Дубровский Владимир Натанович,
Поздняков Сергей Николаевич

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ШКОЛЕ. ЗАНЯТИЕ 4. ИЗМЕРЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ

На первый взгляд, кажется, что введение в информационную среду ученика инструментов для измерения геометрических величин не может оказать существенного влияния на процесс обучения математике. Действительно, хотя сделанные измерения и изменяются динамически вместе с изменением геометрических фигур, они являются приближёнными и записываются десятичными числами. В то же время задачи «на вычисления» в геометрии связаны с нахождением формульных зависимостей между параметрами геометрических фигур.

Педагогический эффект может быть достигнут соединением возможностей измерений различных геометрических величин и вычислений, которые можно производить с измеренными величинами, используя встроенный калькулятор. Особенностью этого калькулятора является то, что он не просто производит действия над числами, а фактически позволяет создавать формулы, параметрами в которых являются геометрические величины, измеренные непосредственно с помощью встроенных инструментов.

Поэтому вычисленные результаты также являются динамическими и меняются вместе с изменением параметров фигуры.

В результате можно рассмотреть следующий класс задач на вычисления.

На построенном динамическом чертеже измеряется ряд величин, которые рассматриваются как исходные данные. Ученику предлагается вычислить значение другого параметра, составляя с помощью встроенного калькулятора формулу, параметрами которой являются измеренные величины. Знаменательно, что ответ к задаче учителю готовить не надо – ведь измерить искомую величину можно непосредственно, а результат сравнить со значением, вычисленным по формуле. «Подгонка под ответ» исключается, если задача поставлена так, что исходный чертёж имеет свободные параметры и фигуру можно «пошевелить». Вероятность, что при этом все значения неправильно написанной формулы будут правильными, практически равна нулю.

Задачки, которые учитель берёт из традиционных учебников и задачников, могут не иметь свободных параметров. Но их легко преобразовать к нужной форме.

Например, рассмотрим две формулировки одной задачи:

«Дан ромб, длины диагоналей которого равны 3 и 5. Найти площадь ромба».

«Выразить площадь ромба через длины диагоналей».

С методической точки зрения они равноценны, однако вторая допускает верификацию ответа в динамической геометрии, а первая нет.

Другим методическим преимуществом является обретённая познавательная свобода ученика и новые возможности для методического творчества учителя. Ведь практически любой геометрический чертёж можно превратить в такую задачу. Она может быть простой или очень трудной, иметь одно или несколько решений, быть интересной или бессодержательной. Естественным образом возникают вопросы, связанные с недостатком или избытком исходных данных, появляется интерес к исследованию решения. Авторы рассчитывают, что эта статья даст импульс для творчества учителей, и мы ещё увидим интересные подборки таких задач и новые педагогические приёмы использования этой идеи.

А теперь перейдём к описанию инструментов измерений и вычислений.

ИНСТРУМЕНТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЙ

Сначала познакомимся с инструментами измерений и вычислений, использующихся в среде «Живая математика».

Нарисуем (и выделим отрезок). Если теперь открыть меню **Измерения**, то жирным шрифтом будут выделены все возможные измерения для выделенного объекта. Также мы увидим и другие команды измерений, которые находятся в неактивном состоянии (рис. 1).

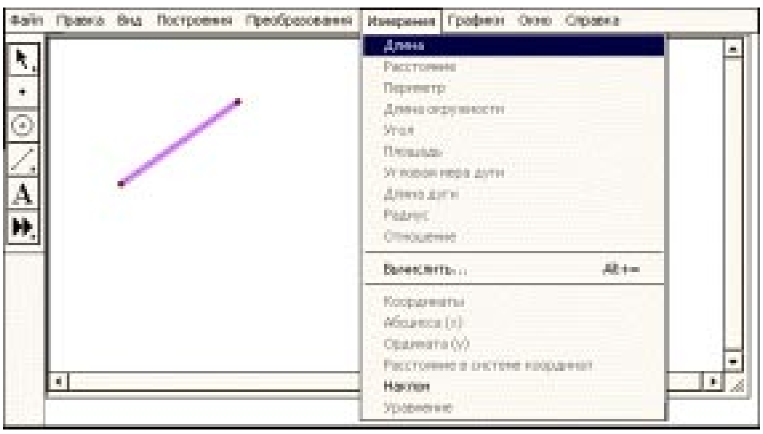


Рис. 1

Видно, что все команды этого меню делятся на три группы: команды для непосредственного измерения геометрических величин, команда вызова калькулятора и команды, связанные с аналитической геометрий (работа с координатным представлением геометрических объектов). Для отрезка можно выполнить команды по вычислению его длины и наклона по отношению к оси абсцисс (тогда автоматически будет введена система координат). Калькулятор доступен всегда, однако пока не вычислены никакие геометрические величины, можно делать вычисления только с числами, как на обычном калькуляторе.

