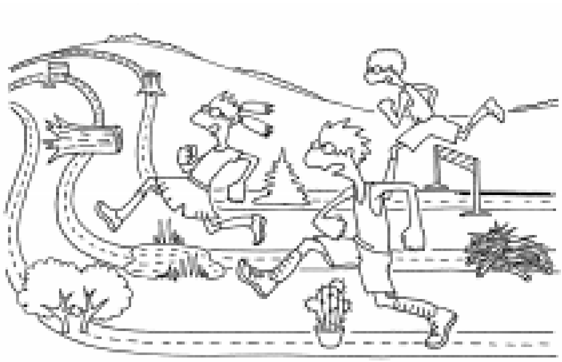
Горелик Людмила Борисовна

ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ (СР), КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ (КР), ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ (ИДЗ)

ИУМК «Математика в школе – XXI век» содержит pdf-файлы с текстами самостоятельных и контрольных работ, а также индивидуальных домашних заданий. Каждая работа составлена в 60 вариантах, которые содержат однотипные задания, но различаются по конкретному наполнению.

Многовариантность освобождает учителя от мучительного подбора равнозначных заданий и составления вариантов в достаточном количестве для того, чтобы избежать несамостоятельного выполнения работы со стороны учащихся. Это большой плюс учебника, так как теперь свободное от рутинной работы время учитель может посвятить более достойным целям, направленным на проверку обученности учащихся.

В варианте ИУМК для учителя есть методические указания к использованию



...задание, с одной стороны, одно и то же сразу для всех учеников,... а с другой стороны, каждый ученик получает свое персональное задание...

контрольных материалов. Подчеркнем все *преимущества* организации проверки знаний, предлагаемой авторами ИУМК. Это легко сделать, процитировав текст методических указаний.

1. «Ученикам раздаются *однотипные* задания, при этом у учителя *есть ответы ко всем заданиям...* Выполнившие работу ученики сообщают об этом учителю, который может тут же по имеющемуся ответу проверить правильность решения (угадать ответ практически невозможно) и, в зависимости от результата, либо предложить *найти ошибку*, либо *перейти к следующему заданию*».

2. «Здесь существенно то, что задание, с одной стороны, *одно и то же сразу для всех учеников*, и поэтому *при обсуждении* работы можно обращаться *сразу ко всем* ученикам, а с другой стороны, каждый ученик получает свое *персональное* задание, и выполнить его он должен *абсолютно самостоятельно*».

3. «Различия между СР, КР и ИДЗ весьма условны. СР, как правило, требуют *предварительного обсуждения* и предшествуют КР. ИДЗ *более объемны* по содержанию».

4. «Контрольные работы нацелены на проверку *базовых* (основных) знаний по данной теме и, как правило, содержат *стандартные* задачи. В ИДЗ могут быть задания *повышенной* сложности, их решение может быть *необязательным*, если они окажутся непосильны данной группе учеников».

Таким образом, на все темы ИУМК есть тексты проверочных работ, которые отличаются методическим предназначением, объемом, степенью трудности. Наличие 60 вариантов в каждой работе создает комфортные условия учительского труда, а также устраняет возможность списывания. Процедура проверки ученических работ стандартного характера (то есть таких заданий, в которых не нужно оценивать способ решения) упрощена благодаря наличию готовых ответов, имеющихся в распоряжении учителя.

Но хочется добавить главное, а именно то, что характеризует инновационный комплекс во всех аспектах его применения и что не выделено в методических указаниях к использованию текстов самостоятельных и контрольных работ и особенно индивидуальных домашних заданий. Об инноваціонноси на этапе контроля лучше говорить на языке компетентностей.

По мнению А.В. Хуторского [1], одним из вариантов решения задачи внедрения компетентностного подхода при оценке знаний является предоставление учащемуся права спрашивать, а не отвечать, так как ученик «вопрошающий» способен продуцировать свое собственное знание: «В вопросе ученика как педагогической форме его ответа содержится и знание, и творчество, государственное и личностное. Введение в образовательный стандарт (общеучебные умения, навыки, обобщенные виды деятельности) компонентов вопрошания ученика (его эвристического диалога) позволит практически решать не только дидактические, но воспитательные задачи образования». Следует подчеркнуть, что имеется в виду как внешний, так и внутренний диалог, то есть ученик может задавать вопросы в том числе и себе самому.

Содержание вопрошания коренным образом отличается от вопросов, обращенных к учителю с целью получить подсказку, когда алгоритм решения задачи ученику неизвестен. В акте вопрошания отражены все этапы работы учащегося над задачей, начиная с целеполагания и заканчивая рефлексией его учебных действий. В этом случае имеется в виду не конкретная математическая задача или упражнение, а задача учебная, надпредметная, которую ученик ставит перед собой в процессе решения предметной задачи.

Останавливаясь отдельно на каждом виде проверочных работ, каждый раз будем подчеркивать то новое, что можно внести в данный вид учительской деятельности в соответствии с инновационностью ИУМК.

2. САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ (СР)

В ИУМК представлены самостоятельные работы по следующим темам:

1. Степени и корни.
2. Степени и логарифмы (1 часть).
3. Степени и логарифмы (2 часть).
4. Область определения функции.
5. Четность и периодичность.
6. Преобразование графиков.
7. Степень с рациональным показателем.

Самостоятельные работы проверяют качество усвоения базовых знаний и рассчитаны на более короткий срок выполнения, чем контрольные работы. Как правило, они содержат репродуктивные задания и не требуют от учащегося инициативы в предложении другого хода решения, отличного от трафаретного. Но и здесь учитель должен позаботиться о том, чтобы у ученика формировалась полная структура деятельности, которая содержит не только исполнительскую, но и *ориентировочную*, и *контрольно-коррекционную* части. В качестве примера рассмотрим несколько заданий из разных самостоятельных работ.

1. Сравнить числа: $\sqrt{\log_{10} 11}$ *и* $\log_{10}\sqrt{110}$ (самостоятельная работа по теме «Степени и логарифмы», часть 2, вариант 1).

