Люблинская Ирина Ефимовна,
Рыжик Валерий Идельевич

ОТ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРА К КОМПЬЮТЕРНОМУ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ

Размышления об обучении доказательству в технологическую эру

ВВЕДЕНИЕ

Принципы и стандарты для школьной математики [3], поддерживают единый подход к математическому образованию, включающий различные группы тематически связанных между собой элементов. Особое место в стандартах NCTM отведено группе, связанной с рассуждением и доказательством, что подчеркивает ее роль в курсе математики.

Рассуждение и доказательство – это не те виды деятельности, для которых отводится специальное время или специальные темы в курсе математики. Они должны быть естественным элементом при обсуждении в классе любой темы. В продуктивной с точки зрения математики среде ожидается, что учащиеся объяснят и проверят свои выводы [3].

Тем не менее, в большинстве американских школ, если где-либо учащиеся сталкиваются с математическими доказательствами, то только в курсе геометрии.

Цель данной статьи – показать, как может быть использована новая программа символьной геометрии, *Geometry Expressions* (http://saltire.com/), в геометрических задачах на доказательство. Предлагаются два различных подхода при использовании программы для доказательств. Первый подход – «Доказательство, использующее компьютер» – применяется, когда программа помогает сформулировать утверждение и спланировать его доказательство. Второй подход – «Компьютерное доказательство» – состоит в том, что утверждение общего характера подтверждается самой программой, благодаря тому, что программа работает также с объектами общего вида.

Оба этих подхода будут далее проиллюстрированы довольно простыми примерами. Первый пример, касающийся площадей трапеции и треугольника, типичен для первого подхода. Второй пример касается преобразований графика функции и типичен для второго подхода. Другие примеры использования программы *Geometry Expressions* в задачах разного уровня сложности курса математики для старших классов имеются в [2].

Прежде чем рассматривать эти примеры, обсудим некоторые важные идеи, касающиеся логического мышления и обобщения, и как это связано с использованием упомянутой выше программы.

О ЛОГИЧЕСКОМ МЫШЛЕНИИ

Одно и важнейших свойств математического образования состоит в развитии у учащихся логического мышления. Сам процесс доказательства позволяет учащемуся продемонстрировать свою способность мыслить логически. Именно в процессе доказательства учащемуся требуется оправдывать каждый шаг своих рассуждений.

Доказательства в школьном курсе математики рассматриваются в основном в курсе геометрии. В старших классах американской школы в курсе алгебры и начал анализа почти нет доказательств. Поскольку геометрия занимает только небольшую часть курса, понятно, почему развитие логического мышления и умения рассуждать становится проблематичным.

В настоящей статье особое внимание уделяется естественной связи между логическим мышлением и способностью к обобщению. Учащиеся должны уметь либо отвергнуть либо изменить рассматриваемую гипотезу. Приводя контрпример, нужно логически корректно сформулировать отрицание, а для этого полностью понять логическую структуру утверждения.

Обобщение – это процесс перехода от частного утверждения к общему, в результате чего первое становится частным случаем второго. Обобщение в математике и в обучении математике является важным этапом при выдвижении гипотез. Прежде чем доказывать что-либо, учащеся должны четко сформулировать доказываемое утверждение. Формулировка гипотезы есть результат различных мыслительных процессов, в том числе и обобщения.

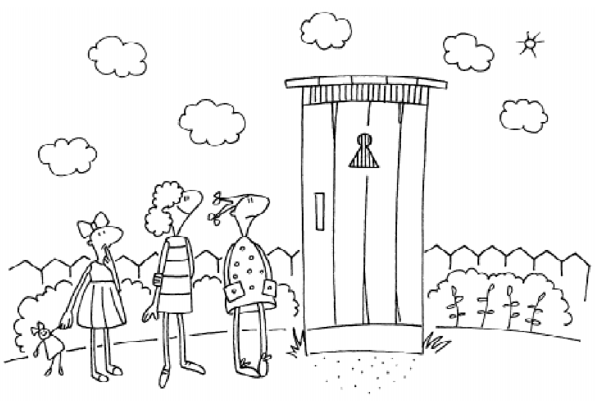
Типичные примеры обобщения можно найти в программе по математике для старших классов Российских школ [6]:

- Метод математической индукции как метод обобщения результатов, полученных для некоторых чисел, на все множество натуральных чисел.
- Доказательство свойств действий с вещественными числами, основанное на свойствах действий с рациональными числами.
- Понятие комплексного числа – обобщение понятия вещественного числа.
- Переход от двумерных векторов к трехмерным – обобщение понятия размерности.
- Переход от числовой переменной к символьной.

