Дубровский Владимир Натанович,
Поздняков Сергей Николаевич

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ШКОЛЕ. ЗАНЯТИЕ 6. СТЕРЕОМЕТРИЯ В ДВУМЕРНЫХ СРЕДАХ

Стереометрия представляется одной из тех областей математики, в изучении которых использование компьютера наиболее естественно и эффективно. Имеется ряд программ, несущих в себе те или иные черты интерактивных геометрических сред, которые предназначены специально для создания стереометрических моделей в учебных целях. Безусловным лидером среди них является недавно вышедшая Cabri 3D, серию статей о которой написал в журнале «Компьютеные инструменты в образовании» Хайнц Шуман [1–6]. Среди отечественных можно отметить «Стереометрию» фирмы КУДИЦ. Однако она уже давно не обновлялась и сложна в использовании. Сложность – основной и в принципе трудно преодолимый недостаток специализированных стереометрических программ, препятствующий их использованию в школе. И едва ли тот положительный эффект, который, возможно, принесет в изучение школьной стереометрии использование таких программ, окупит время и усилия, необходимые для их освоения, даже если говорить о *C*abri 3D, разработчики которой сумели существенно упростить интерфейс.

С другой стороны, стереометрические тела, как мы их видим на экране, суть проекции реальных тел на плоскость. Правила построения проекций известны и в каком-то объеме изучаются в школьном курсе. Таким образом, появляется возможность моделировать не сами тела, а их проекции и динамику их изменения. При этом пользователь не сможет отличить «настоящей трёхмерной» модели тела от модели его проекции. Более того, само построение механизма динамического изменения изображения тела является поучительным и интересным заданием проектного типа, развивающим пространственное воображение и актуализирующим целый ряд понятий, фактов и навыков.

Впервые возможность моделирования стереометрии средствами планиметрии была представлена в журнале «Компьютерные инструменты в образовании» № 6, 2003 г. одним из авторов этой статьи (*В.Н. Дубровский.* Стереометрия с компьютером).

В ходе этого занятия мы рассмотрим процесс конструирования модели куба, которую можно впоследствии многократно использовать для создания моделей других тел и множества разнообразных заданий. Параллельно с этим мы познакомимся с тем, как создавать собственные инструменты, которые помогут упростить сложные построения и не дублировать многократно повторяющиеся действия.

СОЗДАНИЕ ИНСТРУМЕНТА В «ЖИВОЙ МАТЕМАТИКЕ»

Для построения нашей модели нам пригодится простейший инструмент для (ортогона-льного) проецирования точки на прямую. Выполним соответствующие построения (рис. 1):

– проведем прямую (по двум точкам *A* и *B*) и возьмем точку *C* вне её;

– через *C* проведём прямую, перпендикулярную *AB*;

– построим точку пересечения двух прямых;

– скроем перпендикулярную прямую (дополнительное построение).

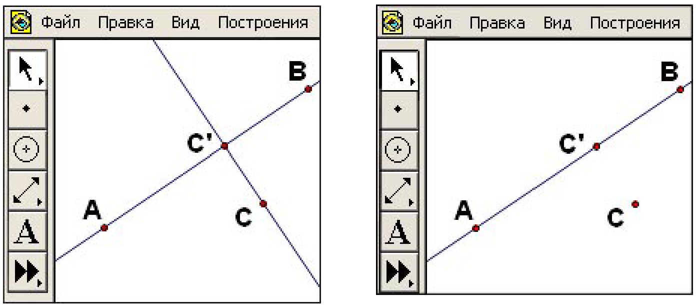


Рис. 1

Чтобы создать задуманный инструмент, выделим его входные аргументы и результат в удобном для дальнейшего применения порядке, например, в таком:

– точки, определяющие прямую (*A* и *B*),

– точку, которую мы проецируем (точку *C*) и, наконец,

– результат построения (точку *C′*).

После этого прижмём кнопку с двумя стрелками внизу инструментальной панели на пару секунд. Выпадает меню **Инструменты пользователя**, в котором нужно выбрать команду **Создать новый инструмент**, открывающую окно с полем для ввода названия инструмента (рис. 2). Запишем в него, например, «Проекция точки на прямую» и нажмём кнопку **Готово**.

В результате название созданного инструмента появляется в меню **Инструменты пользователя**. Инструмент «включается» после того, как он будет выбран в этом меню (рис. 3 *а*). Только что созданный или использованный инструмент можно включить и простым нажатием на кнопку с двумя стрелками. Для «выключения» запущенного инструмента можно нажать любую другую кнопку вертикальной панели, например, **Указатель** («стрелочку»).

Теперь, чтобы спроецировать точку *C* на какую-либо другую прямую *EF* при условии, что наш инструмент включен, нужно по очереди щелкнуть мышкой на точках, определяющих прямую (*E*, *F*) и точке, которую мы проецируем (*C*). В результате на прямой *EF* появится проекция *C* (точка *G*) (рис. 3 *б*). Порядок, в котором выбираются точки, важен: если, например, выбрать сначала *F*, а потом *C* и *E*, то получится проекция *F* на прямую *CE*.

Обратите внимание, что после завершения построения инструмент остаётся включенным (на конце курсора «висит» точка) и надо либо делать следующее построение, либо его выключить!

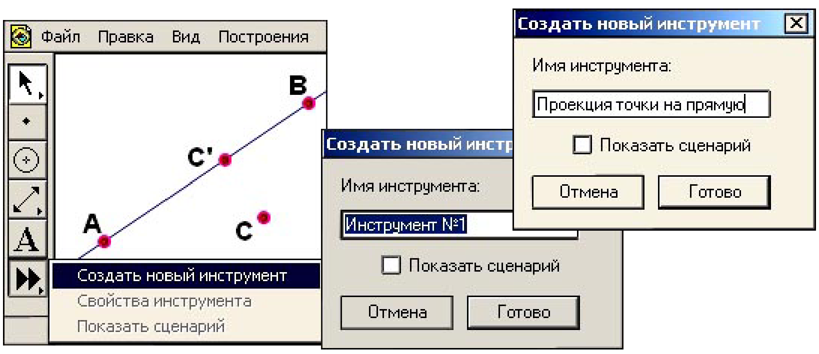


Рис. 2

а) *б)*

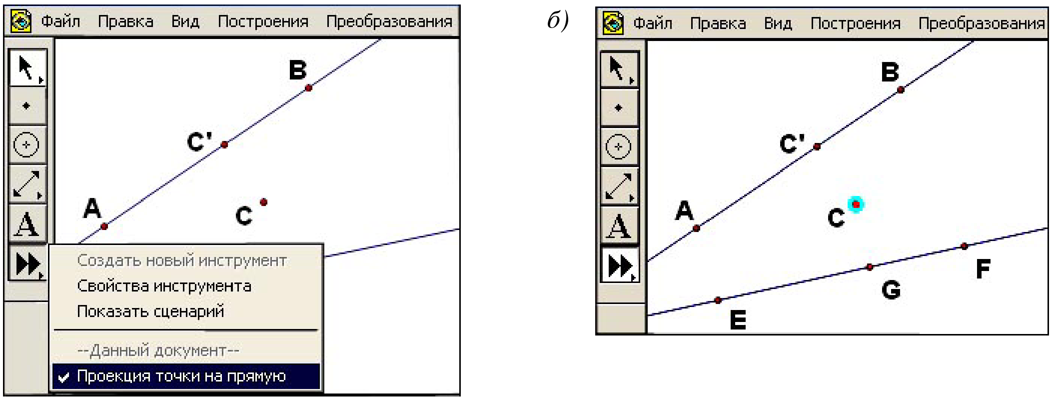


Рис. 3

С помощью созданного инструмента можно не только проецировать уже имеющиеся на чертеже точки, но и сразу строить точку и проецировать ее. Для этого достаточно щелкнуть на свободном месте (рис. 4 *а*, построенная проекция *H*). Если щёлкнуть в разных местах три раза, то появится конструкция из 4 точек, где четвёртая точка есть проекция третьей точки на прямую, определяемую первыми двумя точками (рис. 4 *б*).