Вначале отметим, что трудно разграничить задания стандартные и нестандартные. Могут быть разные толкования этих терминов. Например, стандартным можно назвать задание, ход решения которого вытекает непосредственно из теории. В этом случае оно является результатом применения какой-либо теоремы, какого-либо свойства, правила, результатом подведения под определение. *До его выполнения* необходимо предпринять одно из следующих действий:

– сравнить условие задачи с условием некоторой теоремы;

– установить, что условие задачи удовлетворяет границам применимости какого-то свойства или правила;

– сличить объекты, данные в условии задачи, с объектами того или иного определения.

Это разумные действия, исключающие манипулирование объектами с опорой только на внешние признаки задания (в нашем случае, например, при виде радикала некоторые учащиеся сразу же возводят в квадрат данные числа, не убедившись при этом, что они одного и того же знака). В этом смысле стандартное задание не предполагает выполнение автоматического действия без всякого размышления, и это уже делает его в некоторой степени нестандартным, так как требует *оценочных действий*. Во всяком случае, данное задание можно легко превратить в такое, которое уже трудно назвать стандартным. Например, сравнить числа $\sqrt{\log_{10}11}$ и $\log_{10}\sqrt{0{,}0011}$ (здесь второе число отрицательно, причем его квадрат больше квадрата первого числа!). По форме оно очень похоже на предложенное задание самостоятельной работы, и если учащийся не привык выполнять оценочные действия, то он по-прежнему будет сравнивать квадраты чисел и придет к неверному выводу.

Итак, даже при работе учащихся со стандартными заданиями на учителя ложится нелегкое бремя создания условий для *дестабилизации* нежелательных навыков. Сейчас речь идет о навыке выполнения заданий без предварительных оценочных действий, перечисленных выше. Именно поэтому бессмысленно вести речь о стандартных и нестандартных заданиях.

В подтверждение сказанного покажем, что в случае выполнения приведенного выше задания можно и не пользоваться стандартными методами, что и доказывает его нестандартность. Границы стандартного и нестандартного размываются.

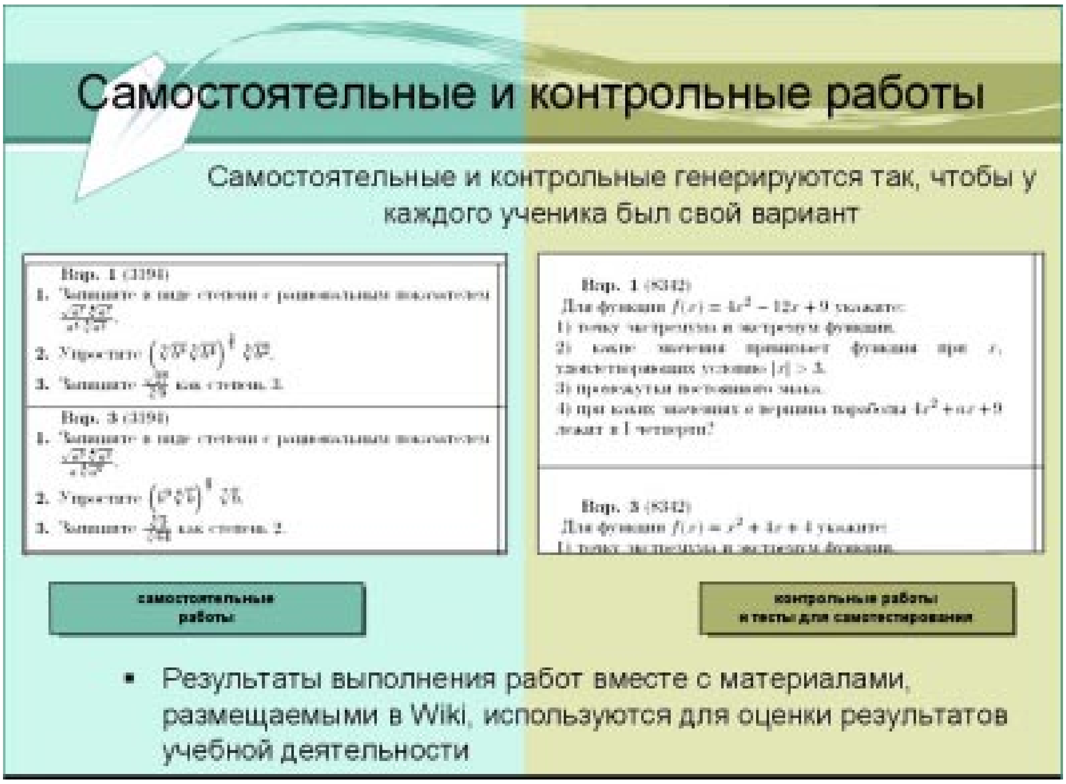


Рис. 1

В самом деле, достаточно увидеть в числе $\sqrt{\log_{10}11}$ среднее геометрическое чисел $\log_{10}11$ и единицы, а во втором числе их среднее арифметическое, так как $\log_{10}\sqrt{110}=\frac{1}{2}(\log_{10}11+1)$. Известно, что среднее геометрическое двух положительных *неравных* чисел меньше их среднего арифметического. Итак, *гештальт* задачной ситуации позволил сразу же назвать ответ.

Рассмотрим еще один пример.

2. Решить неравенство $\frac{\log_4(3x-9)}{\log_4(2x+9)}\le 1$ (самостоятельная работа по теме «Степени и логарифмы», часть 2, вариант 1).

Что предпринимают учащиеся при решении этого неравенства?

• Находят область его определения.

• Ставят условие: $\log_4(2x+9)>0$ и умножают данное неравенство на это выражение, сохранив знак неравенства. Решают получившуюся систему.

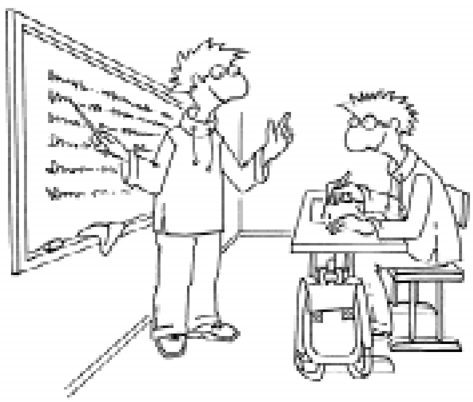
• При условии, что знаменатель левой части отрицателен, умножают данное неравенство на $\log_4(2x+9)$, сменив знак неравенства на противоположный. Решают и эту систему.

• Объединяют решения обеих систем.