Очень часто общее утверждение доказывается точно так же, как и частное. Более того, иногда его доказательство даже проще. Примеры этого хорошо известны. Великая Теорема Ферма и гипотеза Пуанкаре были доказаны после нескольких веков безуспешных попыток только тогда, когда были сформулированы и доказаны более общие утверждения [4, 5].

Формулировка обобщения – нетривиальная задача. Например, формула Эйлера для многогранников [1] была доказана только после того, как было дано точное определение многогранника и указаны ограничения при которых формула верна. Для этого понадобилось несколько веков.

Формулировка корректного общего утверждения, которое может быть доказано, является очень трудной задачей для учащегося. Этот процесс требует не только творческого, но и развитого логического мышления. Программа символьной геометрии *Geometry Expressions* помогает учащимся в формулировании общих утверждений, проверке их справедливости и доказательстве их.



Обобщение — это процесс перехода от частного утверждения к общему...

ВКЛЮЧЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОЦЕСС ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

«Существование, многообразие и мощь технологии приводят к необходимости пересмотра того, что должны изучать учащиеся и каковы наилучшие методы изучения. ...При наличии технологических инструментов учащийся может сосредоточиться на принятии решений, рассуждениях и решении задач» [3].

Использование компьютерных технологий может помочь учащемуся в создании доказательств в курсе математики, включая курсы алгебры и начала анализа. Далее демонстрируется применение программы *Geometry Expressions*. Эта программа – первая из нового класса программ для геометрических задач: интерактивная программа символьной геометрии. Она имеет два принципиальных отличия от имеющихся программ динамической геометрии:

1) она в большей степени основана на генерации алгебраических выражений, чем на геометрических построениях;

2) она скорее символьная, чем численная.

Geometry Expressions может, в отличие от других интерактивных геометрических систем, автоматически генерировать алгебраические выражения, связанные с геометрическими фигурами. В *Geometry Expressions* встроена простая алгебраическая система. Обобщение и упрощение выражений и простые алгебраические преобразования производятся в самой программе

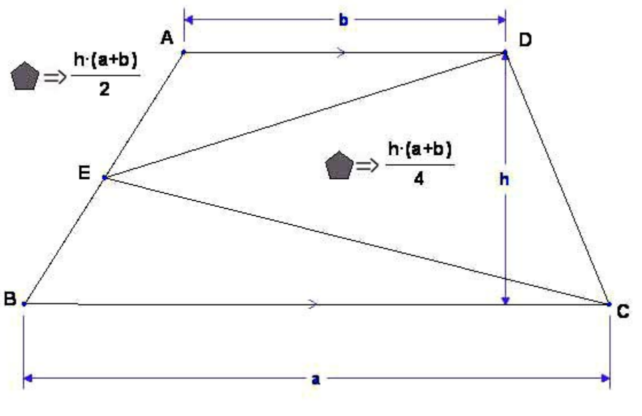
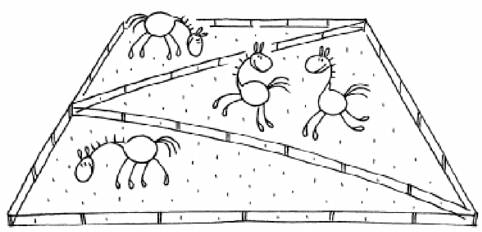


Рис. 1. Задача с трапецией – формулировка гипотезы



Чему равно отношение площадей треугольника и трапеции?

Geometry Expressions.

Рассмотрим два различных подхода к использованию *Geometry Expressions* в доказательствах.

