

Горелик Людмила Борисовна

## ИНТЕРАКТИВНЫЕ МИНИЗАДАЧНИКИ

Технология работы с интерактивными задачками кратко описана в методических указаниях к ИУМК ([www.kio.spb.ru/iumk2](http://www.kio.spb.ru/iumk2)).

«Каждый задачник содержит задачи, связанные с классом функций, зависящих от нескольких параметров. Например,  $y = \log_a k(x - b)$ . Ответом на вопрос является некоторое утверждение, выражающееся с помощью различных отношений между параметрами, которые могут соединяться связками И (система неравенств), ИЛИ (совокупность неравенств).

В основе технологии работы с задачками лежит система проверки утверждения на некотором количестве примеров и демонстрация этих примеров с комментариями. Демонстрируются примеры трех видов:

1) примеры, удовлетворяющие утверждению (они индицируются зеленой полоской);

2) примеры, противоречащие утверждению (контрпримеры, они индицируются красной полоской);

3) примеры, удовлетворяющие условию задачи, но не описанные утверждением (пропущенные решения, они индицируются желтой полоской).

Интерактивные задачки помогают ученику «протестировать» его решение, показывают его недочеты, однако не могут гарантировать полной правильности ответа.

Таким образом, интерактивные задачки являются новым средством поддержки самостоятельности ученика в процессе решения задач, но не предназначены для контроля процесса обучения».

Для 10 класса представлены следующие задачки:

- признаки делимости,
- принцип включения-исключения,
- тригонометрическая окружность,
- преобразования графиков,
- обратная функция,
- взаимное расположение параболы и прямой,
- линейная функция,
- квадратичная функция,
- дробно-линейная функция,
- дробно-квадратичная функция,
- степенная функция,
- показательная функция,
- логарифмическая функция,
- функции с модулями,
- периодические функции,
- обратные тригонометрические функции.

Решим задачи по некоторым темам.

### ПРИНЦИП ВКЛЮЧЕНИЯ-ИСКЛЮЧЕНИЯ

Для всех задач этого типа условие имеет следующую общую часть: «В множестве  $M$  содержится  $n$  (различных) натуральных чисел. Из них:  $a$  чисел чётные,  $b$  чисел кратны 3,  $c$  чисел кратны 4,  $d$  чисел кратны 6,  $e$  чисел кратны 12» (рис 1). Таким образом, в условии фигурируют шесть множеств, однако, в каждой из задач используется не более трех из них. Для целей методического анализа обозначим эти множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Для двух множеств формула включения-исключения записывается так:

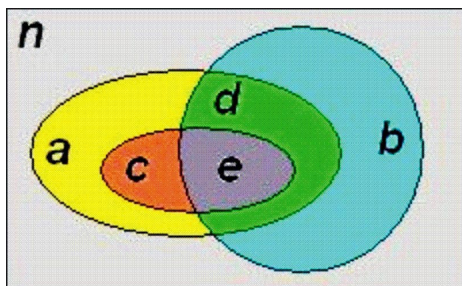


Рис. 1

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \quad (1a)$$

для трех множеств формула включения исключения записывается следующим образом:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (1b)$$

Некоторые учащиеся так «привязаны» к иллюстрации общего расположения множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ , что не могут применить формулу включения-исключения для частных случаев. На самом деле, формула включения-исключения универсальна.

Она справедлива, каково бы ни было расположение данных множеств. Покажем справедливость (1) для случая  $C \subset A$ . Для этого воспользуемся свойствами операций  $\cup$  и  $\cap$ , а также отношения включения  $\subset$  одного множества в другое (указаны только те свойства, которые понадобятся для доказательства, на самом же деле их больше):

1)  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$  (коммутативность операций объединения и пересечения);

2)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$  (ассоциативность объединения);

3)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$  (ассоциативность пересечения);

4)  $A \cup A = A$ ,  $A \cap A = A$  (законы идемпотентности);

5)  $A \cup (A \cap B) = A$ ,  $A \cap (A \cup B) = A$  (законы поглощения);

6) Если  $A \subset B$ , то  $A \cap B = A$  и  $A \cup B = B$ .

В нашем случае  $C \subset A$ , поэтому левая часть формулы (1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &\stackrel{(2)}{=} |A \cup (B \cup C)| \stackrel{(1)}{=} |A \cup (C \cup B)| \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} |(A \cup C) \cup B| \stackrel{(1)}{=} |(C \cup A) \cup B| \stackrel{(6)}{=} \\ &\stackrel{(6)}{=} |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \end{aligned} \quad (2)$$

Преобразуем правую часть.