При выполнении алгоритма учеников может удивить тот факт, что одна из составленных систем не имеет решения. Значит, что-то не учтено и проделана лишняя работа по составлению системы, решение которой пусто. Что можно было заметить до осуществления выбранного хода решения? Во-первых, логарифм числителя определен при $x\ge 3$, но при этом условии логарифм, стоящий в знаменателе, не только не теряет смысла, но и положителен, так как при $x\ge 3$ выполняется неравенство: $1<4<2x+9$. Именно поэтому та система, в которой было записано условие $\log_4(2x+9)<0$, не имела решения. Но можно было заметить еще и следующее. Левая часть данного неравенства представляет собой формулу перехода к другому основанию, поэтому можно сразу же записать, что при условии $x\ge 3$ выражение $\frac{\log_4(3x-9)}{\log_4(2x+9)}$ равно $\log_{2x+9}(3x-9)$. В силу того, что $2x+9>1$, полученное неравенство приводит к системе: $\begin{cases}x\ge 3,\\ 3x-9\le 2x+9\end{cases}$.

Это решение короче и проще предыдущего. Но, для того чтобы на него «натолкнуться», нужно охватить условие как единое целое. М. Вертгеймер назвал это переходом *от слепоты к пониманию*. Наверное, не всякому ученику посчастливится выйти на такое решение. Нужна удача, а также и неспешность в выполнении задания. Вот почему лучше решить меньшее количество, но внимательно отнестись к каждому выполняемому заданию.

Мы рассмотрели примеры выполнения ориентировочной части в деятельности по решению задачи. Что касается контрольно-коррекционной части, то со стороны ученика было бы в высшей степени неразумно отдавать функцию контроля исключительно в руки учителя. Это позиция *обучающегося*, но не учащегося. Учащийся – тот, кто учит себя сам. Если ученик ждет одобрения учителя, а сам при этом не имеет ни малейшего понятия о качестве произведенной им работы, то приходится признать, что мы, учителя, ничему его не научили. Самоконтроль должен быть более значим для ученика, чем контроль учителя.



Учащийся — тот, кто учит себя сам.

Что должен включать в себя самоконтроль? Так же, как и в случае учительского контроля, ученик должен иметь в своем распоряжении методы оценки правильности полученного ответа. В одних случаях проще сделать проверку с помощью калькулятора. Более того, ничего страшного не случится, если ученик будет знать ответ заранее. Главное – *как* получить правильный ответ, какие действия предпринять, как доказать адекватность действий полученному заданию. Если учителя будут интересовать исключительно ответы, его извинит только то, что он проводит экспресс-проверку по *разобранным* заданиям, и его не волнует ход решения только потому, что он был обсужден предварительно. Но в других случаях хотелось бы, чтобы учитель услышал от ученика хотя бы слово в подтверждение правильности выбранного хода решения.

Одна из составляющих самоконтроля – рефлексия деятельности. Задание выполнено. Ответ получен. Но это еще не все. Было бы полезно приучить учащихся возвращаться к заданию и рассматривать после решения всевозможные случаи формулировки похожего задания, для того чтобы убедиться, что он умеет решать не только заданную конкретную задачу, но и весь возможный спектр задач, связанных между собой либо идеей решения, либо математическим содержанием. Это может быть, например, обобщение решенной задачи или ее равнозначные варианты. Покажем сказанное на примере.

3. Найти область определения функции $\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{(x+1)(x-2)}$ (самостоятельная работа по теме «Область определения функции», вариант 1).

Подобные задания есть в любом учебнике. Их решение не вызывает трудностей. Но в качестве дополнительных размышлений можно задать себе следующие вопросы: при сохранении всех компонентов в структуре задания (дроби, корня четной степени, двух линейных множителей) можно ли получить в ответе:

а) пустое множество?

б) все множество действительных чисел?

в) одноэлементное множество?

г) дискретное конечное множество?

д) интервалы? полуинтервалы? отрезки? открытые лучи? закрытые лучи? если «да», то в каком количестве?

Можно ли перечислить все различные случаи? Полезно устроить соревнование между группами по составлению примеров на каждый из перечисленных случаев.

Одна из функций самоконтроля – установление границы между знанием и незнанием. Еще раз процитируем А.В. Хуторского [1]: «Компонентами эвристического диалога являются, например, умения учащихся отделять знание от незнания, составлять целеполагательный вопрос, умения рассматривать несколько точек зрения на природу объекта и создавать собственное знание, умения искать, преобразовывать, передавать информацию, доказывать, опровергать утверждения, составлять эвристические задания, диалоги и др». Рассмотрим следующий пример.

4. Определите функцию f так, чтобы функция $y=\begin{cases} f(x), x\le 0, \\ 4x+8, x>0 \end{cases}$ *была*

а) четной; б) нечетной (самостоятельная работа по теме «Четность и периодичность», вариант 1, задание 2).

Задача сводится к доопределению кусочной функции, в которой границей областей определения двух разных функций является число 0. В случае получения четной функции проблем нет. Строим график функции для $x>0$, отображаем его симметрично относительно оси ординат в левую полуплоскость и задаем полученный таким образом график для $x<0$ формулой. Точка графика с абсциссой, равной нулю, соединяет оба куска в одну непрерывную линию.

Для того, чтобы построить нечетную функцию, нужно отобразить график функции, заданной для строго положительных чисел, симметрично относительно начала координат. При симметрии открытый луч переходит в открытый луч. Но тогда в точке 0 функция не будет определена. Как ее определить для $x = 0$? В данном примере проблема в том, что в точке $x = 0$ функция не является непрерывной, и сделать ее такой не представляется возможным, значит, вопрос доопределения данной функции в точке 0 остается пока открытым.