Отметим, наконец, что вместо пары точек, задающей прямую, в качестве «входных данных» нашего инструмента можно было взять саму прямую (и, конечно, проецируемую на нее точку).

ЭЛЛИПС КАК ПРОЕКЦИЯ ОКРУЖНОСТИ

Трехмерные модели, создаваемые с помощью специализированных 3D программ допускают свободное вращение вокруг любой оси: для этого обычно нужно как бы «зацепить» и «подтолкнуть» фигуру мышью. Однако в процессе изучения стереометрии такая свобода не очень нужна – чтобы получить полное представление о пространственной конфигурации, достаточно иметь возможность взглянуть на нее из любой точки, а для этого хватает поворотов и около двух осей. В моделях, которые мы будем строить, одна из этих осей – фиксированная горизонтальная прямая, параллельная плоскости экрана, а другая связана с телом и перпендикулярна первой.

Для начала сделаем динамическую модель, позволяющую наблюдать, как меняется проекция на плоскость экрана окружности с горизонтальным диаметром, параллельным этой плоскости, при вращении около этого диаметра. Для удобства будем считать, что первоначально окружность находится в самой плоскости экрана. Проекция диаметра, перпендикулярного оси вращения, при вращении сжимается, причем коэффициент сжатия k равен косинусу угла поворота (или угла наклона), то есть угла между экраном

а) *б)*

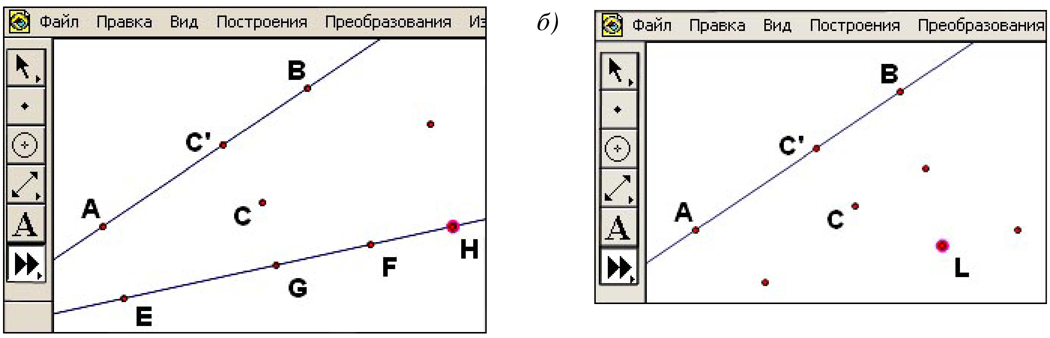


Рис. 4

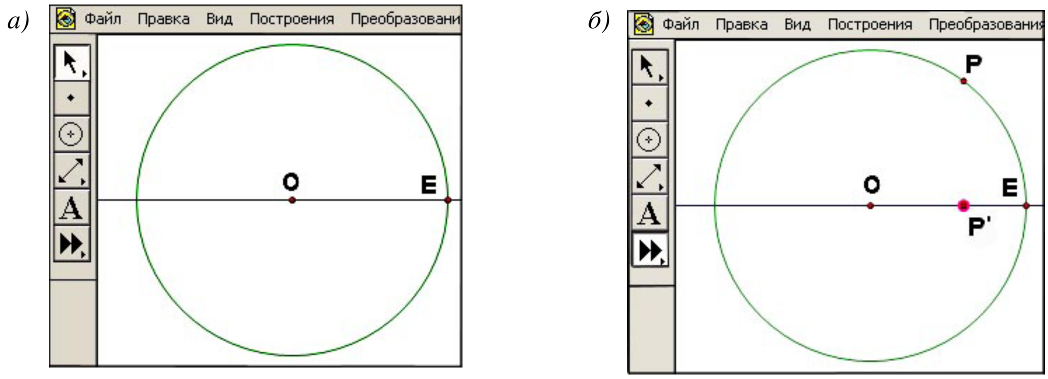


Рис. 5

и плоскостью окружности. В том же отношении будут сжиматься и другие хорды, перпендикулярные диаметру – оси вращения. Поэтому достаточно построить модель окружности, сжимающейся к своему горизонтальному диаметру.

Проведем горизонтальную прямую (точную горизонталь можно получить, если при проведении прямой удерживать нажатой клавишу «Shift»). Построим окружность (рис. 5 *а*) с центром в точке *O* на прямой, проходящую через другую ее точку *E* (можно просто взять точки, задающие прямую). Возьмем на окружности произвольную точку *P* и спроецируем ее на прямую с помощью нашего инструмента; назовём проекцию *P′* (рис. 5 *б*).

Коэффициентом сжатия мы будем управлять с помощью движка, который научились строить на прошлом занятии; рис. 6 напоминает, как это делалось. Скопируем этот движок в наш чертёж и назовем изменяемый параметр *k*. При этом *k* будет изменяться между 0 и 1, что отвечает углам наклона от 0° до 90°. На первый раз этого достаточно[1].

Итак, применим к точке *P* гомотетию с центром *P′* и коэффициентом *k*.

Для этого выделим коэффициент *k* и в меню **Преобразования** выберем команду **Отметить коэффициент**. При этом выделенный параметр «вспыхнет», подтверждая

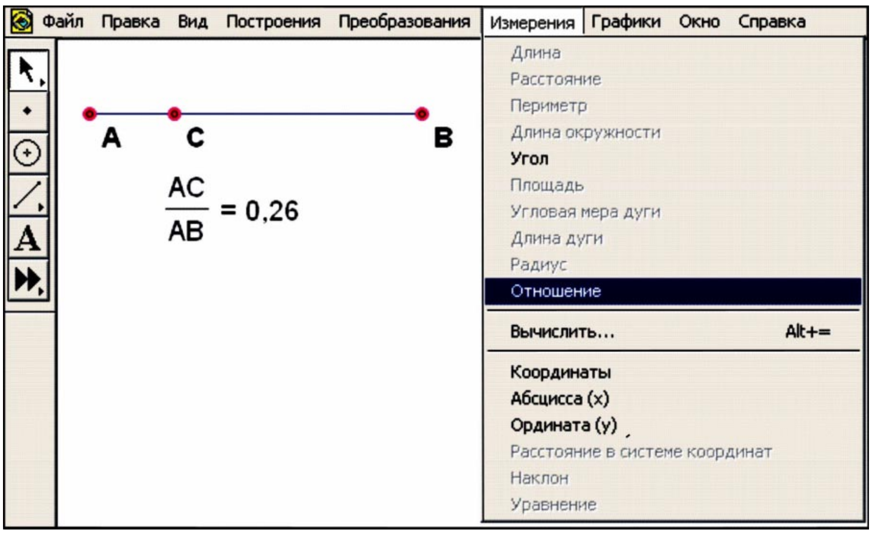


Рис. 6

[1] Чтобы построить более красивую модель – с наклоном от 0° до 180° – нужен был бы коэффициент, пробегающий значения от –1 до 1. В качестве такого коэффициента можно было бы взять величину $k' = 2k - 1$ и использовать ее в дальнейшем вместо *k*.

