Причём так, чтобы это был не монолог учителя с демонстрацией заранее подготовленных сюжетов, а разговор с активным участием школьников.

Предположим при этом, что в классе всего один компьютер – например, это кабинет математики.

В статье показан один из возможных способов совместить на одном уроке дискуссию с компьютерным экспериментом. Для дискуссии применяется интерактивная школьная доска, а для компьютерного эксперимента – манипуляторы.

РАБОТА ШКОЛЬНИКОВ С МАНИПУЛЯТОРАМИ

Сначала остановимся на организации исследовательской работы школьников с применением программных манипуляторов.

Манипуляторы – динамические модели, произвольная деятельность с которыми концентрирует внимание на конкретных идеях (методах, понятиях) предмета.

Задания по манипуляторам опираются на парадигму технического мышления: ученик здесь «думает руками».

При работе с манипулятором можно наблюдать за характеристиками объекта. Геометрические объекты на экране компьютера можно плавно изменять, добиваясь выполнения тех или иных условий и проверяя или опровергая предположения.

Эксперименты можно проводить и с алгебраическими объектами. Например, можно проследить, как изменяется форма графика функции, количество корней и

При работе с манипулятором можно наблюдать за характеристиками объекта...

другие характеристики в зависимости от параметров, а затем самостоятельно или под руководством учителя постараться объяснить эти изменения.

Еще одна перспективная идея состоит в том, что даже отдельно взятый манипулятор «График функции» можно использовать для организации учебной деятельности по многим сюжетам школьной математики.

Например, проверка задач с параметром происходит по следующей схеме: ученик может посмотреть на график и убедиться в том, что некоторое условие нарушено. Если в плане аргументации программа уступает человеку, то в рисовании графиков, тем более зависящих от параметра, возможности компьютерной среды гораздо шире.

Для некоторых математических задач решение с помощью компьютерного эксперимента приобретает принципиально новые черты по сравнению с бескомпьютерным методом.

Пример 1. *Существует ли треугольник, все стороны которого больше 5 сантиметров, а площадь меньше 1 квадратного сантиметра?*

Решить эту задачу логическими рассуждениями школьникам, как показывает практика, непросто. Но если построить треугольник, а затем непрерывно его деформировать, наблюдая за изменяющимися цифрами, то задача заметно упрощается.

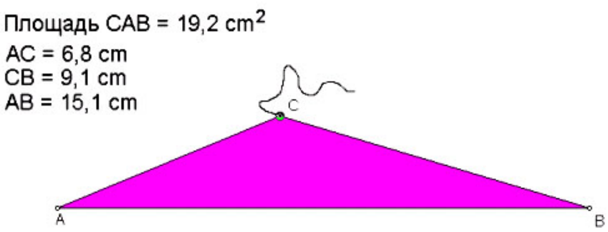

Рис. 1

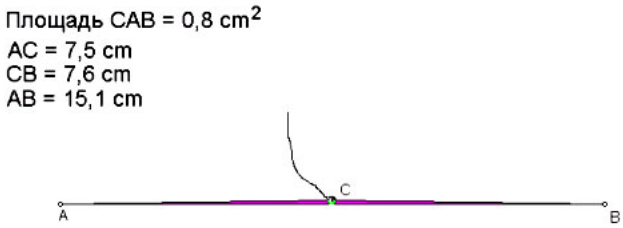

Рис. 2

Первый этап эксперимента: произвольное перемещение точки C на плоскости (изображена траектория точки). Ученик заметил, что при уменьшении расстояния от точки C до прямой AB площадь уменьшается.

Второй этап эксперимента: заметив закономерность (уменьшение площади треугольника при перемещении точки к прямой), школьник перенес точку C на такое расстояние от прямой AB, чтобы площадь треугольника стала меньше 1 квадратного сантиметра.

Как показывает практика, примерно 80% школьников с помощью «Живой математики» находят решение этой задачи за 5 минут и быстрее. При этом они оказываются в состоянии объяснить полученный результат, даже если недавно познакомились с формулой для площади треугольника.

В данном случае компьютерная среда обеспечивает путь от предположения к эксперименту, от результата эксперимента к пониманию математической сущности задачи.

Если же предложить ученикам 7, 8 или 9 класса эту же задачу в бескомпьютерном варианте, то первое правильное решение поступает обычно не ранее чем через полчаса размышлений. В основном предлагаются аргументы «Если стороны длинные, то площадь не может быть маленькой». Как правило, самостоятельно решить эту задачу без компьютера способны не более 25% школьников, если предоставить достаточно времени.