По свойству 6)  $|A \cap C| = |C \cap A| = |C|$ .

По свойствам 1), 2) и 6)

$$|A \cap B \cap C| = |(C \cap A) \cap B| = |C \cap B| = |B \cap C|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ |A \cap B \cap C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |C| - \\ &- |B \cap C| + |B \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B|. \end{aligned} \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), убеждаемся, что в случае  $C \subset A$  формула (1) верна.

Теперь можно решать предложенные задачи.

**Задача 1.** При каком условии все числа множества  $M$  делятся нацело на два или на три (в данном случае возможна делимость как на два и три, так и на оба сразу)?

*Решение.* Пусть делимость на 2 – характеристическое свойство множества  $A$ , на 3 – множества  $B$ . Тогда делимость на 2 или на 3 – свойство объединения этих множеств, поэтому, по формуле (1a)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = a + b - d.$$

По условию

$$n = |M| = |A \cup B|.$$

Задача решена. Вводим:  $n = a + b - d$  и нажимаем на клавишу «Проверить» (рис. 2).

**Задача 2.** При каком условии все числа множества  $M$  делятся нацело либо на два, либо на три, но не на оба сразу?

*Решение.* Сравнивая условия задач 1 и 2, делаем вывод, что в задаче 2 не берется пересечение множеств  $A$  и  $B$ . Значит, ответ задачи 1 уменьшится на  $d$ . Вводим ответ:  $n = a + b - 2d$ .

**Задача 3.** При каком условии в множестве  $M$  нет чисел, в разложении которых на простые множители двойка встречается ровно один раз (в первой степени)?

**Задача 1**

В множестве  $M$  содержится  $n$  (различных) натуральных чисел. Из них:  $a$  - чётных,  $b$  - кратных 3,  $c$  - кратных 4,  $d$  - кратных 6,  $e$  - кратных 12. При каком условии все числа множества  $M$  делятся нацело на два или на три (в данном случае возможна делимость как на два и три, так и на оба сразу)?

$n=5; a=3; b=2; c=2; d=0; e=0$

{4; 8; 9; 14; 15}

Это множество удовлетворяет условию задачи и вошло в ваш ответ

Контрпримеры в базе отсутствуют. Предположительно, Ваша гипотеза верна. Переходите к обоснованию решения.

Введите ответ

7	8	9	+	-	>	=	n	a	Очистить
4	5	6	·		<	≠	b	c	Проверить
1	2	3	(	)	≥	И	d	e	
+/-	0		←	→	≤	ИЛИ			

Рис. 2. Решение задачи 1 по теме «Принцип включения-исключения»

*Решение.* В разложении на простые множители двойка встречается один раз только у четных чисел, не кратных четырем. Количество таких чисел  $a - c$ . По условию оно равно 0 (рис. 3). Поэтому правильный ответ  $a = c$ .



Рис. 3

**Задача 4.** При каком условии в множестве  $M$  столько же нечётных чисел, сколько чисел, не кратных трём?

*Решение.* Множество  $X$  нечетных чисел – это множество  $M$ , за исключением четных чисел, их количество равно  $n - a$  (рис. 4). Множество  $Y$  чисел, не кратных 3, – это множество  $M$ , за исключением чисел, кратных 3, их количество  $n - b$  (рис. 5). Таким образом, условие задачи выполняется при  $n - a = n - b$ , или  $a = b$ . Проверяем ответ с помощью интерактивного задачника.



Рис. 4

Решая эти задачи, учащиеся поступают следующим образом. Они пытаются подобрать ответ, проверяя свои гипотезы с помощью интерактивного задачника. Конкрет-



Рис. 5

ные примеры, записанные над желтой и красной полосой, помогают сориентироваться, понять ошибки. Обычно догадки и доказательства идут параллельно.

Решение задач из интерактивного задачника – увлекательное занятие, позволяющее проконтролировать действия, сделать заключение о правильности решения. По аналогии с приведенными примерами читатель без труда решит остальные задачи. Приведем тексты некоторых из задач и ответы к ним.

**Задача 5.** При каком условии количество чисел множества  $M$ , которые делятся нацело на шесть, вдвое больше, чем количество чисел, делящихся нацело как на шесть, так и на четыре?