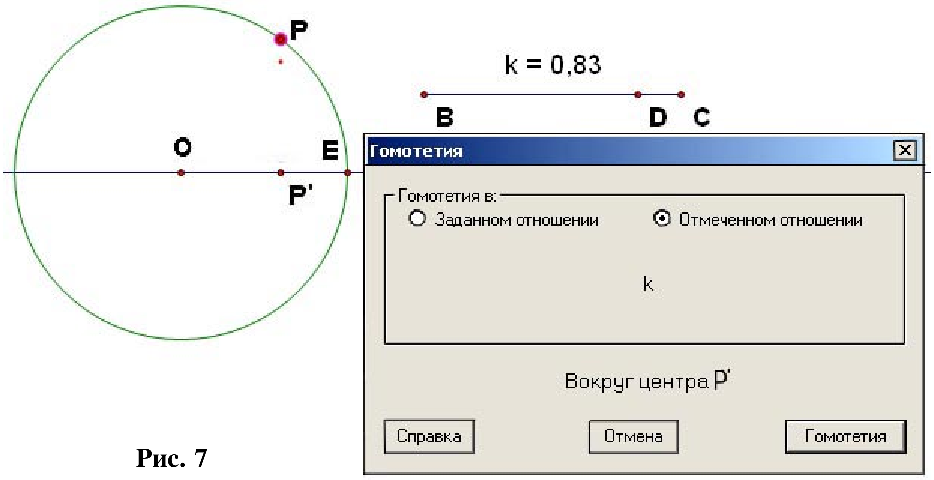


Рис. 7

факт выбора коэффициента гомотетии. После этого выделим точку P' и выберем в том же меню команду **Отметить центр** – в ответ «вспыхнет» центр. (Вместо применения команд, можно дважды щёлкнуть на параметре и на точке.) Теперь выделим точку P окружности и выберем команду **Гомотетия** из меню **Преобразования** (рис. 7).

Полученная в результате гомотетии точка при движении точки P по окружности будет описывать окружность, сжатую к оси OE с коэффициентом k. Чтобы построить ее траекторию, выделим точку P и ее образ при гомотетии и выполним команду **Геометрическое место** из меню **Построения**. Результат показан на рис. 8. Полученная кривая является эллипсом; иногда указанное построение берется непосредственно за определение эллипса.

Перемещая «бегунок» D на движке, мы увидим, как наша окружность «наклоняется» – поворачивается вокруг оси OE на экране, хотя мы и знаем, что это кажущийся эффект, достигаемый сжатием окружности.

Посмотрим теперь, как будет вести себя проекция вписанного в нашу окружность квадрата при наклонах окружности, а также при вращении квадрата вокруг ее центра.

ПРОЕКЦИЯ КВАДРАТА, ВПИСАННОГО В ОКРУЖНОСТЬ

Вернемся к рис. 7 и впишем в нашу окружность квадрат с вершиной в точке P, для чего точку P нужно трижды последовательно повернуть на 90° вокруг центра O окружности.

Напомним, что для этого следует дважды щёлкнуть на точке O (задать центр поворота), затем выделить поворачиваемую точку (P) и выбрать команду **Поворот** меню **Преобразования**. В открывшемся окне устанавливаем угол поворота (в данном случае это не потребуется, так как угол 90° установлен по умолчанию) и подтверждаем команду, нажав кнопку **Повернуть**. Для второго и третьего поворотов достаточно будет только выбрать и подтвердить команду **Поворот**, так как повернутая точка выделяется автоматически (рис. 9).

Теперь применим к полученным четырем вершинам

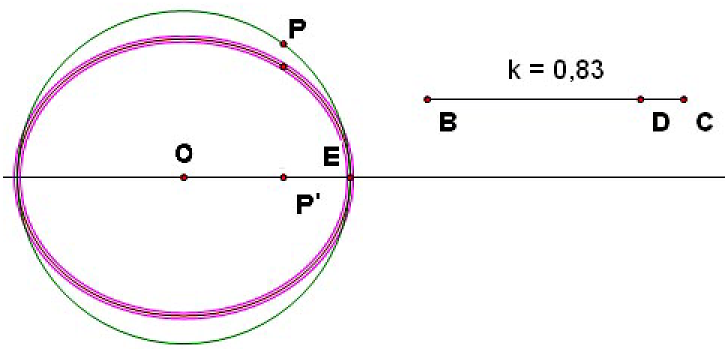


Рис. 8

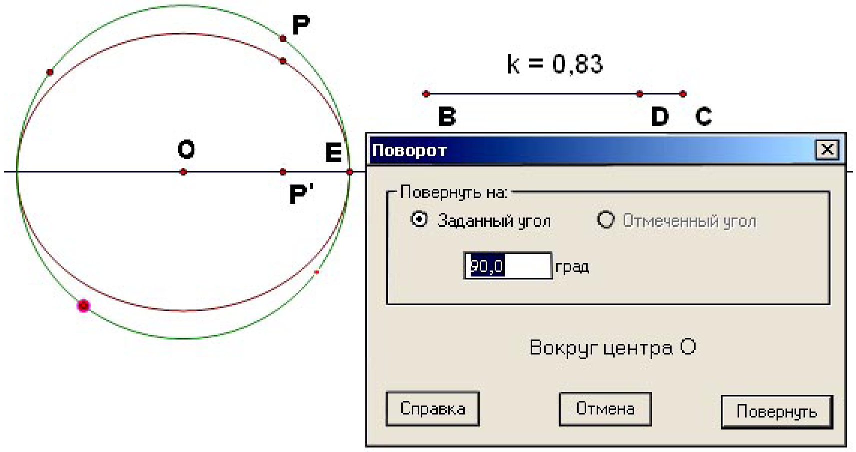


Рис. 9

квадрата операцию сжатия к диаметру с коэффициентом k, повторив действия, описанные выше (для этого тоже можно было бы сделать инструмент, но мы оставим его для упражнений). Полученные точки, как мы уже знаем, лежат на эллипсе (этот факт можно использовать для контроля правильности построений). Соединим их отрезками (рис. 10). Возникает параллелограмм, являющийся параллельной проекцией квадрата, вписанного в нашу окружность, повернутую вокруг горизонтальной оси.

Еще раз прочувствуем эффект трехмерности. Теперь мы можем не только «наклонять» окружность вместе с вписанным в нее квадратом, то есть поворачивать их около горизонтальной оси, но и вращать квадрат вокруг оси, проходящей через его центр O и перпендикулярной его плоскости. Наклон производится перемещением «бегунка» D, вращение – при перемещении точки P по окружности (рис. 11).