Обращаясь к определению нечетной функции, учащийся начинает понимать, что воспринимал это определение формально. Как, например, выглядит условие для $f(-x) = -f(x)$? Что означает число (– 0)? Такого числа нет. Нуль не является ни положительным, ни отрицательным числом. Значит, для нуля условие нечетности функции будет выглядеть по-другому благодаря тому, что $0 = -x = x$: $f(0) = -f(0)$, или $2f(0) = 0$, откуда $f(0) = 0$. Последнее равенство отвечает на вопрос, каким должно быть значение любой нечетной функции в точке 0 (если в этой точке функция определена). График нечетной функции, определенной в точке 0, но не являющейся в ней непрерывной, представляет собой две симметричных относительно начала координат кривых (или два открытых луча) и изолированной точки $O\,(0;\ 0)$. Искомая функция $f(x)$ выглядит в данном примере таким образом: $f(x) = \begin{cases} 4x - 8, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Если учащемуся предложен подобный вариант, и решающий не догадывается задать себе вопрос, как найти функцию $f(x)$, если она, по условию, должна быть определена на *открытом* правом или левом луче $x > 0$ или $x < 0$, то ему стоит дать и другой вариант рассматриваемой самостоятельной работы, где как раз этот случай и предусмотрен. В общем виде он формулируется так: «Пусть в кусочной функции $y = \begin{cases} f(x), & x > 0\ (x < 0), \\ g(x), & x \le 0\ (x \ge 0), \end{cases}$ функция $g(x)$ известна. Определить функцию $f(x)$ так, чтобы функция y была нечетной». Задача будет иметь решение, если $g(0) = 0$. Если же $g(0) \ne 0$, нечетную функцию получить невозможно.

Идея предлагать учащимся (особенно тем, кто раньше других справился с работой) не один вариант проверочной работы, хороша тем, что в этом случае перед учащимся разворачивается более или менее полный спектр возможных случаев, различающихся способом решения, результатом решения, подходом к решению и т. д.

Таким образом, этап подготовки к контрольной работе, заключающийся в разборе заданий самостоятельной работы, важен тем, что здесь не столько решаются сами предложенные задания, сколько обсуждаются подходы к решению, способы решения, варианты задачи. Именно на самостоятельной работе, где предполагается активное обращение учеников к учителю, к товарищам, уточняются и корректируются полученные знания.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Темы контрольных работ:
1. Целые числа.
2. Многочлены.
3. Комбинаторика.
4. Степени.
5. Логарифмы.
6. Корни, степени, логарифмы.
7. Исследование квадратичной функции.

В отличие от самостоятельных работ, построенных на традиционном школьном материале, список тем контрольных работ более интересен. Обсудим решения некоторых заданий по темам «Целые числа», «Многочлены», «Комбинаторика».

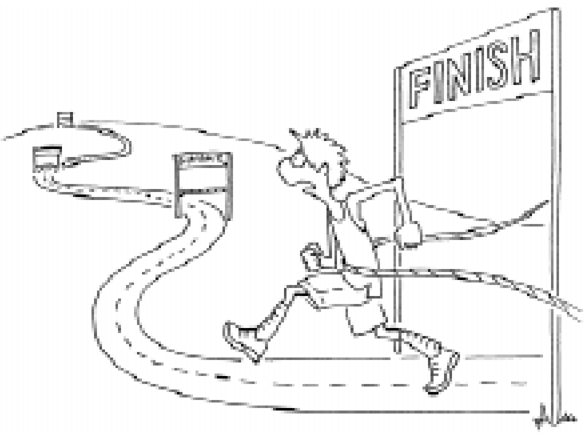
1. Найдите наименьшее четырехзначное число, делящееся на 128 (контрольная работа по теме «Целые числа», вариант 1, задание 1).

Учащийся может найти ответ устно. Эта задача посильна и пятикласснику. В этом случае учитель проверяет у него быстроту реакции, чувство числа, сообразительность. В тексте задачи рассматриваемой контрольной работы нет указаний на то, насколько полными должны быть рассуждения при решении задачи. Если важен только ответ, то игнорируем способ его получения (кро-

Рис. 2

ме списывания) и считаем задачу решенной даже при полном отсутствии записи решения. Если проверяется умение применять компьютерные инструменты, в распоряжении учащихся инструмент деления с остатком (см. рис. 2).

Деление наименьшего четырехзначного числа на 128 дает частное, равное 7. Так как остаток от деления одного числа на другое неотрицателен и меньше делимого, то увеличение неполного частного на 1 гарантирует получение наименьшего четырехзначного числа, кратного 128. Для получения искомого числа нужно к делимому прибавить разницу между делителем 128 и остатком 104, то есть выполнить устно следующие действия: 1000 + (128 – 104) = 1024. Запись последней строки можно считать решением задачи при твердой уверенности учителя в том, что ученик пользовался инструментом деления с остатком (если, например, контрольная работа проводилась в мобильном компьютерном классе, где на каждой парте – ноутбук). Но в целях воспитания математической культуры и культуры мышления учащихся нужно добиваться того, чтобы они предоставляли полный текст логических рассуждений, преобразуя математическую модель, составленную по условию задачи. Кроме того, даже при решении такой легкой задачи, как эта, деятельность учащегося должна быть осознана им самим. Это значит, что в тексте решения должны проявиться все этапы его деятельности. Факт составления модели свидетельствует о том, что учащийся начинает свою работу с целеполагания.



... предлагать учащимся (особенно тем, кто раньше других справился...) не один вариант проверочной работы...

Рассуждения могут быть такими. Положительные числа, делящиеся на 128, имеют вид $128 \cdot n$, где n – натуральное число. Так как искомое число – четырехзначное, то задача сводится к нахождению наименьшего элемента подмножества натуральных чисел, удовлетворяющего неравенству

$$1000 \le 128 \cdot n < 10000 . \qquad (1)$$

Очевидно, множество целых чисел, заданное неравенством (1), непусто, упорядочено, ограничено снизу и дискретно, значит, оно имеет наименьший элемент, то есть исходная задача имеет решение. Так как нас интересует только нижняя граница этого множества, можно ограничиться рассмотрением неравенства $128 \cdot n \ge 1000$, решением которого является множество натуральных чисел, принадлежащих лучу $\left[\frac{1000}{128}; +\infty\right)$, или, что то же самое, лучу $\left[7\frac{13}{16}; +\infty\right)$. Наименьшее из них равно 8. Число $128 \cdot 8 = 1024$ является *наименьшим* четырехзначным числом, *кратным* числу 128. Задача решена.

Рефлексивный анализ решения приводит к следующему выводу: если при некотором натуральном m множество натуральных чисел, удовлетворяющих математической модели (1), непусто, то, ввиду его упорядоченности, дискретности и ограниченности можно сформулировать задачу нахождения не только наименьшего, но и наибольшего его элемента. Исходная задача будет звучать так: «Найти наибольшее n-кратное число, делящееся на m». Можно воспользоваться также и тем, что множество, определенное условием (1), конечно, тогда получаем такой вариант задачи: «Сколько n-значных чисел делятся на m?». В зависимости от m решение может быть и пустым, но по условию задачи это будет видно сразу.