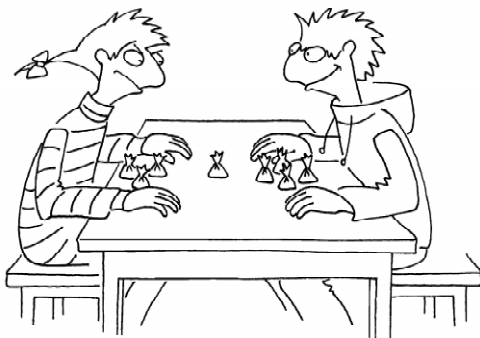
Ответ:  $d = 2e$ .

**Задача 6.** При каком условии все чётные числа множества  $M$  не кратны четырём?

Ответ:  $c = 0$ .

**Задача 7.** При каком условии количество нечётных кратных трём чисел множества  $M$  равно 2?

Ответ:  $b - d = 2$ .



Эксперименты с делимостью...

**Задача 8.** При каком условии все кратные трём числа множества  $M$  делятся нацело на четыре?

Ответ:  $b = e$ .

**Задача 9.** При каком условии количество чётных чисел множества  $M$ , не кратных трём, больше, чем количество нечётных чисел, кратных трём?

Ответ:  $a > b$ .

**Задача 10.** При каком условии все числа множества  $M$ , делящиеся нацело на шесть, делятся и на четыре?

Ответ:  $d = e$ .

**Задача 11.** При каком условии количество чисел множества  $M$ , кратных четырём, но не кратных шести, больше двух?

Ответ:  $c - e < 2$

*Замечание.* Прежде чем решать задачи, полезно потренироваться, заполняя круги Эйлера в динамической иллюстрации, которая есть в тексте «Формула включения-исключения», а также работая с тренажером по одноименной теме.

### ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Снова обратимся к учебнику и процитируем текст, предваряющий подборку задач на делимость в интерактивном задачнике: «Оказывается, что все признаки можно выводить одним общим методом – применением теории сравнений. Разобравшись в лабораторной работе с одноимённым названием, вы наверняка справитесь и с этими задачами. Признаки делимости в задачах формулируются для шестизначных чисел, однако это не умаляет общности результатов решения. Напомним, что сущность признаков деления в том, чтобы проверять делимость числа, не прибегая сразу к алгоритму его непосредственного деления, а заменяя заданное число меньшим. Чтобы этот принцип соблюдался, в задачнике искусственно ограничивается ввод десятичных представлений самих чисел».

Эксперименты с делимостью предварительно проводим в ходе лабораторной работы «Признаки делимости». Для того что-

бы сформулировать признак делимости на натуральное число  $n$ , нужно сравнить два остатка от деления на  $n$ : остатка от деления подбираемой линейной комбинации цифр числа, сгенерированного инструментом (предназначенным для экспериментов с делимостью), и остатка от деления на  $n$  самого этого числа. Если они равны, то признак делимости на  $n$  предположительно найден. Нажимая кнопку генерации несколько раз, следим за остатками. Остаток, равный нулю, означает, что данное число делится на  $n$  нацело.

Текст учебника ИУМК позволяет разобраться в том, почему замена разрядных единиц числа остатками от их деления на  $n$  дает линейную комбинацию, которая при делении на  $n$  имеет тот же остаток, что и само число.

Трудность работы состоит в том, что найденные признаки делимости не всегда совпадают с теми, которые учащиеся изучали раньше. Старшеклассники часто бывают обескуражены полученным результатом и затрудняются давать содержательную формулировку признака. В этом их нужно тренировать. Для примера приведем таблицу коэффициентов линейных комбинаций

цифр, полученных при подборе признаков делимости, а также попытаемся сформулировать найденные признаки. Но сначала продемонстрируем уже решенную задачу из интерактивного задания (рис. 6).

Особое внимание нужно обратить на запись справа от белого прямоугольника: «Контрпримеры в базе отсутствуют. Предположительно, Ваша гипотеза верна. Переходите к обоснованию решения». Пример обоснования можно найти на соответствующей странице учебника ИУМК.

### ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

В темах задания, связанных с исследованием классов функций, особенно видна необходимость предварительного освоения темы в ходе лабораторной работы. Система задач, построенная на каждом из классов, дает возможность увидеть полную картину свойств в зависимости от значений параметров. Почти невозможно для десятиклассника обнаружить эти свойства аналитически, как он обычно это делает при решении задач с параметрами. Интерактивные задания затрагивают большой массив

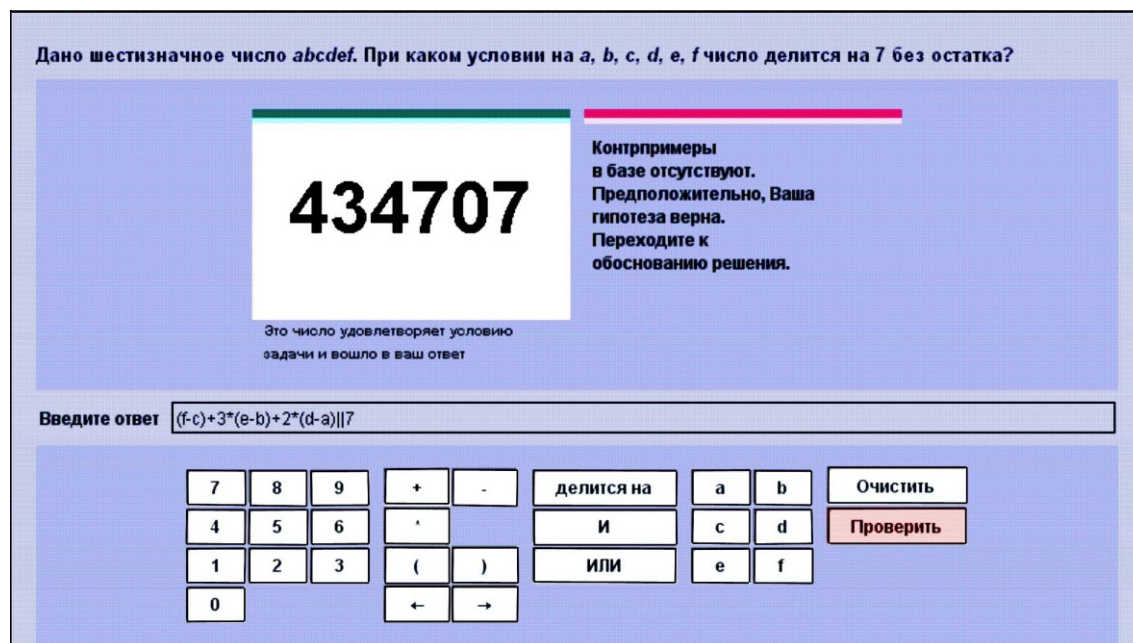


Рис.6. Решение задачи № 6 по теме «Признаки делимости»

Табл. 1. Признаки делимости чисел на  $n$ 

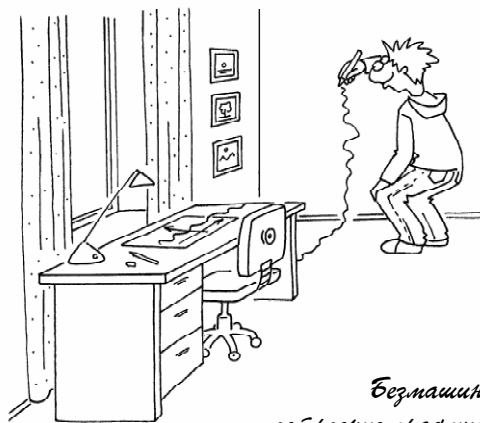
Дели- тель	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	Набор символов в строку ответов	Формулировка признака
$n$	Коэффициенты линейной комбинации цифр							
2	0	0	0	0	0	1	$f \parallel 2$	Для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра делилась на 2.
3	1	1	1	1	1	1	$(a + b + c + d + e + f) \parallel 3$	Для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.
4	0	0	0	0	2	1	$(2 * e + f) \parallel 4$	Для того чтобы число делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы сумма последней и удвоенной предпоследней цифр делилась на 4.
5	0	0	0	0	0	1	$f \parallel 5$	Для того чтобы число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра делилась на 5.
6	-2	-2	-2	-2	-2	1	$(-2 * (a + b + c + d + e) + f) \parallel 6$ или свести к делимости на 2 и на 3	Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы разность между последней цифрой и удвоенной суммой остальных цифр делилась на 6.
7	-2	-3	-1	2	3	1	$((f - c) + 3 * (e - b) + 2 * (d - a)) \parallel 7$	Для того чтобы число делилось на 7, необходимо и достаточно, чтобы при делении числа на грани по 3 цифры, начиная с последней, сумма разности первых справа цифр этих граней, утроенной разности вторых цифр и удвоенной разности третьих цифр делилась на 7.
8	0	0	0	4	2	1	$(4 * d + 2 * e + f) \parallel 8$	Для того чтобы число делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы сумма учетверенной цифры его сотен, удвоенной цифры десятков и цифры единиц делилась на 8.
9	1	1	1	1	1	1	$(a + b + c + d + e + f) \parallel 9$	Для того чтобы число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.
11	-1	1	-1	1	-1	1	$((f - c) + (e - b) + (d - a)) \parallel 11$	Для того чтобы число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы при делении числа на грани по 3 цифры, начиная с последней, сумма разностей соответствующих цифр граней делилась на 11.