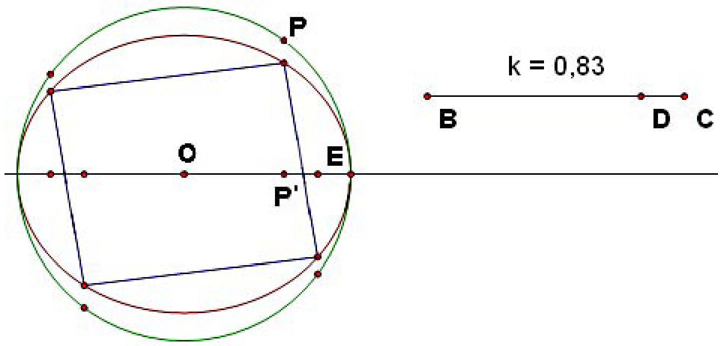


Рис. 10

МОДЕЛЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КУБА

Перейти от квадрата к кубу несложно: примем построенный нами вращающийся квадрат за нижнее основание куба; перенесем его на вектор, перпендикулярный его плоскости и равный по длине его стороне, получим верхнее основание. Поскольку вектор переноса перпендикулярен горизонтальной оси (OE на рис. 11), его проекция также будет перпендикулярна OE. Нужно только определить ее длину. Для этого посмотрим на нашу конструкцию «сбоку» (рис. 12). Плоскость экрана предстанет вертикальной

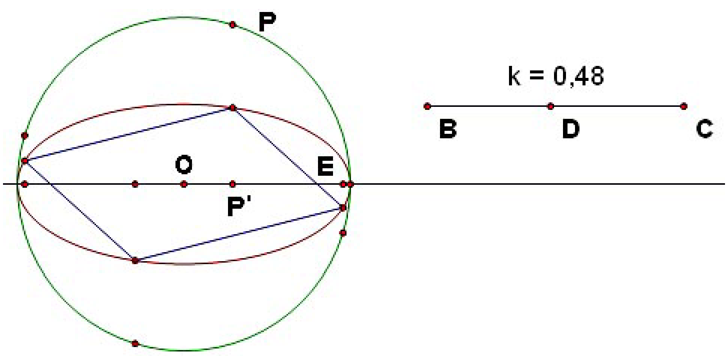


Рис. 11

прямой, окружность, с которой мы начали всё построение, – отрезком длины $2R$, где $R = OE$ – её радиус, а вектор переноса – вектором $\overrightarrow{OQ}$, перпендикулярным этому отрезку, длина a которого равна ребру куба, то есть стороне вписанного в окружность квадрата: $a = R\sqrt{2}$. Если плоскость окружности наклонена под углом α к экрану, то cos α = k, а проекция отрезка OQ на экран – это отрезок OQ', длина которого равна a sin α = am, где $m = \sqrt{1-k^2}$.

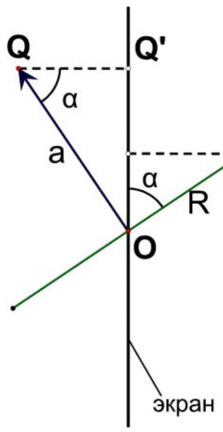


Рис. 12

Остаётся перенести эти вычисления на нашу модель.

Построим в нашей исходной окружности вертикальный радиус OF (рис. 13). На его продолжении отложим отрезок OQ_0 = = EF = $R\sqrt{2}$, равный ребру нашего куба (стороне вписанного в окружность квадрата). Вычислим встроенным калькулятором, который вызывается командой **Вычислить** меню **Измерения** величину $m = \sqrt{1-k^2}$. Применим к точке Q_0 гомотетию с коэффициентом m и центром O – получим точку Q'. Тогда вектор $\overrightarrow{OQ'}$ – это проекция вектора переноса на плоскость экрана, то есть именно на этот вектор нужно перенести наш квадрат, чтобы получить параллельную ему грань куба.

Выполнив этот перенос и соединив вершины исходного квадрата с их образами, мы, наконец, получим наш куб. Остается спрятать все дополнительные построения, оставив только движок для изменения k, управляющий наклоном, и исходную точку P окружности для поворота около оси, перпендикулярной основанию куба (рис. 14).

ДРУГИЕ МОДЕЛИ

Иоганн Кеплер считал куб «отцом» всех остальных правильных тел. А из нашей модели куба легко получить вращающиеся модели всех многогранников, рассматриваемых в школьной стереометрии. Перед построением каждой новой модели стоит сохранить модель куба под новым именем, чтобы модифицировать копию, оставив «исходник» в неприкосновенности.

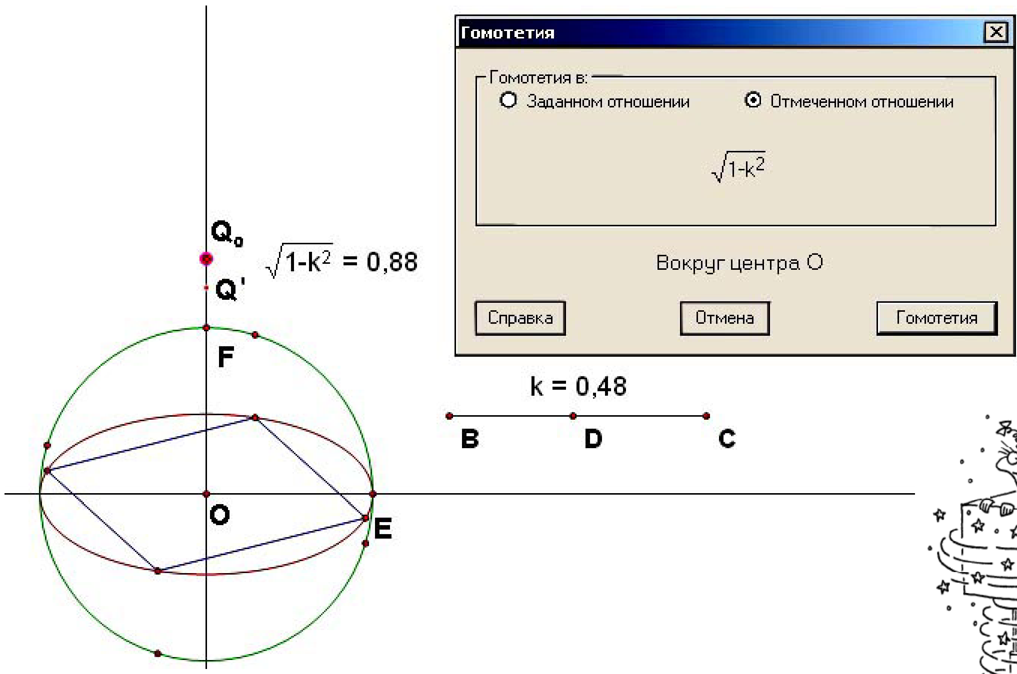


Рис. 13

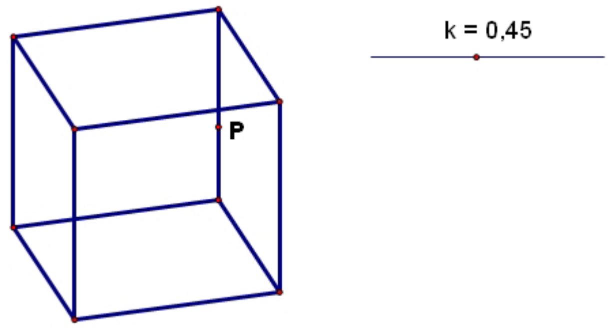


Рис. 14

Например, модель правильной четырёхугольной призмы (рис. 15 *а*) получается сдвигом (параллельным переносом) верхнего основания куба вдоль вертикального ребра. Величину переноса, то есть фактически высоту призмы, можно регулировать, взяв в качестве вершины сдвинутого основания произвольную точку *H* на прямой, содержащей это ребро.

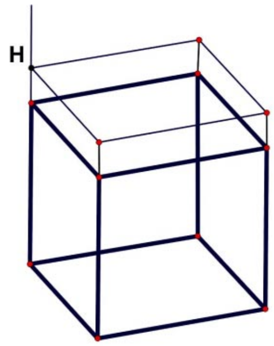
Далее, если построить центр верхнего основания призмы и соединить его с вершинами нижнего основания, скрыв ненужные ребра и вершины призмы, получим модель правильной четырёхугольной пирамиды (рис 15 *б*).