Нетрудно проделать эксперименты и выяснить, что вычисляет каждая из команд:

Длина (отрезка или нескольких отрезков)

Расстояние (между двумя точками)

Периметр (многоугольника, для применения команды надо создать и выделить внутренность многоугольника) и т. д.

...

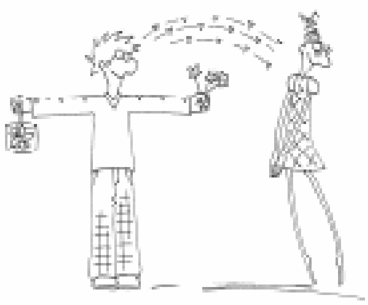
Угловая мера дуги (для применения команды надо выделить окружность и две точки – концы дуги – на ней).

Пример

Как и прежде, советуем максимально пользоваться своей интуицией для изучения действия команд. Например, попробуем догадаться, что делает команда **Отношение**.

Гипотеза первая. Команда вычисляет отношение длин двух отрезков.

Гипотеза вторая. Команда вычисляет отношение, в котором точка делит данный отрезок.



Проверим обе гипотезы. Оказывается, одна эта команда может выполнять обе функции (рис. 2)!

В первом случае построим и выделим два отрезка. Тогда команда вычислит отношение длины первого ко второму (имена вершин при этом выведутся автоматически, рис. 2*а*).

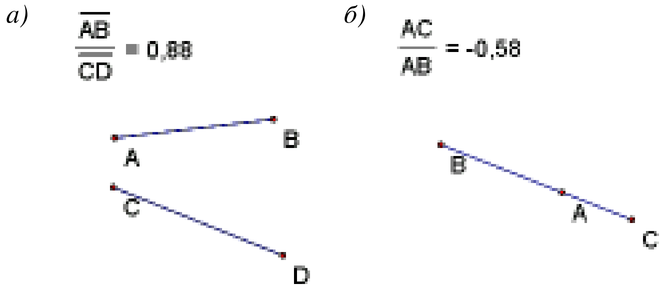


Рис. 2

Во втором случае построим отрезок и на нём точку. Выделим три точки в некотором порядке (всего 6 вариантов, сам отрезок выделять не надо). Теперь команда **Отношение** вычислит величину со знаком и даст имена точкам в том порядке, в котором они выделялись. На рис. 2*б* первой была выделена точка на отрезке, затем левый и правый концы отрезка. В результате получилось отношение частей исходного отрезка со знаком минус (фактически эта команда вычисляет коэффициент гомотетии с центром в первой выделенной точке, которая переводит вторую выделенную точку в третью. Отметим, что этот коэффициент будет отрицательным, если две последние точки лежат по разные стороны от центра).

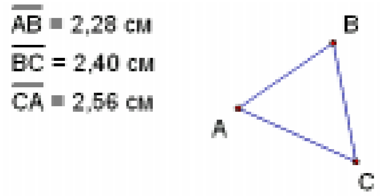


Рис. 3

Команду **Вычислить** рассмотрим на примере вычисления площади треугольника по формуле Герона.

Пример. Найти площадь треугольника по трём сторонам.

Шаг 1. Построим произвольный треугольник (построить и выделить три точки, затем выбрать команду **Отрезки** из меню **Построения**) и его внутренность (выделить вершины треугольника и выбрать команду **Внутренняя область** из меню **Построения**).

Шаг 2. Измерим длины сторон (можно найти все длины сразу, выделив стороны и вызвав команду **Длина** (рис. 3).