данных, и при аналитическом решении трудно бывает все предусмотреть. Кроме того, задания с несколькими параметрами представляют для учащихся особую трудность.

Еще одна «неприятность» при решении подобных задач возникает в том случае, когда школьник хочет проверить свою гипотезу с помощью графика. Безмашинное построение графиков ничего не дает, так как оно, во-первых, утомительно и занимает много времени, а во-вторых, настолько неточно, что надеяться на успех не приходится. Построение графиков вручную не может служить эвристическим приемом. С этой точки зрения, лабораторные работы с применением компьютерных инструментов ИУМК, которые, в отличие от обычных графопостроителей, имеют интерактивный характер, могут продвинуть школьное обучение математике далеко вперед.

Как уже говорилось, лабораторная работа предшествует решению задач из интерактивных задачек. Но если учащийся или учитель проигнорирует это правило и перейдет сразу к решению задач, то это будет мощнейшим стимулом для обращения к компьютерным инструментам, то есть к выполнению лабораторной работы по теме. Для того чтобы проиллюстрировать всесторонность охвата и подробность рассмотрения каждой темы в интерактивных задачках, достаточно сказать, что, например, по теме «Показательная функция» сформулировано больше 40 задач. Ни один обычный школьный учебник или задачник не претендует на подобную полноту освещения темы. Существующие бумажные сборники фрагментарны, формальны. Несмотря на кажущееся обилие упражнений в них, у учащихся не складывается система представлений по изучаемым разделам математики, не формируется математическая культура, не создаются фоновые знания, на которые должна ложиться каждая раз новая информация. Нарушается основной принцип обучения: принцип системности знаний.

Для того чтобы получить представление о качестве подбора задач, обратимся к их текстам по выбранной теме.



### АСИМПТОТИКА

В этом минизадачнике собраны задачи, связанные с исследованием функции  $y = a^x + kb^x$ . Во всех задачах предполагается, что  $a$  и  $b$  – положительные отличные от 1 действительные числа.

**Задача 1.** При каких условиях график функции не имеет горизонтальных асимптот?

**Задача 2.** При каких условиях значения функции стремятся к нулю при стремлении  $x$  к  $+\infty$ , оставаясь ненулевыми?

**Задача 3.** При каких условиях значения функции стремятся к нулю при стремлении  $x$  к  $+\infty$ , оставаясь отрицательными?

**Задача 4.** При каких условиях значения функции стремятся к нулю при стремлении  $x$  к  $+\infty$ , оставаясь положительными?

**Задача 5.** При каких условиях функция стремится к  $+\infty$  как при бесконечном увеличении, так и при бесконечном уменьшении аргумента (стремлении  $x$  к  $+\infty$  или к  $-\infty$ , что обычно называют короче стремлением  $x$  к бесконечности)?

**Задача 6.** При каких условиях функция стремится к  $+\infty$  при бесконечном увеличении аргумента (стремлении  $x$  к  $+\infty$ ) и к  $-\infty$  при бесконечном уменьшении аргумента (стремлении  $x$  к  $-\infty$ )?

**Задача 7.** При каких условиях функция стремится к  $+\infty$  при бесконечном увеличении аргумента (стремлении  $x$  к  $+\infty$ ) и к

нулю при бесконечном уменьшении аргумента (стремлении  $x$  к  $-\infty$ )?

**Задача 8.** При каких условиях функция стремится к  $-\infty$  при бесконечном увеличении аргумента (стремлении  $x$  к  $+\infty$ ) и к нулю при бесконечном уменьшении аргумента (стремлении  $x$  к  $-\infty$ )?