Модель (произвольной) треугольной пирамиды можно построить так: возьмем три ее вершины (*A*, *B*, *C*) на сторонах основания построенной ранее четырёхугольной призмы, а четвертую вершину *D* – на прямой, параллельной одной из сторон верхнего основания и проходящей через точку *E* на прямой, содержащей другую его сторону (рис. 16). При таком построении все вершины тетраэдра привязаны к призме и весь тетраэдр в целом будет вращаться вместе с ней. Форму тетраэдра можно менять, перемещая его вершины, а также точки *H* и *E*; при этом точку *D* можно поместить в любое место на плоскости верхнего основания призмы. При соответствующем подборе вершин получим модель правильной треугольной пирамиды (в частности, треугольник *ABC* должен изображать правильный треугольник, вписанный в квадрат). Аналогично моделируются любые *n*-угольные пирамиды, а также призмы. Отметим, что к программе «Живая математика» обычно прилагается коллекция таких моделей-шаблонов, а также набор стандартных инструментов для самостоятельного создания моделей: движки, отметки равных отрезков и углов и пр.

Если при модификации модели или создании на ее основе заданий требуется изменить ее размер, то это легко сделать с помощью соответствующего варианта инструмента **Указатель** («стрелка»). Если удерживать наментов: вся конструкция растянется относительно некоторой точки (эту точку можно указать заранее, дважды щелкнув на ней).

На основе модели куба строятся и модели всех правильных многогранников. Совсем легко получить правильный тетраэдр (достаточно провести из вершины куба три диагонали граней и попарно соединить их концы) и правильный октаэдр (соедините центры каждой пары смежных граней куба). Сложнее построить икосаэдр; отошлем читателя к модели, созданной одним из авто-

а)



б)

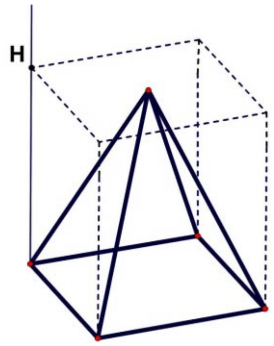


Рис. 15

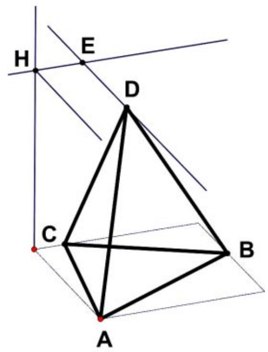


Рис. 16

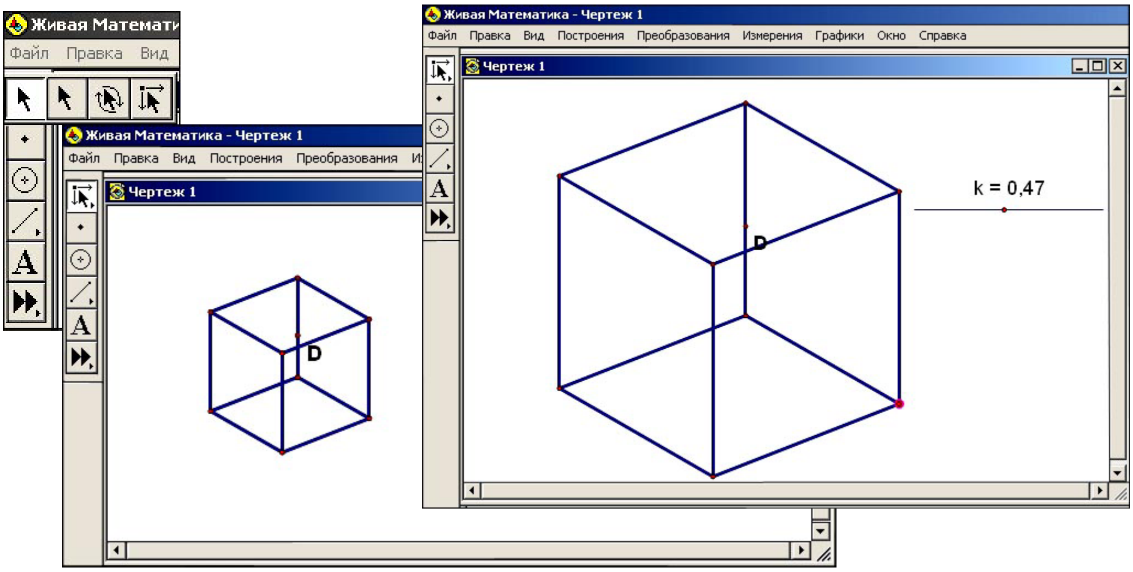


Рис. 17

ров, которую можно загрузить с сайта программы *The Geometer's Sketchpad*; в ней это построение описано по шагам (см. *http://www.dynamicgeometry.com/documents/advancedSketchGallery/Icosahedron.gsp*). Наконец, додекаэдр можно построить, попарно соединив центры смежных граней икосаэдра.

КАК ИСПОЛЬЗОВАТЬ МОДЕЛИ

Процесс построения моделей весьма поучителен сам по себе. Но в начале изучения стереометрии вам понадобятся не эти, относительно сложные задания, а более простые, в которых требуется выполнить

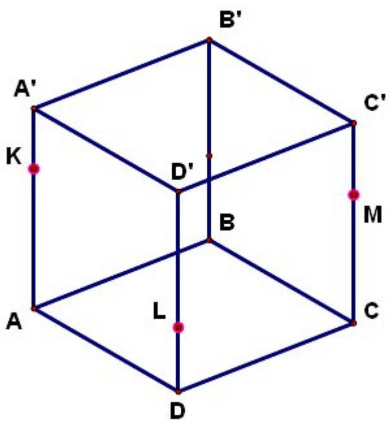


Рис. 18

то или иное построение на готовой модели. Наиболее распространенным видом таких заданий являются задания на *построение сечений.*

Превратить модель многогранника, например, нашу модель куба, в задание на построение сечения совсем легко – нужно просто поместить на модели элементы, определяющие секущую плоскость. Чаще всего это три точки, через которые она должна проходить; вместо одной или двух из этих точек, можно задать прямые, которым плоскость должна быть параллельна. Важно, чтобы эти элементы были «привязаны» к модели и вращались вместе с ней, для чего точки нужно брать на ребрах многогранника (или на прямых, содержащих ребра). Чтобы взять точку внутри грани, нужно соединить отрезком две точки на ее сторонах и взять точку на этом отрезке (ср. с построением вершины пирамиды в модели на рис. 15 *б*). Модель вместе с данными задания сохраняем под своим именем. Теперь можно предложить это задание ученикам.

Рассмотрим пример. На трех параллельных рёбрах куба даны точки K, L, M. Построить сечение куба, проходящее через эти точки (рис. 18).