I. Доказательство, использующее компьютер

Здесь мы покажем, как *Geometry Expressions* может помочь учащемуся сформулировать гипотезу и спланировать доказательство в следующей задаче: в трапецию с основаниями a и b и высотой h вписан треугольник, у которого одна сторона совпадает с боковой стороной трапеции, а вершина совпадает с серединой другой боковой стороны. Чему равно отношение площадей треугольника и трапеции?

Учащийся строит произвольную трапецию $ABCD$ и обозначает основания и высоту через a, b и h соответственно. Согласно условию задачи, он строит треугольник и измеряет площади трапеции и треугольника. Программа создает символьние выражения для этих площадей (рис. 1).

Сравнение этих выражений немедленно приводит к гипотезе, что площадь треугольника равна половине площади трапеции:

$$A_{CDE}=\frac{h(a+b)}{4}=\frac{1}{2}\frac{h(a+b)}{2}=\frac{1}{2}A_{ABCD}.$$

Далее программа может помочь проделать несколько шагов, которые в совокупности образуют доказательство. Очевидно,

$$A_{CDE}=A_{ABCD}-(A_{ADE}+A_{BCE}).$$

Чтобы обосновать выражение для площади треугольника CDE, учащийся может запросить выражения для площадей ADE и BCE и найти суммы этих площадей (рис. 2).

Основываясь на выражениях, созданных программой, учащийся находит:

$$A_{CDE} = \frac{h(a+b)}{2} - \frac{h(a+b)}{4} = \frac{h(a+b)}{4}.$$

Следующий шаг в доказательстве состоит в обосновании выражений для площадей треугольников ADE и BCE: $\frac{bh}{4}$ и $\frac{ah}{4}$ соответственно. Для их обоснования учащийся может использовать формулы для площади треугольника. Основания равны b и a соответственно, так что требуется найти только высоту. Учащийся может запросить расстояние от точки E до основания каждого из треугольников и программа дает выражение $\frac{h}{2}$ (рис. 3).

Для обоснования этого выражения нужно лишь вспомнить, что E – это середина стороны AB, что и завершает доказательство.

Проследим ход всей работы. Задача дана учащемуся в общих терминах. Учащийся строит чертеж с символьными параметрами, в данном случае основаниями a и b и высотой h. Затем он измеряет интересующие его величины и получает для них символьные выражения. Результаты, полученные программой, помогают учащемуся сформулировать подлежащую доказательству гипотезу. Внимание учащегося обращено на другие объекты чертежа (треугольники ADE и BCE), помогающие спланировать доказательство гипотезы. И, наконец, чтобы завершить доказательство, учащийся должен обосновать формулы, полученные программой.

II. Компьютерное доказательство

В преподавании математики в старших классах имеет смысл начинать доказательство общего рассуждения с конкретного примера, так как он может быть легко смоделирован и затем обобщен. Конкретные условия также облегчают учащемуся понимание задачи. Программа *Geometry Expressions* помогает перейти от частных условий к общему случаю, например от задачи с числовыми значениями параметров к задаче с символьными параметрами.

Именно так мы будем действовать в нашем втором примере. Некоторое свойство функции будет сначала рассматриваться для конкретной функции $y = x^2$. Это свойство будет затем обобщено на произвольную