Еще одно заметное различие проявляется при проверке долговременной памяти. Если через 2–3 месяца после решения рассмотренной задачи предложить ребятам вспомнить решение, то в группе школьников, исследовавших задачу на компьютере, решение вспоминают примерно 20% школьников. Такая же проверка в группе, решавшей задачу без компьютера, дает не более 10% (эксперименты проводились в нескольких группах со школьниками разного возраста).

Компьютерный эксперимент помогает не только угадать ответ, но и привести геометрическое обоснование. Еще одна существенная деталь: дети не просто машинально провели эксперимент, а решили содержательную геометрическую задачу, которую без компьютера они решают гораздо дольше и забывают гораздо быстрее.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНГО УСТРОЙСТВА MIMIO

Интерактивное устройство MIMIO позволяет наносить рисунок «виртуальным маркером» – устройством, внешне напоминающим лазерную указку и оставляющим на экране, вывешенном на стене, виртуальный след. След может быть или произвольной формы (например, это удобно для рисования траектории, для написания формул) или в виде правильных фигур – отрезков, эллипсов, прямоугольников. Есть возможность регулировать цвет и толщину линии, вставить текст, копировать рисунки из MIMIO в другие программы, вставлять рисунки в MIMIO. Предусмотрена и система распознавания текста: рукописный текст, написанный с помощью маркера чётким почерком (лучше печатными буквами), автоматически преобразуется в обычный текст. А при нечётком почерке некоторые буквы будут распознаны неточно.

Урок может быть организован следующим образом. Учитель даёт постановку задачи, затем проходит дискуссия в MIMIO, при которой на доске появляются формулы и рисунки, причём у доски одновременно может находиться несколько школьников, рисуя и обсуждая новые объекты на доске.

При необходимости иллюстрация может быть перенесена из манипулятора в MIMIO, чтобы рисовать рядом с ней. Для MIMIO это будет уже не динамическая, а статическая иллюстрация, так что проверка, как в манипуляторе, школьникам на доске недоступна.

Пример 2. *Найдите наибольшее значение функции $y = 3 \sin x + 4 \cos x$.*

Дискуссия по этой задаче может быть, например, такой.

Ученики:

Может быть, наибольшее значение суммы функций равно сумме максимумов? Тогда наибольшее значение функции $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ равно 7.

Учитель:

Предлагаю проверить.

Построим в среде «Живая математика» два графика: $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ и $y = 7$ (рис. 3).

...при нечётком почерке некоторые буквы будут распознаны неточно...