Вид сечения зависит от расположения данных точек. В случае, изображенном на

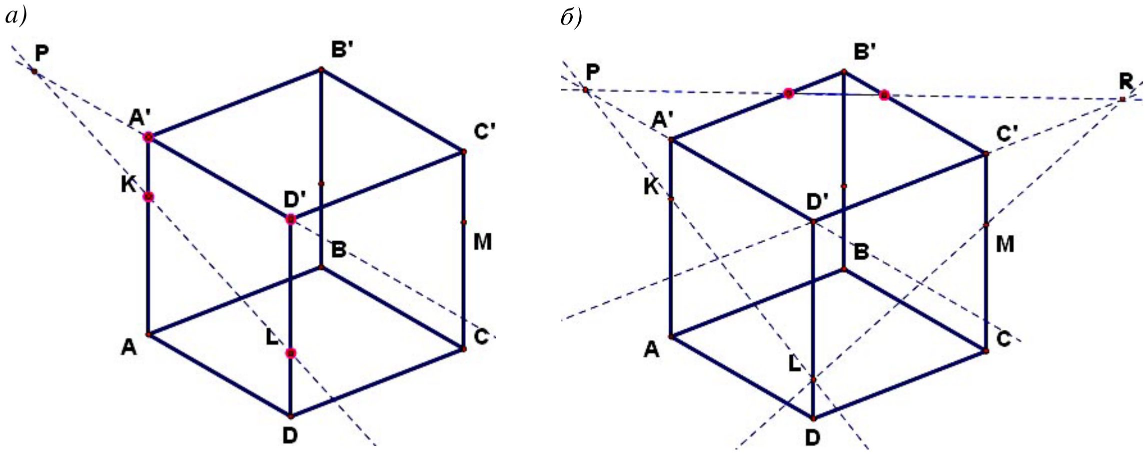


Рис. 19

рисунке, оно будет пятиугольником. Три его вершины – данные точки. Построить остальные можно, например, так: найдём точку пересечения P прямых LK и $D'A'$, пользуясь виртуальной линейкой (рис. 19 *а*). Эта точка лежит в плоскости верхней грани. Аналогично построим точку пересечения R прямых LM и $D'C'$, также лежащую в этой грани, и соединим точки P и R прямой. Точки, в которых она пересекает ребра $A'B'$ и $B'C'$ (рис. 19 *б*) и будут двумя недостающими вершинами.

Окончательный вид сечения показан на рис. 20 *а*. Используя заложенные в модель органы управления, куб по ходу построения можно вращать. Это позволяет лучше представить, что делается, и избежать такой, например, типичной ошибки, как взятие точки пересечения скрещивающихся прямых. Вращение можно использовать и для проверки правильности построения. Если построение верное, то при вращении (рис. 20 *б*) можно всегда найти момент (рис. 20 *в*), когда оно превращается в отрезок. Если такой момент не наступает, нужно искать ошибку. Требование «вырождения сечения» в некотором ракурсе является необходимым, но не достаточным для правильности построения. Нужно еще проверить (изменяя ракурс), что все стороны построенного многоугольника лежат на гранях куба.

Приведенное построение фактически использует только один инструмент – линейку. Если воспользоваться еще и инструментом для проведения параллельных прямых (меню **Построения**), то можно построить сечение иначе: проводим через K и M прямые, параллельные LM и LK соответственно и соединяем точки их пересечения с ребрами $A'B'$ и $B'C'$ (рис. 21).

Существуют общие методы построения сечений, например *метод следов*, но

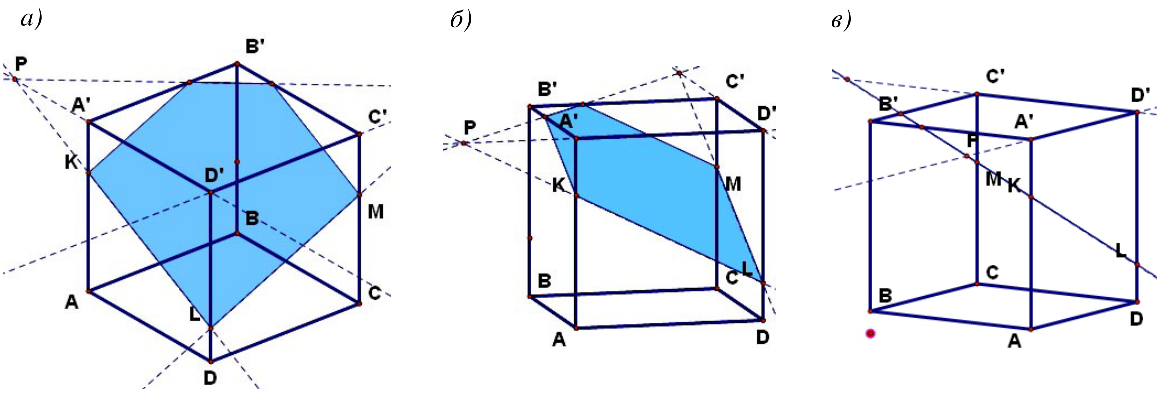


Рис. 20

рассказ о них не входит в задачу данной статьи.

Точки K, L, M в нашей задаче можно зафиксировать на ребрах, но можно сделать их подвижными. Тогда при их перемещении по ребрам сечение будет изменяться, а в некоторых положениях и вовсе исчезает. Например, наше первое построение не работает, если прямая KL параллельна $A'D'$. Будем, не трогая точки K и M, передвигать L к вершине D'. Тогда сторона сечения на верхнем основании будет сжиматься к точке B', в какой-то момент сечение превратится в четырёхугольник $KLMB'$, а далее – в четырёхугольник $KLMN$, где N – точка его пересечения с ребром BB'; на этом интервале оно пропадает, так как точку N мы не строили. При дальнейшем передвижении L сечение снова станет пятиугольником, но оно будет пересекать уже не верхнее, а нижнее основание куба. Если построить его в указанных случаях, то получим красивую картину плавного изменения формы сечения: при переходе к новому случаю соответствующее ему сечение будет возникать, а остальные пропадают. Таким образом, обычные «бумажные» задания на построение сечений в компьютерной версии приобретают элемент исследования: требуется найти все существенно разные случаи расположения данных точек и построить сечения во всех этих частных случаях. Проверить полноту и правильность решения можно, перемещая точки на динамическом чертеже и изменяя ракурс изображения.

Постановки конструктивных заданий на трехмерных моделях можно разнообразить. Например, можно задать две скрещивающиеся прямые (скажем, диагонали граней куба) и точку и строить прямую, проходящую через данную точку и пересекающую данные прямые. Вместо точки можно задать третью прямую и потребовать, чтобы искомая прямая была ей параллельна. Еще один вид заданий: дана прямая и плоскость (или три задающие её точки); требуется построить их точку пересечения. Эти задания можно начать со случаев, когда плоскость содержит одну из граней куба или другого данного многогранника; этими более простыми заданиями целесообразно заняться до построения сечений как таковых. А вот более сложное задание: даны три попарно скрещивающиеся прямые; требуется построить параллелепипед, три ребра которого лежат на этих прямых. Весьма поучительны и интересны, хотя и довольно сложны задания «метрические», в которых фигурируют углы и расстояния. Укажем только один вид таких заданий: к плоскости, заданной тремя точками (как, например, в рассмотренной нами выше задаче) требуется провести перпендикуляр из данной вершины куба.