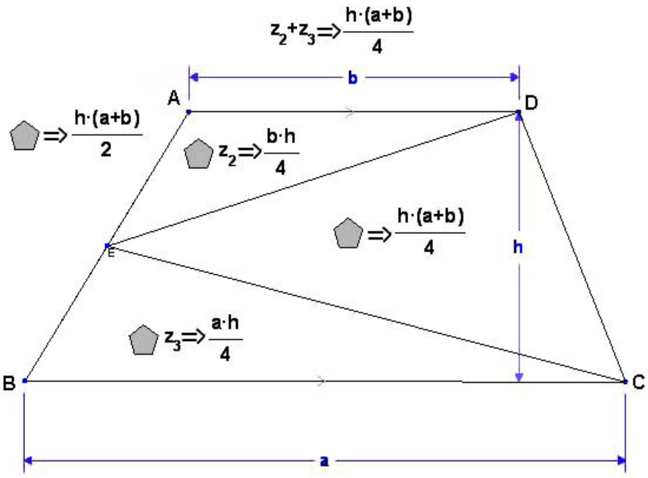


Рис. 2. Путь к доказательству – отыскание соотношений между площадями

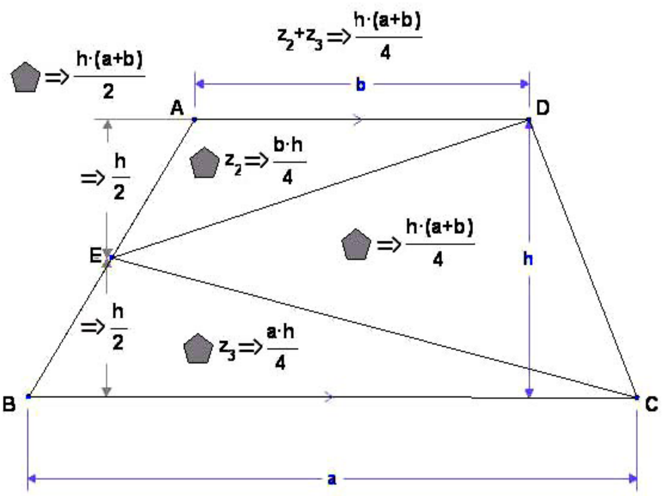


Рис. 3. Последний шаг в доказательстве – определение площадей *ADE* и *BCE*

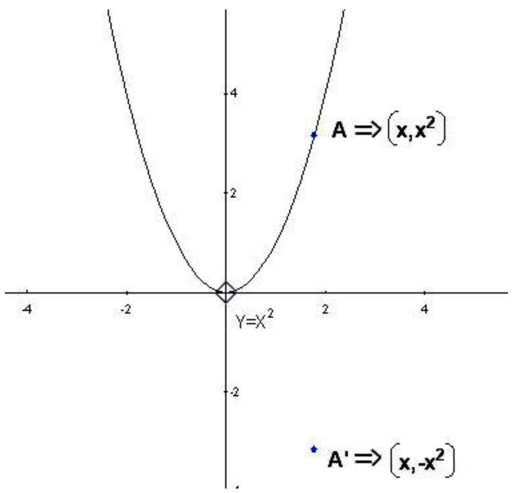


Рис. 4. Отражение точки относительно оси x

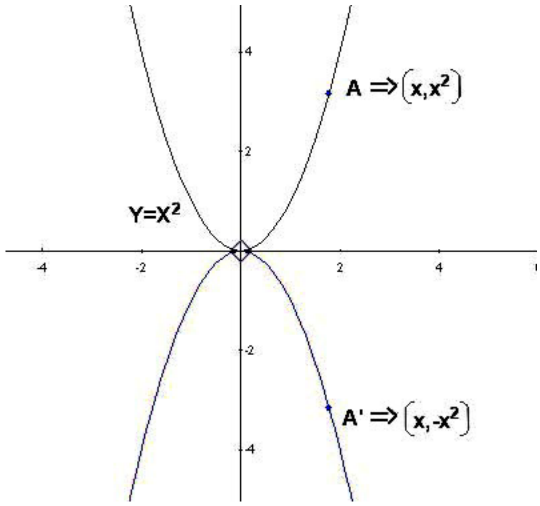


Рис. 5. Множество точек A'

функцию $y = f(x)$, причем для простоты единственное ограничение на $f(x)$ – это непрерывность. Это обобщение естественно, корректно и несложно для учащегося.

Рассмотрим пример: доказать, что при симметрии относительно оси x график функции $y = f(x)$ преобразуется в график функции $y = -f(x)$. Далее описываются шаги «компьютерного доказательства» с помощью программы *Geometry Expressions*.

Учащийся вводит функцию $y = x^2$ и отмечает точку A на графике функции. Программа определяет координаты A в виде (x, x^2). Учащийся затем отражает точку относительно оси x и измеряет координаты точки A': $(x, -x^2)$ (рис. 4).