2. Найдите наибольшее пятизначное число, которое при делении на 67 дает остаток 46.

Математическая модель, составленная по условию задачи, будет иметь вид:

$$10000 \le 67n + 46 < 100000 \cdot$$

После вычитания из всех частей двойного неравенства числа 46 задача сводится к предыдущей.

3. Разложите рациональное число $\frac{51}{19}$ *в конечную непрерывную дробь. Выпишите подходящие дроби для разложения* $\frac{51}{19}$ (контрольная работа по теме «Целые числа» вариант 1, задание 3).

Для разложения дроби в конечную непрерывную применим алгоритм Евклида. Неполные частные в алгоритме Евклида являются членами непрерывной дроби. Можно найти неполные частные «вручную», так как имеем дело с небольшими числами, но можно продемонстрировать умение пользоваться компьютерными инструментами, встроенными в ИУМК (см. рис. 3).

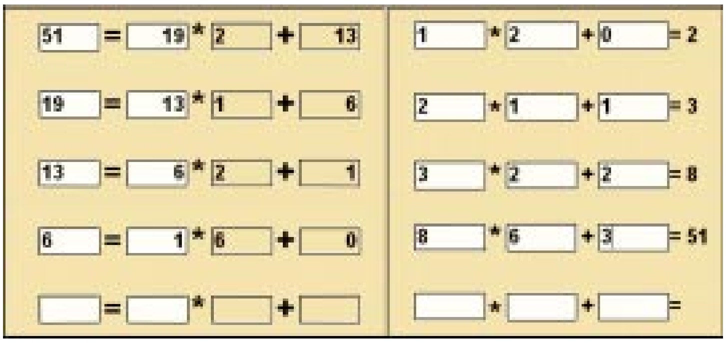


Рис. 3

В третьем столбце таблицы, находящейся слева, вычислены неполные частные, или члены непрерывной дроби, что дает возможность записать разложение данной дроби в конечную непрерывную:

$$\frac{51}{19} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}}}.$$

В таблице справа подсчитаны числители подходящих дробей (они стоят после знака равенства): 2, 3, 8, 51.

Воспользуемся этим же инструментом для вычисления знаменателей (см. рис. 4).

Знаменатели подходящих дробей: 1, 1, 3, 19.

Таким образом, получены следующие подходящие дроби: $\frac{2}{1}; \frac{3}{1}; \frac{8}{3}; \frac{51}{19}$.

При решении задачи без использования инструментов для вычисления подходящих дробей используем алгоритмы нахождения их числителей P_n и знаменателей Q_n:

$$P_{n+1} = P_n \cdot a_{n+1} + P_{n-1},$$
$$Q_{n+1} = Q_n \cdot a_{n+1} + Q_{n-1},$$

где P – числитель подходящей дроби, Q – знаменатель, a – член непрерывной дроби, n – номер подходящей и непрерывной дроби. Для удобства все вычисления заносим в таблицу (табл. 1).

4. Остаток от деления некоторого числа на 5 равен 1, а от деления на 4 равен 3. Найдите остаток от деления этого числа на 20 (контрольная работа по теме «Целые числа», вариант1, задание 4).

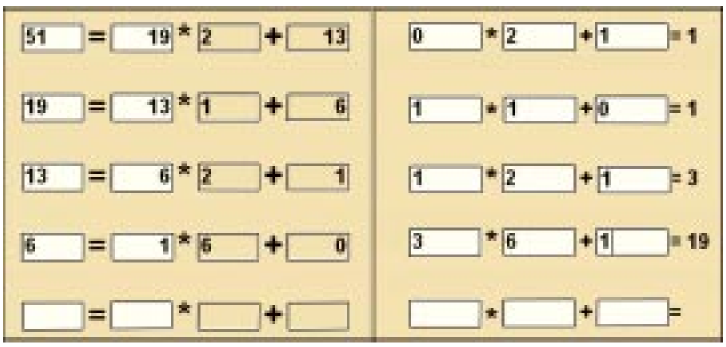


Рис. 4

Табл. 1

Номер n	–1	0	1	2	3	…
Члены непрерывной дроби a_n			a_1	a_2	a_3	…
Числитель подходящей дроби P_n	0	1	P_1	P_2	P_3	…
Знаменатель подходящей дроби Q_n	1	0	Q_1	Q_2	Q_3	…

Предположим, что ученики не решали раньше такие задачи, и им предстоит самим найти решение. С чего начать? Самый нерациональный способ, к тому же способ, не требующий знаний – составить два списка чисел, удовлетворяющих первому и второму условию задачи и выбрать из них общие, не меньшие 20. Достаточно найти одно такое число. Затем делим найденное число на 20 и получаем остаток.

Недостаток этого способа решения в том, что при больших числах он неэффективен. Попробуем придумать другой способ.

По условию, при делении данного числа (пусть *N*) на 5 в остатке получается 1. Нетрудно записать это условие: $N = 5q_1 + 1$. При делении этого же числа на 4 в остатке получается 3: $N = 4q_2 + 3$. Запишем систему:

$$\begin{cases} N = 5q_1 + 1, \\ N = 4q_2 + 3. \end{cases}$$

Нужно найти остаток *r* в равенстве:

$$N = 20q_3 + r. \qquad (1)$$

Обратим внимание на то, что $20 = 5 \cdot 4$. Из этого следует, что равенство вида (1) можно получить, если первое уравнение системы умножить на 4, второе на 5 и из нового второго уравнения вычесть новое первое. Получим: $N = 20(q_2 - q_1) + 11$. Так как в последнем равенстве число 11 неотрицательно и меньше 20, то оно и является искомым остатком.

Заметим, что в задаче не нужно находить число *N*. Таких чисел бесконечное множество, но все они при делении на 20 дают в остатке 11.

Будет ли второй способ решения задачи обобщенным, то есть пригодным для любых данных задачи? Для ответа на вопрос поинтересуемся, что предлагают другие варианты контрольной работы. В варианте 4 задача сформулирована так: «Остаток от деления некоторого числа на 9 равен 2, а от деления на 14 равен 3. Найдите остаток от деления этого числа на 126».