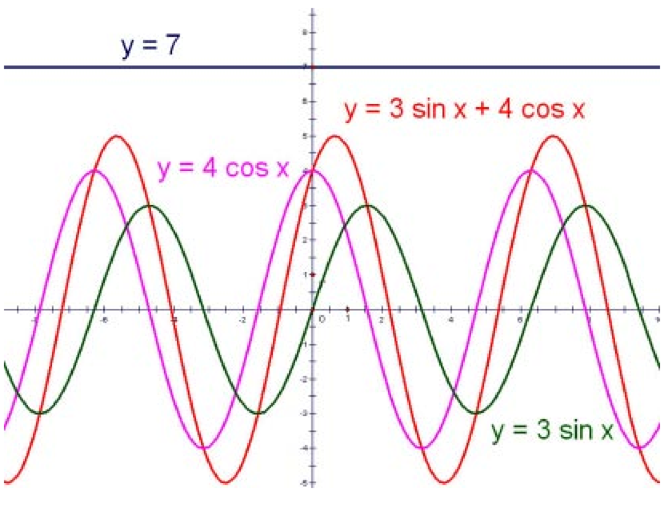

Рис. 3

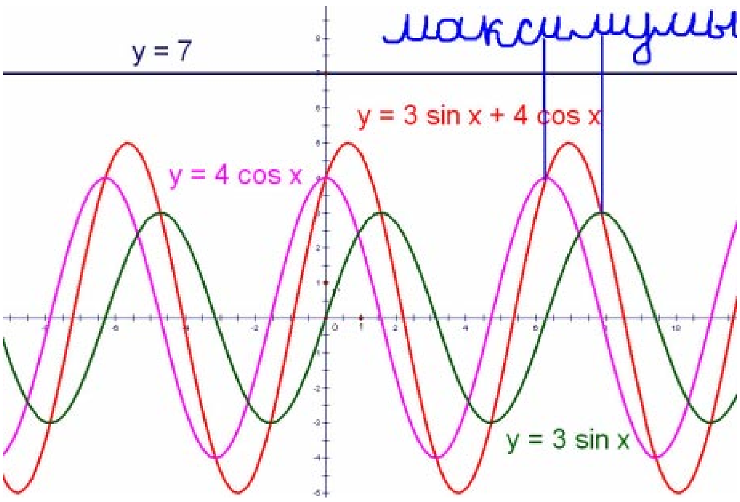

Рис. 4

Как видите, наибольшее значение функции $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ не равно 7. Как вы думаете, почему?

(Рисунок переносится в среду MIMIO, и на этом статическом рисунке ученики иллюстрируют свои рассуждения.)

Ученики:

В этом случае наибольшие значения слагаемых достигаются не одновременно, поэтому максимум не равен 7 (рис. 4).

Чему он тогда равен?

Найдём абсциссу точки максимума с помощью производной. $y' = 3 \cos x - 4 \sin x$. Тогда для нахождения значения в точке максимума придётся искать синус от арктангенса и косинус от арктангенса. Как упростить это выражение? Такой формулы мы не помним.

Учитель:

Может быть, преобразовать выражение

$y = 3 \sin x + 4 \cos x$

к виду, более удобному для поиска максимума? Для суммы искать максимум не всегда удобно.

Ученики:

И правда, из формулы синуса суммы мы выводили формулу

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

Правда, в этом случае снова синус от арктангенса, но здесь он не мешает искать максимум, потому что наибольшее значение синуса равно 1.

В нашей задаче

$$3\sin x + 4\cos x = \sqrt{3^2+4^2}\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = 5\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right).$$

Наибольшее значение этой функции равно 5.

(Между собой ученики могут общаться и устно, и показывая друг другу формулы в тетради, и выписывая формулы с помощью MIMIO).

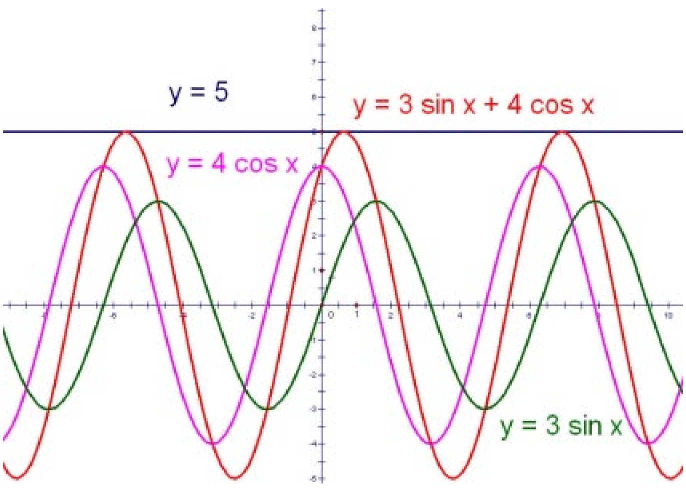

Рис. 5

Учитель:

Построим два графика (рис. 5): $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ и $y = 5$.

Как видите, наибольшее значение функции $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ действительно равно 5. Задача решена.

Пример 3. *Найдите все значения параметра а, при которых функция $x^2 - 4x + a - 1$ имеет два положительных корня?*

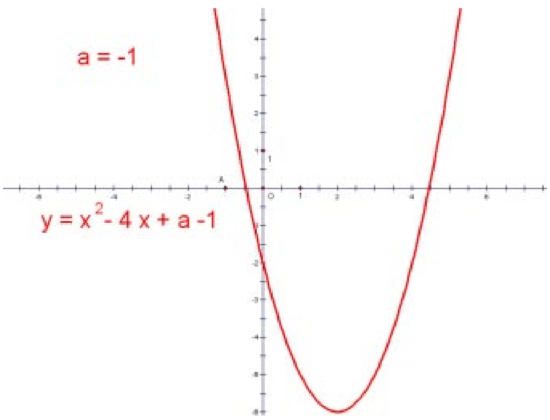

Рис. 6

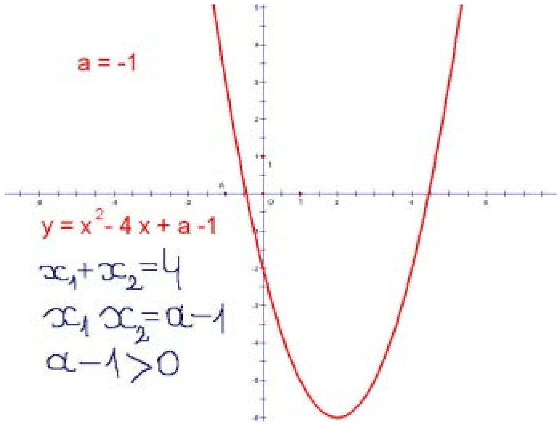

Рис. 7

Ученики:

Необходимо, чтобы были два корня, то есть чтобы дискриминант был положительным. Дискриминант равен 5 – a, поэтому a < 5. Может быть, это ответ?

Учитель:

Проверим на манипуляторе. Построим график функции $y = x^2 - 4x + a - 1$, а в качестве параметра a возьмём абсциссу точки, которую будем перемещать по оси абсцисс (рис. 6).

Как видите, условие a < 5 недостаточно, корни не всегда положительны. Как думаете, почему?

Ученики:

Мы же при вычислениях не учли знаки корней! Только как их учесть?

Учитель:

Например, по теореме Виета.

Ученики:

В самом деле: сумма и произведение корней должны быть положительными. Сумма равна 4, а произведение равно a – 1. Так что a – 1 > 0.

Условие существования двух корней: a < 5. Так что получим ответ: 1 < a < 5.

Учитель:

Проверим ответ на манипуляторе. Как видите, действительно для таких значений параметра, и только для них, условие выполнено. И видно, что в крайних точках интервала (1, 5) условие нарушается.

Пример 4. *Найдите геометрическое место ортоцентров всех треугольников, вписанных в данную окружность.*

Ученики:

Ортоцентр треугольника может лежать внутри круга, может на границе, а может и за пределами круга – последний случай для тупоугольных треугольников. И чем «тупоугольнее» треугольник, тем дальше ортоцентр от центра круга. Так что ответ – вся плоскость.

Учитель:

Проверим гипотезу на манипуляторе. Вершины треугольника перемещаются по окружности, а ортоцентр оставляет след на плоскости (рис. 8).

Как видите, ортоцентр тупоугольного треугольника закрашивает не всю плоскость – он находится не дальше трёх радиусов круга от центра круга.

Как думаете, почему?

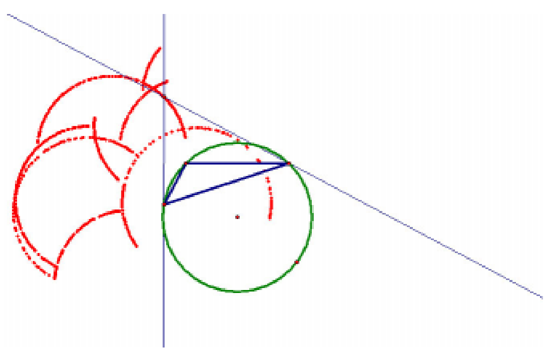

Рис. 8

Ученики:.

Может быть, это связано с отношениями расстояний между замечательными точками и прямыми в треугольнике? Где встречаются отношения 3:1 или 2:1? Точки пересечения медиан в этой задаче нет...

Учитель:

Подсказываю. Вспомните про расстояние от центра описанной окружности до стороны.

Ученики:

Вспомнили!

Расстояние от центра описанной окружности до стороны в два раза превышает расстояние от ортоцентра до противолежащей ей вершины! Поэтому ортоцентр не может находиться на расстоянии дальше двух радиусов окружности от вершины и дальше трёх радиусов от центра окружности (рис. 9).

Так что ответом будет круг радиуса $3R$ без границы, где R – радиус круга в условии.

Учитель:

Полностью ли вы решили задачу?

Ученики:

Нет, надо ещё обосновать, что каждую точку круга радиуса $3R$ можно получить таким образом. Это можно сделать из соображений непрерывности. Если основание равнобедренного треугольника перемещается, оставаясь перпендикулярным радиусу, то расстояние от ортоцентра треугольника до центра круга будет принимать все значения от 0 до $3R$.