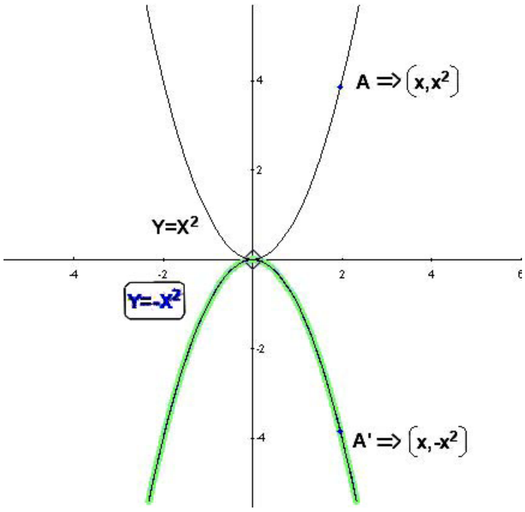


Рис. 6. График функции $y = -x^2$ совпадает с множеством точек A'

Так как точка A произвольная, то это может считаться доказательством того, что все точки A' принадлежат графику функции $y = -x^2$. Однако, по нашему мнению, доказательство в курсе школьной математики содержит еще и «человеческий фактор» – это метод убеждения. Для математика тот факт, что точка (x, x^2) переходит при отражении относительно оси x в точку $(x, -x^2)$, является достаточным аргументом для доказательства того, что графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ симметричны относительно оси x. Но для школьника рассмотрение одной точки на кривой может быть недостаточным. На этом шаге школьник может попросить программу построить множество всех точек A', получающихся при движении A по графику $y = x^2$ (рис. 5) и затем график функции $y = -x^2$.

Если график $y = -x^2$ полностью совпадет с построенным множеством, свойство будет считаться доказанным (рис. 6).

Очевидность усиливается благодаря возможности перемещать точку A вдоль графика $y = x^2$ и наблюдать движение точки A' вдоль графика $y = -x^2$.

Теперь школьник сможет обобщить это свойство данной функции и выдвинуть гипотезу, что график функции $y = f(x)$ преобразуется в график функции $y = -f(x)$ при отражении относительно оси x. Для доказательства этого утверждения школьник может ввести $f(x)$ вместо x^2 и $-f(x)$ вместо $-x^2$ и увидеть результат замены на экране компьютера (рис. 7).

Geometry Expressions построит произвольную функцию. Координаты точки A и отраженной точки A′ будут иметь вид $(x, f(x))$ и $(x, -f(x))$ соответственно. График функции $y = -f(x)$ в точности совпадает с множеством точек A', что и доказывает свойство симметрии для произвольной функции $y = f(x)$.

ЕЩЕ О КОМПЬЮТЕРНОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ

В какой степени полученный выше результат может рассматриваться как доказательство? Здесь мы сталкиваемся со старым вопросом: можно ли использовать компьютерные доказательства в школьной математике и, если да, то в каких случаях и какими они должны быть?

Авторам хотелось бы дать положительный ответ на этот вопрос, сопроводив его следующим рассуждением. В конкретной педагогической ситуации (решение конкретной задачи с использованием конкретной программы) результат, полученный на компьютере, может считаться доказательством.

Поясним эту точку зрения. Доказательство или обоснование в математике – это процесс, мыслительная процедура. В этом процессе не участвуют ссылки ни на авторитет ни на мнение большинства. Если учащийся видит только конечный результат – из справочника, из учебника или компьютерной программы – тогда он не получает доказательства. При использовании программы *Geometry Expressions* утверждение считается доказанным, если:

– результат сначала получен в частном случае;

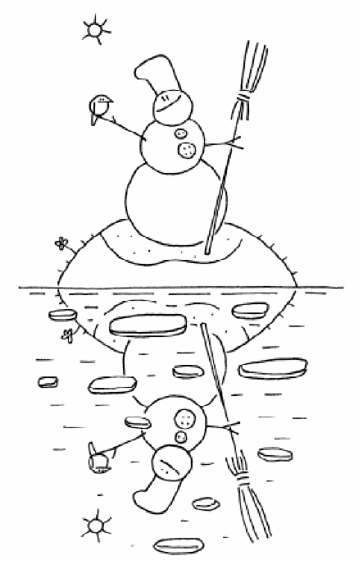
– обобщение сформулировано на основе этого результата;

– последовательность шагов в доказательстве обобщенного утверждения такая же, что и в доказательстве частного случая;

– ситуация, смоделированная в программе, адекватно отражает условия, которые содержатся в обобщенном утверждении;

– использование программы позволяет учащемуся проверить полученный результат в бесконечном числе случаев.