Составляем систему уравнений по условию задачи:

$$\begin{cases} N = 9q_1 + 2, \\ N = 14q_2 + 3. \end{cases}$$

Убеждаемся в том, что $9 \cdot 14 = 126$, и действуем так же, как и в предыдущей задаче, умножая первое уравнение системы на 14, второе на 9, затем из первого уравнения вычитаем второе:

$$(14 - 9)N = 126(14q_1 - 9q_2) + 1, \text{ или}$$

$$5N = 126t + 1.$$

Последнее равенство можно записать в виде сравнения:

$$5N \equiv 1 \pmod{126} \equiv 1 + 4 \cdot 126 \pmod{126} \equiv$$

$$\equiv 505 \pmod{126},$$

откуда $N \equiv 101 \pmod{126}$, что означает следующее: число *N* при делении на 126 дает остаток 101.

Итак, эта задача отличается от предыдущей только тем, что добавляется еще один этап рассуждений. Последний способ решения, очевидно, и будет общим для всех задач этого типа.

5. Известно, что $8x = x^2 - 9$. *Вычислить* $x^4 - 9x^3 + x^2 - 7x - 1$ (контрольная работа по теме «Многочлены», вариант 1, задание 1).

Требование задачи – «вычислить». Что можно вычислить, если дан многочлен? Очевидно, его значение при каком-то значении аргумента. Но это значение в условии задачи не указано явно.

Какую роль в задаче играет равенство $8x = x^2 - 9$? Тождество ли это? Очевидно, нет. При каких значениях *x* выражение $8x$ равно выражению $x^2 - 9$? Чтобы это узнать, достаточно решить квадратное уравнение $x^2-8x-9=0$. Его корни –1 и 9. Таким образом, значения переменной x, для которых нужно вычислить значение данного многочлена, заданы с помощью квадратного уравнения и равны –1 и 9. Вычислим эти значения, пользуясь схемой Горнера (см. рис. 5).

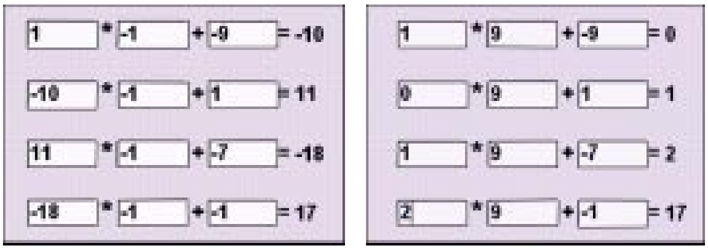


Рис. 5

Или можно сделать то же самое «вручную» (см. табл. 2).

Задача решена, ответ получен. Но возникает вопрос: почему в двух разных точках значения многочлена оказались равными? Случайность ли это? Изменим условие задачи: возьмем другое квадратное уравнение, например $x^2-3x+2=0$. Его корни 1 и 2. Вычислим значение данного многочлена в этих точках (см. табл. 3).

Полученные значения не равны друг другу, но задача решение имеет. Каким же свойством обладает данный многочлен по отношению к условию задачи $8x=x^2-9$? Разделим его на трехчлен x^2-8x-9 с остатком:

$$x^4-9x^3+x^2-7x-1=$$
$$=\left(x^2-8x-9\right)\left(Ax^2+Bx+C\right)+Dx+E\,.\ (1)$$

Для определения коффициентов A, B и C умножим вначале один трехчлен на другой. Для удобства будем умножать столбиком только их коэффициенты:

		1	–8	–9
		A	B	C
		C	$–8C$	$–9C$
+	B	$–8B$	$–9B$	
A	$–8A$	$–9A$		
A	$B – 8A$	$C – 8B – 9A$	$–8C–9B$	$–9C$

Приравнивая коэффициенты левой и правой части равенства (1), получаем систему:

$$\begin{cases}A=1,\\ B-8A=-9,\\ C-8B-9A=1,\\ -8C-9B+D=-7,\\ -9C+E=-1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1,\\ B=-1,\\ C=2,\\ D=0,\\ E=17.\end{cases}$$

Оказывается, остаток представляет собой не двучлен, а число (так как D = 0), следовательно, при делении данного многочлена на трехчлен x^2-3x+2 он не зависит от значения x, *поэтому и получаются равные остатки*. Именно поэтому корни уравнения $x^2-8x-9=0$ дают одно и то же значение многочлена.

Так как решением задачи является остаток от деления данного многочлена на данный трехчлен, то удобнее получить ответ непосредственным делением многочлена на трехчлен столбиком.

Идея «вопрошания», точнее, самовопрошания, дает обильные плоды. Дело в том, что так же, как и познавательная потребность, вопрошание *ненасыщаемо*. Например, в данной задаче точку ставить рано. Можно ли подобрать какой-нибудь другой трехчлен для данного многочлена так, чтобы в нулях этого трехчлена многочлен давал одно и то же число? Если да, то сколько? Какими свойствами обладают подобранные многочлены (кроме, естественно, свойства их корней давать одно и то же значение дан-

Табл. 2

	1	–9	1	–7	–1
–1	1	–10	11	–18	17
9	1	0	1	2	17

Табл. 3

	1	–9	1	–7	–1
1	1	–8	–7	–14	–15
2	1	–6	–11	–29	–59

ного многочлена)? Сформулированные вопросы создают рабочее поле для композиции задач, обратных данной. Можно ли расширить круг вопросов по этой задаче или проблема исчерпана? Вопрос открытый.

Когда учитель создает ситуации, в которых возникают вопросы, он работает на развитие ученика как личности, а не только на выполнение учебной программы.

Остается невыясненным, в какое время всем этим заниматься? Во время контрольной работы уже поздно. Очевидно, во время подготовки к ней. Тогда она будет осмысленной и значимой для ученика как субъекта учения.

6. Найдите сумму коэффициентов многочлена $(x^2+4x-4)(x^4-5x^3-6x^2+2x+6)^2$ (контрольная работа по теме «Многочлены», вариант 1, задание 2).