**Задача 9.** При каких условиях функция стремится к  $+\infty$  при бесконечном уменьшении аргумента (стремлении  $x$  к  $-\infty$ ) и к нулю при бесконечном увеличении аргумента (стремлении  $x$  к  $+\infty$ )?

**Задача 10.** При каких условиях функция стремится к  $-\infty$  при бесконечном уменьшении аргумента (стремлении  $x$  к  $-\infty$ ) и к нулю при бесконечном увеличении аргумента (стремлении  $x$  к  $+\infty$ )?

**Задача 11.** При каких условиях расстояние между графиками функций  $y = a^x + kb^x$  и  $y = a^x$  стремится к нулю (но отличается от нуля) при бесконечном увеличении аргумента (стремлении  $x$  к  $+\infty$ )?

#### МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМ

**Задача 1.** При каких условиях функция является убывающей показательной функцией?

**Задача 2.** При каких условиях функция является возрастающей показательной функцией?

**Задача 3.** При каких условиях функция возрастает, начиная с некоторого  $x$ ?

**Задача 4.** При каких условиях функция убывает, начиная с некоторого  $x$ ?

**Задача 5.** При каких условиях функция имеет минимум?

**Задача 6.** При каких условиях функция имеет максимум?

**Задача 7.** При каких условиях функция имеет экстремум?

#### ЧЁТНОСТЬ / НЕЧЁТНОСТЬ

**Задача 1.** При каком условии функция является четной?

**Задача 2.** При каком условии функция является нечётной?

**Задача 3.** При каких условиях прямая  $x = 1$  является осью симметрии графика функции?

**Задача 4.** При каких условиях прямая  $x = -1$  является осью симметрии графика функции?

**Задача 5.** При каких условиях точка с координатами  $(1; 0)$  является центром симметрии графика функции?

**Задача 6.** При каких условиях точка с координатами  $(-1; 0)$  является центром симметрии графика функции?

**Задача 7.** При каких условиях симметрия графика функции относительно оси  $Ox$  даёт такой же результат, как симметрия графика относительно оси  $Oy$ ?

#### ГРАФИК ФУНКЦИИ

**Задача 1.** При каких условиях график функции проходит через начало координат?

**Задача 2.** При каких условиях график функции пересекает ось  $Oy$  в точке с координатой 1?

**Задача 3.** При каких условиях график функции получается из графика показательной функции растяжением вдоль оси  $Oy$ ?

**Задача 4.** При каких условиях график функции лежит выше графика функции?

**Задача 5.** При каких условиях график функции  $y = a^x + kb^x$  пересекает график функции  $y = b^x$ , но не совпадает с ним?

**Задача 6.** При каких условиях график функции  $y = a^x + kb^x$  получается из графика функции  $y = a^x$  отражением относительно оси  $Ox$ ?

**Задача 7.** При каких условиях график функции  $y = a^x + kb^x$  получается из графика функции  $y = a^x$  сдвигом вдоль оси  $Ox$  на 1 влево?

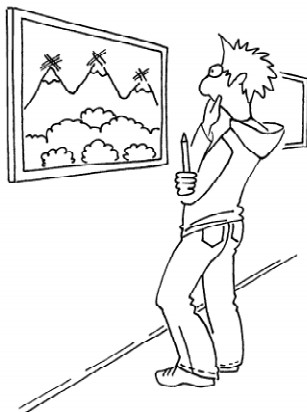
**Задача 8.** При каких условиях график функции  $y = a^x + kb^x$  получается из графика



функции  $y = a^x$  сдвигом вдоль оси  $Ox$  на 1 вправо?

**Задача 9.** При каких условиях график функции  $y = a^x + kb^x$  получается из графика функции  $y = a^x$  сдвигом вдоль оси  $Ox$ ?

**Задача 10.** При каких условиях коэффициент наклона касательной к графику функции растёт, оставаясь положительным, начиная с некоторого  $x$ ?



*...необходимо  
учесть выделить ... значения,  
при которых происходят  
качественные изменения.*

**ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ**

**Задача 1.** При каких условиях функция является константой?

**Задача 2.** При каких условиях график функции имеет точки внутри I четверти?

**Задача 3.** При каких условиях функция не принимает отрицательных значений?

**Задача 4.** При каких условиях, начиная с некоторого  $x$ , все значения функции отрицательны?

**Задача 5.** При каких условиях функция принимает все вещественные значения?

При решении задач с параметрами необходимо уметь выделить те их значения, при которых происходят качественные изменения. Пример такого выделения есть в указа-

ниях к лабораторной работе: «Положите  $k = 1$  и изучите наличие и характер экстремумов функции в зависимости от соотношения между  $a$  и  $b$ . Рассмотрите различные комбинации значений  $a$  и  $b$  (сравнивая их с единицей: больше 1 или меньше 1)».