В предыдущем примере с симметрией функции результат был сначала получен для частного случая функции $y = x^2$ и затем было получено обобщение для произволь-



...при симметрии относительно оси x график функции $y = f(x)$ преобразуется в график функции $y = -f(x)$.

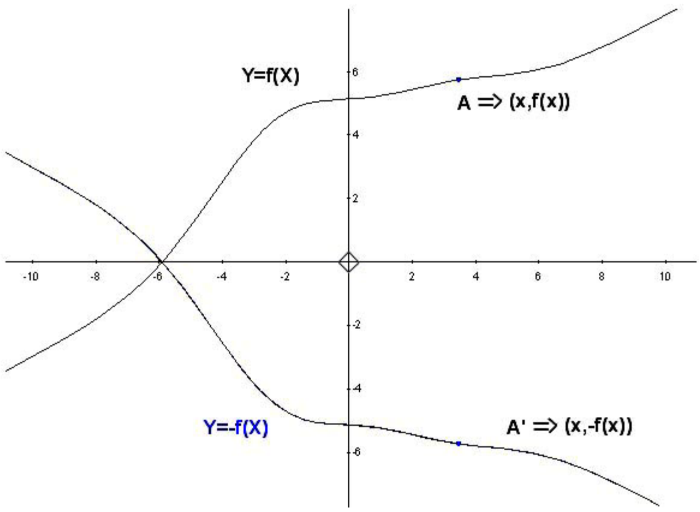


Рис. 7. Доказательство свойства симметрии для $y = f(x)$

ной функции $y = f(x)$. При этом последовательность таких шагов, как выбор точки на графике функции, измерение ее координат, симметрия относительно оси x, построение множества точек образа, затем графика функции $y = -f(x)$ и его сравнение с этим множеством, была в точности такой же, что и для функции $y = x^2$. Построение графика произвольной функции полностью соответствует условиям обобщения. Бесконечное число вариантов реализуется двумя способами. Прежде всего, число точек $(x, f(x))$ бесконечно. Во-вторых, график, генерируемый программой, не связан с какой-то определенной функцией и при каждом новом запросе генерируется заново.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С быстрым развитием компьютерных технологий их влияние на преподавание математики в старших классах становится все более значительным. Такая программа как *Geometry Expressions* ставит перед математическим педагогическим сообществом новые задачи и вопросы. Один из них – каким должно быть доказательство в школьном курсе математики? В настоящей статье делается попытка предложить один из возможных ответов на поставленный вопрос. Мы надеемся на продолжение разговора с теми, кто, как авторы этой статьи, стремятся по-новому осмыслить процесс преподавания математики в нашу технологическую эру.

Литература

1. *Cromwell P.* (1997). Polyhedra. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

2. *Lyublinskaya, I., & Ryzhik, V.* (2008). Using symbolic geometry to teach secondary school mathematics: Geometry Expressions activities for algebra 2 and precalculus. Beaverton, OR: Saltire Software.

3. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author

4. NOVA On-Line. (2008) The Proof. Solving Fermat: Andrew Wiles. Retrieved March 31, 2008 // http://www.pbs.org/wgbh/nova/proof/wiles.html

5. Weisstein, Eric W. (2003) The Poincare Conjecture proved – this time for real. Retrieved March 15, 2008 // http://mathworld.wolfram.com/news/2003-04-15/poincare/

6. Стандарт основного общего образования по математике (2004, June 14). Вестник Образования России. Retrieved July 20, 2008 // http://www.mathvaz.ru/nd.html

Люблинская Ирина Ефимовна.
College of Staten Island/City University of New York, Staten Island, New York, USA,

Рыжик Валерий Идельевич,
кандидат педагогических наук, заслуженный учитель РФ, учитель Санкт-Петербургского лицея «Физико- техническая школа».

Перевод с англ. М.Э. Юдовина.