Наконец, необходимо упомянуть и о задачах на «метод проекций», то есть тех, которые можно решать с помощью выбора подходящего ракурса изображения. Чтобы не ходить далеко за примером, представим, что в нашей задаче про куб (рис. 18) численно заданы отношения, в которых точки K, L, M делят соответствующие ребра, и нужно найти отношения, в которых плоскость сечения делит ребра $A'B'$ и $B'C'$. По-

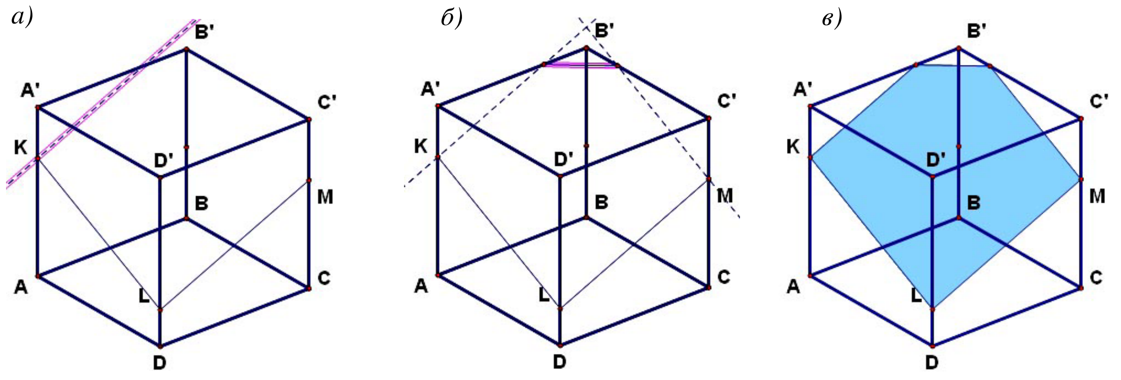


Рис. 21

вернем куб так, чтобы сечение превратилось в отрезок (примерно как на рис. 20 *в*). Тогда задача сведется к планиметрической – надо будет искать отношения, в которых *прямая LMK* делит соответствующие отрезки. Более удобно повернуть куб, используя обе оси вращения, так, чтобы совпали две из трех данных точек, например L и M (рис. 22). На такой проекции задача становится совсем простой. Подробнее о методе проекции см. упомянутую выше статью в журнале «Компьютерные инструменты в образовании» № 6, 2003 г.

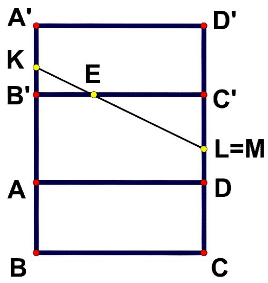


Рис. 22

СОВЕРШЕНСТВУЕМ МОДЕЛЬ КУБА

Для простоты наша модель куба построена так, что горизонтальная ось (ось наклонов) проходит через центр нижнего основания. Это нарушает симметрию. Более красиво выглядят наклоны относительно оси, проходящей через центр куба. Сделать такую ось легко – достаточно просто перенести вращающийся квадрат вверх и вниз на половину построенного нами вектора OQ' (рис. 13). При этом сам квадрат окажется серединным сечением куба, а его образы при переносах – основаниями. В этом случае целесообразно иметь возможность наклонять куб в диапазоне от 0° до 180°, и мы уже объяснили выше, как этого добиться без каких-либо серьезных изменений конструкции. Еще одно улучшение, облегчающее работу с моделью, – отдельный круговой движок для вращения исходного квадрата, а с ним и куба.

Построим точку, перенесём её влево на 1 см (команда **Перенести** в меню **Преобразования**), проведём окружность через вторую точку с центром в первой, возьмем на ней ещё одну точку («бегунок») и проведем радиусы в точки на окружности (рис. 23 *а*). Теперь построим дугу окружности, высекаемую построенным углом. Для этого выделим окружность и концы радиусов в положительном направлении (против часовой стрелки) и выберем команду **Дуга на окружности** в меню **Построения** (рис. 23 *б*). Теперь окружность можно скрыть (рис. 23 *в*). В итоге получился круговой движок, позволяющий управлять угловым параметром.

Если бы мы сделали его до построения нашей модели, то точку P на исходной окружности, управляющую вращением куба (рис. 5 *б*), мы выбрали бы не произвольно, а как результат поворота правого конца E горизонтального диаметра вокруг центра O окружности на угол, определяемый движком. В этом случае перемещение точки-бегунка приводило бы куб во вращение. Од-

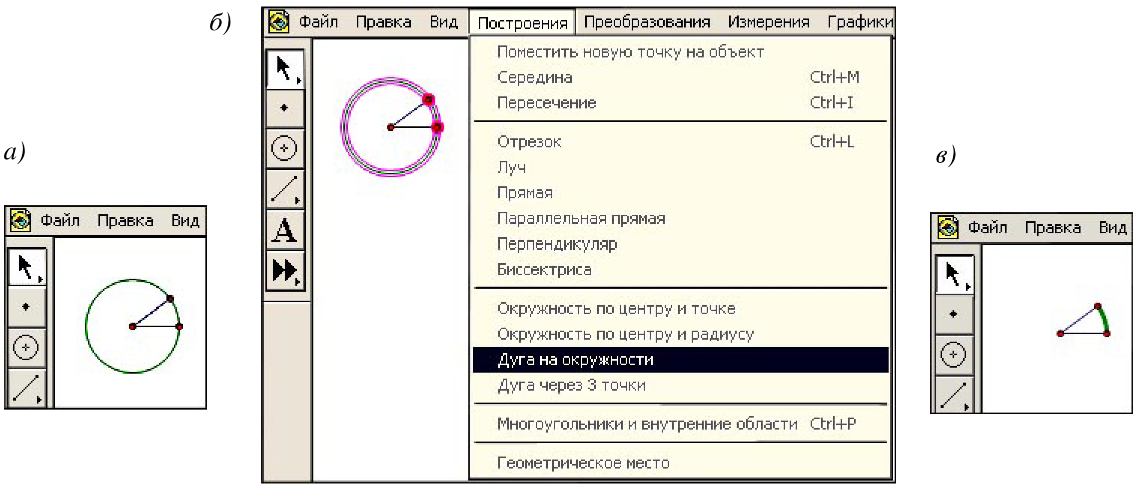


Рис. 23

нако не поздно встроить изготовленный движок в модель и сейчас, не переделывая всю работу заново. Познакомимся с этим очень полезным приемом коррекции построений.

Выделим точку P и выберем команду **Освободить объект точка от объекта окружность** меню **Правка** (рис. 24 *а*). Теперь точку P можно свободно двигать (вслед за ней «поедет» и вся модель, так что далеко отодвигать ее не стоит). С помощью команды **Показать все спрятанное** меню **Вид** вернем на чертеж точки O и E, задающие исходную окружность (после выполнения этой команды нужно снять выделение с точек O и E, а затем скрыть все остальные показанные объекты – они останутся выделенными – командой **Скрыть объекты**). Повернем точку E вокруг O на угол, определяемый движком. Наконец «подклеим» точку P к полученной после поворота точке E'. Для этого выделим обе точки и выполним команду **Совместить точки** (рис. 24 *б*); после этого «склеенную» точку можно скрыть. В результате модель вернется к «нормальному» состоянию, но будет приводиться во вращение движком.

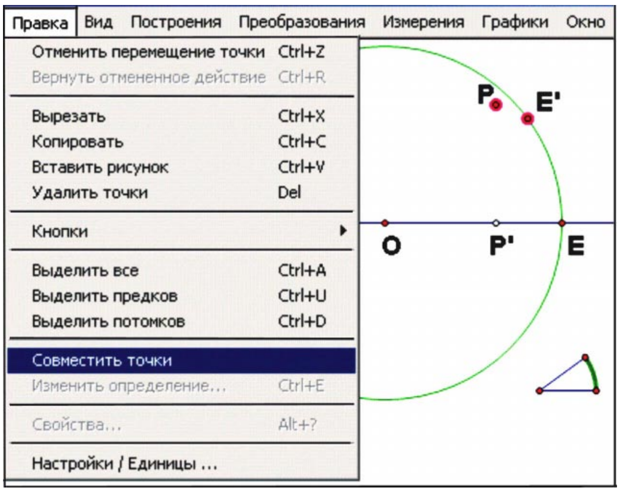
Можно было бы использовать круговой движок и для управления наклоном куба (в этом случае он мог бы совершить полный оборот вокруг горизонтальной оси), но большого смысла такая модификация не имеет.

Опишем еще один инструмент, который целесообразно сохранить в файле с моделью куба.