Для конкретного значения параметра  $k$  необходимо рассмотреть восемь случаев:

- $b > a > 1;$
- $b = a > 1;$
- $a > b > 1;$
- $a < b < 1;$
- $b = a < 1;$
- $b < a < 1;$
- $a > 1, b < 1;$
- $a < 1, b > 1.$

Полный перебор всех случаев при решении задач показан в табл. 2.

В каждой ячейке таблицы нужно поместить скриншот соответствующего графика из лабораторной работы. Для этого ячейки должны быть достаточно большими. Разумно каждую строчку таблицы помещать на листе формата А4. Получится 7 листов, на каждом из которых будут помещены 8 графиков.

Это может показаться «перебором» в фигуральном смысле, но на самом деле,

Табл. 2.

Значения $k$	Сочетания значений параметров $a$ и $b$							
	$b > a > 1$	$b = a > 1$	$a > b > 1$	$b < a < 1$	$b = a < 1$	$a < b < 1$	$b < 1 < a$	$a < 1 < b$
$k < -1$								
$k = -1$								
$-1 < k < 0$								
	$a > 1$	$a < 1$						
$k = 0$								
$0 < k < 1$								
$k = 1$								
$k > 1$								

чтобы учесть все возможные изменения свойств с изменением значений параметров, приходится составлять такую подробную таблицу. Достаточно взглянуть на скриншот (рис. 7) решения задачи 1 из приведенного списка («Асимптотика»), чтобы понять важность подробного учета всех случаев сочетания значений трех параметров.

Посмотрим запись в ячейке «Введите ответ». Для того, чтобы набрать такой ответ, необходимо соединять союзами «и» и «или» системы и совокупности требований относительно параметров. Кстати, инструмент «не понимает» двойных неравенств, поэтому их надо разбивать на одинарные. Между знаками нет пробелов. С клавиатуры интерактивного инструмента набираются подряд все нужные символы. Точка или точка с запятой в конце ответа не ставятся.

### ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Общее условие для всех задач по теме сформулировано в учебнике следующим образом: «В этом минизаданике собраны задачи, связанные с исследованием поворо-

тов и соответствующих свойств синуса и косинуса. Во всех задачах предполагается, что задана единичная окружность с центром  $O$  в начале координат. Точки  $A$  и  $B$  получаются поворотом из положения  $(1; 0)$  на  $a$  и  $b$  радиан соответственно, где  $a$  и  $b$  – произвольные действительные числа» (см. рис. 8).

Задачи сгруппированы по таким разделам: «Расположение точек», «Угол», «Поворот». Для примера разберем задачи первого блока: «Расположение точек».

**Задача 1.** При каком условии точки  $A$  и  $B$  совпадают?

**Задача 2.** При каком условии точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно оси абсцисс?

**Задача 3.** При каком условии точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно оси ординат?

**Задача 4.** При каком условии точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно начала координат?

**Задача 5.** При каком условии точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно биссектрисы I и III четвертей?

При каких условиях график функции  $y = a^x + kb^x$  не имеет горизонтальных асимптот?

$f(x) = 5^x - 0,04 \cdot 0,2^x$

Контрпримеры в базе отсутствуют. Предположительно, Ваша гипотеза верна. Переходите к обоснованию решения.

Эта функция удовлетворяет условию задачи и вошла в ваш ответ

Введите ответ

7	8	9	+	^	>	=	a	Очистить
4	5	6	-	(	<	≠	b	Проверить
1	2	3	*	)	≥	и	k	
+/-	0		←	→	≤	или		

Рис. 7. Решение задачи №1 по теме «Показательная функция» (раздел «Асимптотика»)

**Задача 6.** При каком условии точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно биссектрисы II и IV четвертей?

Поместим условия и решения для всех задач сразу в табл. 3.

Запись решения в задачнике выглядит следующим образом (рис. 9).