Трудно не сделать ошибку, производя действия над многочленами непосредственно. Но можно выполнить упражнение гораздо проще. Прежде всего установим закономерности получения суммы коэффициентов при выполнении указанных действий. Не нарушая общности рассуждений, умножим трехчлен ax^2+bx+c на двучлен $dx+e$:

$$(ax^2+bx+c)(dx+e)=$$
$$=adx^3+(ae+bd)x^2+(be+cd)x+ce.$$

Сумма коэффициентов равна:

$$ad+ae+bd+be+cd+ce=$$
$$=d(a+b+c)+e(a+b+c)=(a+b+c)(d+e).$$

...так же, как и познавательная потребность, вопрошание ненасыщаемо.

Отсюда правило: для того, чтобы подсчитать сумму коэффициентов многочлена, который является результатом выполнения операций умножения и/или алгебраического сложения многочленов, достаточно произвести эти же операции только над коэффициентами. Выгода этого в том, что умножение многочленов производится почленно (каждый член одной скобки умножается на каждый член другой), после чего приводятся подобные, а при работе с числами удобнее и выгоднее сначала вычислить сумму в скобках, затем полученные результаты перемножить.

В применении к нашему заданию сформулированное правило дает следующий результат:

$$(1+4-4)(1-5-6+2+6)^2=1\cdot(-2)^2=4$$

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Темы индивидуальных домашних заданий:

1. Целые числа.
2. Многочлены.
3. Комбинаторика.
4. Исследование функций.
5. Показательная и логарифмическая функции.

Индивидуальные домашние задания дают больше возможностей для исследования, чем задания самостоятельных и контрольных работ. Они бывают более сложными и более интересными. Не все из этих заданий можно решить по алгоритму. Некоторые из них использование алгоритма допускают, но в измененной или незнакомой ситуации. Выполнение ИДЗ идеально для формирования компетенций учащегося, так как одно из определений компетенции – умение действовать в ситуации неопределенности. Этому способствует также то, что выполнение ИДЗ рассчитано на длительный срок, а сама работа выполняется не в классе. Можно возразить по поводу создания благоприятных условий для творчества. Некоторым учителям кажется, что домашняя обстановка и более широкие временные рамки выполнения ИДЗ не способствуют самостоятельности, так как создают комфортные условия для списывания или использования помощи взрослых (родителей, репетиторов и так далее). На самом деле все зависит от того, что и как проверяет учитель. Было бы замечательно, если бы учащиеся выступали с защитой ИДЗ как самостоятельно и *творчески* выполненной работы. За учебный год они должны сделать всего пять ИДЗ. По желанию учителя можно оставить из пяти четыре и запланировать защиту по одной на каждую четверть, лучше перед уходом учащихся на каникулы или в первые дни после них. На защиту могут выноситься именно те задания, выполнение которых и потребовало от ученика проявления креативности. Это может быть единственное задание, но такое, что его решение вышло далеко за рамки заданного вопроса.

ИДЗ допускают расширение и углубление программы, в том числе и самим учащимся. И в этом случае полученная дополнительная информация личностна, так как ее объем и содержание обусловлены потребностями самого ученика, а ситуация использования этой информации предусматривает ее переработку и переосмысление. Именно тогда она и превращается в знание.

Проиллюстрируем сказанное примером.

6. Определите A и B так, чтобы многочлен $Ax^4 - Bx^3 + 7x + 3$ *делился на* $(x+1)^2$.

Решение базируется на следующем факте: данный многочлен разделится на $(x+1)^2$ тогда и только тогда, когда (–1) будет его двойным корнем. Использование схемы Горнера (см. табл. 4) приводит к системе $\begin{cases} A+B-4=0 \\ -4A-3B+7=0 \end{cases}$, решением которой является пара чисел (–5; 9).

Послушный ученик на этом бы и остановился. В данном случае прилагательное «послушный» имеет отрицательный смысл, потому что подчеркивает отсутствие инициативы. Находчивый, но ленивый может нам, учителям, сказать: «Каков вопрос, таков ответ». И это будет справедливо, если

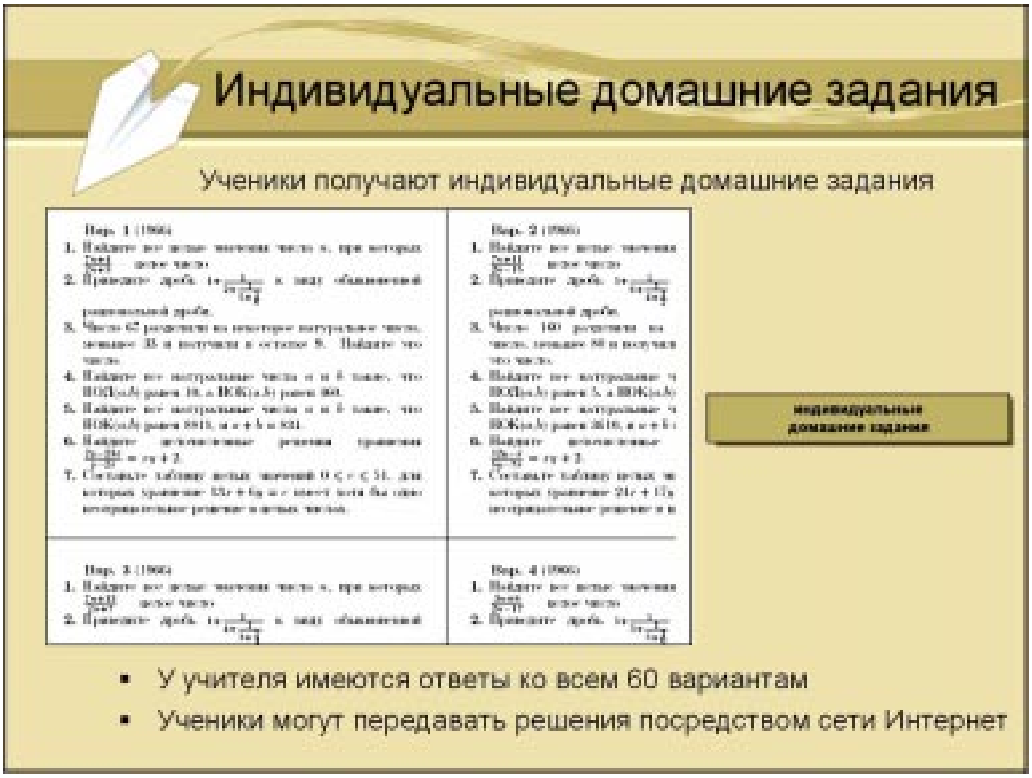


Рис. 6

Табл. 4

	A	$-B$	0	7	3
–1	A	$-A-B$	$A+B$	$-A-B+7$	$A+B-4=0$
–1	A	$-2A-B$	$3A+2B$	$-4A-3B+7=0$	

мы не постараемся к тому времени так развить учеников, чтобы «вопрошание» вошло у них в привычку.