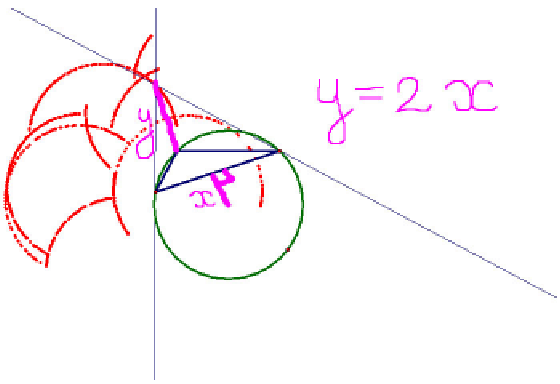

Рис. 9

Учитель:

Верно, теперь задача решена.

ТИПОЛОГИЯ ЗАДАЧ

Компьютерная поддержка особенно эффективна при решении конструктивно-исследовательских задач. Конструктивные задачи понятнее школьникам по своей формулировке (экспериментальный подход понятнее, чем доказательства и вычисления), а исследовательские задачи позволяют каждому перемещаться в своем темпе, а иногда – в своем направлении. К тому же конструктивно-исследовательские задачи допускают эффективную компьютерную реализацию.

Это, например, задачи на построение объекта с заданными свойствами, задачи на максимум и минимум, задачи на геометрическое место точек. В таких задачах иногда сложно найти ответ, но когда ответ найден, легко найти и обоснование.

Из алгебраических сюжетов для организации дискуссии с MIMIO удобны, например, такие задачи.

• Покажите участки монотонности данной функции. На виртуальную доску переносится график, и ученики должны нарисовать ответ на оси абсцисс.

• Приведите пример хотя бы одной функции с заданным свойством – например, чётная функция, имеющая корень в данной точке.

• Постройте график функции (в декартовых или в полярных координатах).

• Найдите количество корней уравнения, знаки корней. Можно поставить те же вопросы в зависимости от параметра функции.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ УРОКА

Ученики выдвигают гипотезу, обсуждают её на виртуальной доске MIMIO, затем их ответ проверяют с помощью манипулятора.

Результат обсуждения в виде графического рисунка переносят с интерактивной

...исследовательские задачи позволяют каждому перемещаться в своем темпе...

доски в манипулятор и проверяют с помощью компьютерного эксперимента. Например, в задачах на геометрическое место точек можно сравнить ответ, нарисованный на доске, с ответом, полученным в результате эксперимента. В качестве манипулятора можно использовать чертёж в «Живой математике».

При этом дискуссия у интерактивной доски и на манипуляторе чередуются – после проведения эксперимента с манипулятором, проверив возникшее предположение, можно вернуться к интерактивной доске и продолжить дискуссию. И так, если понадобится, несколько раз.

Манипулятор выступает в роли «арбитра» в процессе дискуссии, а интерактивная доска помогает провести беседу в естественной форме, привычной для школьников.

Ко многим конструктивно-исследовательским задачам можно предлагать обобщения, задавать дополнительные вопросы. Тогда исследование и дискуссия у доски пройдут уже по новому условию задачи.

Такой урок с дискуссией может проходить и после того, как ребята поработали с манипуляторами в кабинете информатики, каждый за своим компьютером. В этом случае они поделятся результатами своих экспериментов, затем вместе посмотрят эксперимент с манипулятором для общего обсуждения с помощью виртуальной доски MIMIO.

Ещё одна возможность для такой дискуссии – использовать заранее подготовленный шаблон с серией подсказок при решении задачи. Например, такой метод актуален для задач на построение сечений многогранников. Если в процессе дискуссии выяснилось, что школьники не нашли правильного продолжения, можно предложить подсказку (в данном случае это будет следующий шаг построения).

Если некоторые школьники не участвовали в дискуссии, то проверку их знаний за урок можно проводить и обычным способом, на бумаге. А особо отличившимся в дискуссии за этот урок поставить положительную оценку, чтобы поддержать их активность и заинтересованность.

Подведём итоги. Для организации дискуссии с применением манипулятора и MIMIO следует определить круг задач (лучше всего для этого подходят конструктивно-исследовательские задачи), решить, какими могут быть подсказки (возможно, заготовив заранее серию шаблонов с подсказками). Помимо типологии задач и подсказок, полезно определить «типологию аудитории». Такая дискуссия особенно эффективна, если несколько учеников готовы взять на себя инициативу в процессе обсуждения.

Иванов Сергей Георгиевич,
кандидат педагогических наук,
научный сотрудник лаборатории
продуктивного обучения ИСМО РАО.