Точка, взятая на ребре куба, «привязана» к нему, т.е. вращается вместе с кубом и вместе с тем может свободно перемещаться по ребру. Можно ли аналогичным образом построить точку внутри грани? Оказывается, имеется «секретный» трюк, позволяющий это сделать, если грань – параллелограмм.

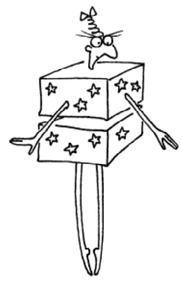
Возьмем точки K и L на двух смежных сторонах параллелограмма и проведем через каждую из них прямую, параллельную другой стороне (рис. 25). Построим точку M пересечения этих прямых. Наконец, спрячем прямые и точки K и L. Теперь точку M можно перетаскивать мышью, но только в пределах параллелограмма, причем при перемещениях параллелограмма как целого и его деформациях точка M будет сохранять свое положение относительно него.

а)



б)

Рис. 24



Точки на гранях встречаются во многих заданиях, поэтому полезно сделать инструмент, позволяющий строить их быстро. Выполнив построение, как описано выше, выделим стороны параллелограмма, на которых брались точки *K* и *L* («вход» инструмента), и точку *M* («выход»), а затем выполним команду **Создать новый инструмент**, как было описано в начале статьи. Для построения точки на грани куба достаточно выбрать этот инструмент и щелкнуть на двух ее соседних ребрах. К сожалению, описанное построение годится только для параллелограммов.

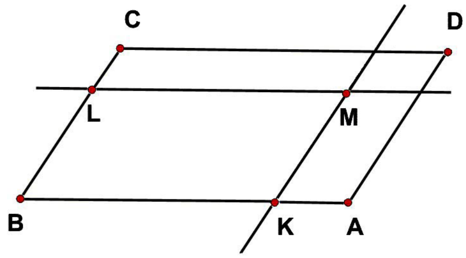


Рис. 25

СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В «МАТЕМАТИЧЕСКОМ КОНСТРУКТОРЕ»

Как всегда, коснемся особенностей, с которыми вы встретитесь при создании описанных выше моделей с помощью «1С:Математического конструктора». Собственно говоря, такие отличия минимальны: все использованные нами команды «Живой математики» имеют свои аналоги в «Конструкторе», а о небольших отличиях в порядке работы с ними говорилось в предыдущих статьях. Из команд и инструментов, о которых в данной статье мы (более подробно) говорили впервые, можно отметить следующие:

– Изменять размеры модели как целого в МК можно с помощью инструмента **Изменить масштаб** меню **Вид**.

– «Склеивание» двух точек (команда **Подменить точку другой** меню **Правка**) организовано иначе, чем в «Живой математике»: подменяемая точка не исчезает, и программа спрашивает какие из ее «потомков» должны быть переданы другой точке; все другие остаются неизменными. Обычно (как и в случае с внедрением кругового движка в нашу модель куба) переопределяются все потомки, и тогда «старую» точку можно удалить.

Напомним, что при сохранении модели в качестве самостоятельно работающего апплета вы можете определить состав инструментальной панели. В данном случае из собственно инструментов построения достаточно оставить только **Прямую**, **Отрезок**, а также построение многоугольника (для закрашивания сечения) и, конечно, **Точку** и **Пересечение линий**. Можно добавить к ним и инструмент для проведения параллельных прямых, хотя без него почти всегда можно обойтись.

В модель можно включить кнопку проверки ответа. Для ее создания нужно построить объекты, которые считаются ответом, выбрать инструмент **Проверить ответ** из меню **Кнопки**, указать все объекты, образующие ответ, нажать «Enter» и указать на экране место, где будет располагаться кнопка. (Инструкция по применению команды выписывается в строке состояния.) В заданиях на построение сечений вы должны решить и оговорить для пользователя, что считается построенным сечением: совокупность его вершин, вершины и стороны или, например, внутренность многоугольника. Можно настроить программу так, чтобы принимался любой из этих вариантов.

При построении сечений приходится проводить много прямых линий. Они загромождают чертеж и несколько замедляют работу программы при вращении модели (особенно сильно это проявлялось в «Живой геометрии»). Поэтому в некоторых программах динамической геометрии, в частности, в Cabri II, можно «обрубать» прямую, заменяя ее отрезком, содержащим все построенные на ней

точки и выступающим на определённое расстояние за крайние из них. Имеется такая опция и в «Математическом конструкторе».

Наконец, отметим новую возможность, появившуюся в последней, 4-й версии «Конструктора»: стиль линии (тонкая, жирная, пунктирная и др.) может зависеть от числового параметра. Благодаря этому ребра куба (или другого многогранника), попадающие при его вращении на «обратную», невидимую сторону можно делать пунктирными или вообще невидимыми. Детали выходят за рамки данной статьи.

Большой набор готовых моделей по стереометрии в формате МК вошел в комплекс «Конструктивные геометрические задания. 5-11 кл.» Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов *http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/3298222e-279f-475d-85f6-36115554a9cb/*. В момент, когда пишется эта статья, фирма «1С» готовит к выпуску диск, в состав которого войдет 4-я версия «Математического конструктора» вместе с большим набором моделей, в том числе стереометрических, и обширными методическими материалами.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Создайте инструмент, выполняющий гомотетию с коэффициентом k (значение k определяется как новый параметр) заданной точки относительно её проекции на заданную прямую. Используйте этот инструмент для более эффективного выполнения описанных в статье действий.

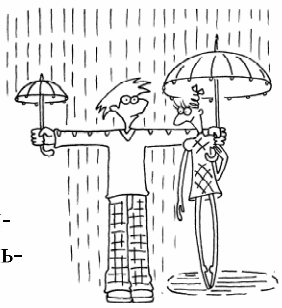
2. Постройте модель прямого кругового цилиндра и его осевого сечения.

3. Постройте модель прямого кругового конуса и его сечения плоскостью, параллельной основанию.

4. Завершите построение сечения куба, описанного в статье, с учетом всех различных расположений исходных точек.

5. Создайте инструмент для проведения «дужки» угла, которую используют, чтобы отметить угол или показать равенство углов.

6. Создайте и попробуйте выполнить задания на модели куба, описанные в конце раздела «Как использовать модели».



Публикации по Cabri 3D

1. *Х. Шуман.* Введение в изучение конических сечений с помощью Cabri 3D // Компьютерные инструменты в образовании. 2005, № 3. С. 27–31.

2. *Х. Шуман.* Исследование аналогий с помощью Cabri 3D на примере пары треугольник-тетраэдр // Компьютерные инструменты в образовании. 2005, № 4. С. 35–42.

3. *Х. Шуман.* Интерактивное конструирование в виртуальном пространстве с помощью Cabri 3D // Компьютерные инструменты в образовании. 2006, № 3. С. 43–51

4. *Х. Шуман.* Интерактивное моделирование и модификация объектов конкретного искусства в виртуальном пространстве // Компьютерные инструменты в образовании. 2007, № 2. С. 70–80.

5. *Х. Шуман.* Заполнение пространства полуправильными многогранниками в виртуальном пространстве // Компьютерные инструменты в образовании. 2007, № 3. С. 83–91.

6. *Х. Шуман.* Исследование задач на экстремум с помощью системы динамической геометрии Cabri 3D // Компьютерные инструменты в образовании. 2007, № 4. С. 50–58, 2007, № 5. С. 32–40.

***Дубровский Владимир Натанович,* кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова,**

***Поздняков Сергей Николаевич,* доктор педагогических наук, профессор кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ «ЛЭТИ».**