Вот за что можно «зацепиться» в этом задании. Что в нем случайно, а что принципиально? Попробуем сформулировать задачу более широко. Например, так. Дан многочлен, в котором некоторые коэффициенты неизвестны. При каких значениях этих коэффициентов число x_0 будет n-кратным корнем данного многочлена? Как при этом число n связано с числом неизвестных коэффициентов?»

Остановимся на последнем вопросе. Кратность корня определяет число уравнений в системе. Количество неопределенных коэффициентов – число неизвестных этой системы. Пусть число неизвестных равно числу уравнений системы, тогда она будет иметь единственное решение, если ее определитель равен нулю.

Если решать задачу в общем виде, то нужно уметь записывать и систему, и определитель. Постараемся понять, какой вид имеют остатки при делении многочлена на $(x-x_0)^n$. В этом случае схема Горнера будет иметь n строк. Пока у нас нет никаких предположений, поэтому начинаем с малого.

...домашняя обстановка и более широкие временные рамки выполнения ИДЗ не способствуют самостоятельности...

Пусть дан многочлен 5-й степени

$$M(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

Нужно найти коэффициенты этого многочлена, если известно, что x_0 – корень кратности 5. Используем схему Горнера для нахождения уравнений будущей системы (см. табл. 5).

Заполняя ячейки таблицы, учащиеся подмечают закономерности появления коэффициентов. При каждом a_i они равны элементам треугольника Паскаля. Но есть и более глубокая закономерность. Остатки $r_i(x_0)$ в системе уравнений

$$\begin{cases} f(x_0)=(x-x_0)q_1(x_0)+r_1(x_0),\\ q_1(x_0)=(x-x_0)q_2(x_0)+r_2(x_0),\\ q_2(x_0)=(x-x_0)q_3(x_0)+r_3(x_0),\\ q_3(x_0)=(x-x_0)q_4(x_0)+r_4(x_0),\\ q_4(x_0)=(x-x_0)q_5(x_0)+r_5(x_0) \end{cases}$$

представляет собой следующее:

$$r_1(x_0)=\frac{1}{0!}f(x_0),$$
$$r_2(x_0)=\frac{1}{1!}f'(x_0),$$
$$r_3(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0),$$
$$r_4(x_0)=\frac{1}{3!}f'''(x_0),$$
$$r_5(x_0)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(x_0).$$

Таким образом, система, в которой неизвестными являются коэффициенты a_i, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{0!}f(x_0)=0,\\ \frac{1}{1!}f'(x_0)=0,\\ \frac{1}{2!}f''(x_0)=0, \Leftrightarrow\\ \frac{1}{3!}f'''(x_0)=0,\\ \frac{1}{4!}f^{(4)}(x_0)=0 \end{cases}$$

Табл. 5

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0	a_5	$a_5x_0+a_4$	$a_5x_0^2+a_4x_0+a_3$	$a_5x_0^3+a_4x_0^2+a_3x_0+a_2$	$a_5x_0^4+a_4x_0^3+a_3x_0^2+a_2x_0+a_1$	$a_5x_0^5+a_4x_0^4+a_3x_0^3+a_2x_0^2+a_1x_0+a_0=0$
x_0	a_5	$2a_5x_0+a_4$	$3a_5x_0^2+2a_4x_0+a_3$	$4a_5x_0^3+3a_4x_0^2+2a_3x_0+a_2$	$5a_5x_0^4+4a_4x_0^3+3a_3x_0^2+2a_2x_0+a_1=0$	
x_0	a_5	$3a_5x_0+a_4$	$6a_5x_0^2+3a_4x_0+a_3$	$10a_5x_0^3+6a_4x_0^2+3a_3x_0+a_2=0$		
x_0	a_5	$4a_5x_0+a_4$	$10a_5x_0^2+4a_4x_0+a_3=0$			
x_0	a_5	$5a_5x_0+a_4=0$				

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_5x_0^5+a_4x_0^4+a_3x_0^3+a_2x_0^2+a_1x_0+a_0=0, \\ 5a_5x_0^4+4a_4x_0^3+3a_3x_0^2+2a_2x_0+a_1=0, \\ 10a_5x_0^3+6a_4x_0^2+3a_3x_0+a_2=0, \\ 10a_5x_0^2+4a_4x_0+a_3=0, \\ 5a_5x_0+a_4=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Это уже лучше, чем использование схемы Горнера, потому что находить производные n-го порядка многочленов удобнее и проще.

Теперь, если мы хотим, чтобы система имела решение, причем единственное, нужно, чтобы число неизвестных было равно числу уравнений, а определитель системы был отличен от нуля. Пусть неизвестными будут все коэффициенты данного многочлена, кроме a_0. Определитель системы (*) равен x_0^5. При $x_0 \neq 0$ он отличен от нуля, и система будет иметь решение. Нетрудно подсчитать, что $a_5=-\dfrac{a_0}{x_0^5}$; $a_4=\dfrac{5a_0}{x_0^4}$; $a_3=-\dfrac{10a_0}{x_0^3}$; $a_2=\dfrac{10a_0}{x_0^2}$; $a_1=-\dfrac{5a_5}{x_0}$.

При $x_0=-1$ и $a_0=1$ результаты такие: $a_5=1$; $a_4=5$; $a_3=10$; $a_2=10$; $a_1=5$.

Как и следовало ожидать, получили коэффициенты разложения бинома $(x+1)^5$.

Обобщение для n-ой степени требует применения метода математической индукции. Очевидно, для нахождения коэффициентов разложения биномов n-ой степени такой способ нерационален. За комбинаторным методом явное преимущество. И все же, открыв секрет Полишинеля, мы рады тому, что поставленная задача оказалась частично решенной.

Горелик Людмила Борисовна,
учитель математики
МОУ лицей № 102 г. Челябинска.