Задачи других разделов решаются так же. Например, в задаче 1 раздела «Угол» («При каком условии  $AO$  и  $OB$  перпендикулярны?») используется условие перпендикулярности прямых: их угловые коэффициенты удовлетворяют соотношению  $k_1 \cdot k_2 = -1$ , то есть  $\operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb} = -1$ ,

или  $\frac{\sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} = 0$ , откуда

$\sin a \cdot \sin b + \cos a \cdot \cos b = 0$  (что можно получить и из условия  $\cos(a - b) = 0$ , которое говорит о том, что  $a - b = \pm 90, \pm 270, \dots$ ).

Интерактивные задачники развивают у учащихся навыки самообразования, особенно функцию самооценки и самоконтроля.

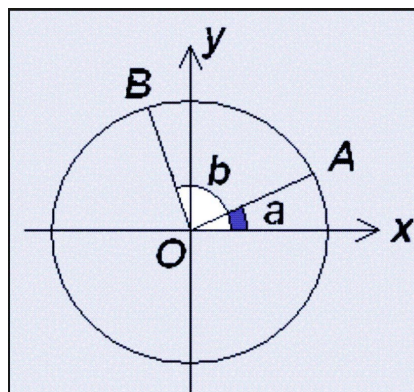


Рис. 8. Общее условие для всех задач по теме «Тригонометрическая окружность»

Они имеют возможность корректировать свою деятельность в процессе интерактивных действий с компьютерными инструментами. Роль учителя в этом случае меняется: он становится консультантом, советчиком, помощником, соавтором при решении задач – то есть фасилитатором\* деятельности учащихся, а не контролером.

Табл. 3. Решение задач по теме «Тригонометрическая окружность» (разд. «Расположение точек»)

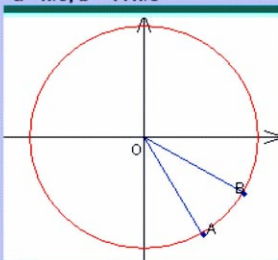
№	Расположение точек	Соотношение между углами $a$ и $b$	Соотношение между тригонометрическими функциями (решение задачи)
1	$A = B$	$a = b$	$\begin{cases} \sin a = \sin b, \\ \cos a = \cos b. \end{cases}$
2	$A = S_{Ox}(B)$	$a = -b$	$\begin{cases} \sin a = \sin(-b), \\ \cos a = \cos(-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = -\sin b, \\ \cos a = \cos b. \end{cases}$
3	$A = S_{Oy}(B)$	$a = 180^\circ - b$	$\begin{cases} \sin a = \sin(180^\circ - b), \\ \cos a = \cos(180^\circ - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = \sin b, \\ \cos a = -\cos b. \end{cases}$
4	$A = S_O(B)$	$a = 180^\circ + b$	$\begin{cases} \sin a = \sin(180^\circ + b), \\ \cos a = \cos(180^\circ + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = -\sin b, \\ \cos a = -\cos b. \end{cases}$
5	$A = S_{y=x}(B)$	$a = 90^\circ - b$	$\begin{cases} \sin a = \sin(90^\circ - b), \\ \cos a = \cos(90^\circ - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = \cos b, \\ \cos a = \sin b. \end{cases}$
6	$A = S_{y=-x}(B)$	$a = 270^\circ - b$	$\begin{cases} \sin a = \sin(270^\circ - b), \\ \cos a = \cos(270^\circ - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = -\cos b, \\ \cos a = -\sin b, \end{cases}$

\* *Facilitate* (англ.) – облегчать. Термин *facilitator* последнее время стал использоваться в области технологий дистанционного обучения (Прим. ред.).

**Расположение точек. Задача 6**

При каком условии точки A и B симметричны относительно биссектрисы II и IV четвертей?

$a = -\pi/3; b = 11\pi/6$



Этот пример удовлетворяет условию задачи и вошел в ваш ответ

Контрпримеры в базе отсутствуют. Предположительно, Ваша гипотеза верна. Переходите к обоснованию решения.

Введите ответ

7	8	9	+	-	>	=	sin_a	sin_b	Очистить
4	5	6	*	÷	<	≠	cos_a	cos_b	Проверить
1	2	3	(	)	≥	И	√2	√3	
+/-	0		←	→	≤	ИЛИ			

Рис. 9. Запись решения задачи 9 по теме «Тригонометрическая окружность» (раздел «Расположение точек»)



Наши авторы, 2008.  
Our authors, 2008.

*Горелик Людмила Борисовна,  
учитель математики  
МОУ лицей № 102 г. Челябинска.*