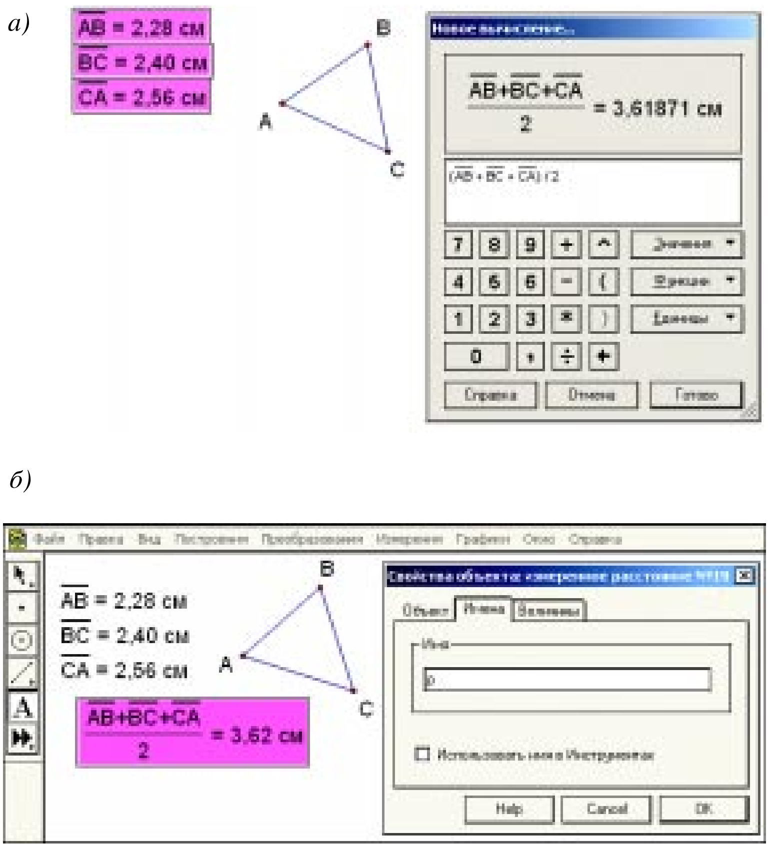


Рис. 4

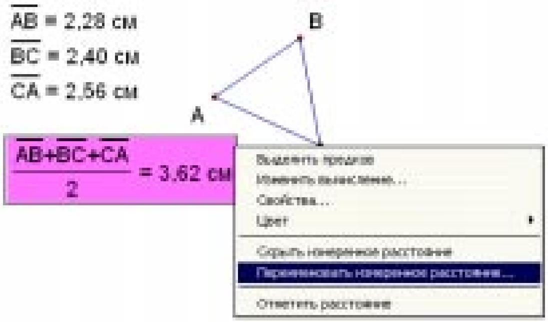


Рис. 5

Шаг 3. Применим формулу Герона к длинам сторон. Предварительно удобно вычислить полупериметр, чтобы использовать его в записи формулы Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

Для этого выберем команду **Вычислить** из меню **Измерения** и введём формулу полупериметра следующим образом (рис. 4).

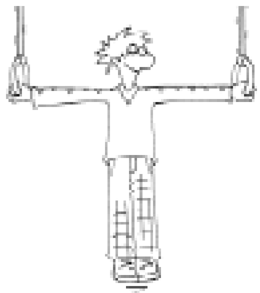
Наберём формулу с помощью клавиатуры калькулятора, вводя значения геометрических параметров с помощью щелчков мыши по ним на экране.

Для удобства обозначим выполненное вычисление буквой p, для этого выберем режим **Текст** (кнопка «А» вертикального меню) и дважды щёлкнем на вычислении, которое хотим переименовать. В полученном окне введём нужное имя.

Того же результата можно добиться, если щёлкнуть на вычислении правой кнопкой мыши и в появившемся выкидном меню выбрать команду **Переименовать...** (рис. 5). В заключение произведём вычисления по формуле Герона, используя как измеренные величины – длины сторон, так и вычисленные – в данном случае периметр p. Команду извлечения квадратного корня **sqrt** (square root) выберем с помощью выкидного меню **Функции** (рис. 6).

Для проверки ответа найдём площадь полученного треугольника непосредственным измерением и сравним со значением, вычисленным по формуле (выделим внутренность, а затем выберем команду **Площадь** из меню **Измерения**, рис. 7).

Кратко коснемся аналогичного инструментария среды «Математический конструктор». В текущей его версии (второй) меню измерений содержит лишь самые основные команды – измерения длины отрезка и расстояния между точками (одна команда), угла, площади многоугольника и круга (в следующей версии программы, содержащей операции над множествами – объединение, пересечение, разность – добавляется и команда измерения площади фигур, конструируемых с помощью этих операций). В окне вычислений доступны и некоторые дополнительные команды (например измерение ориентированной площади), предназ-



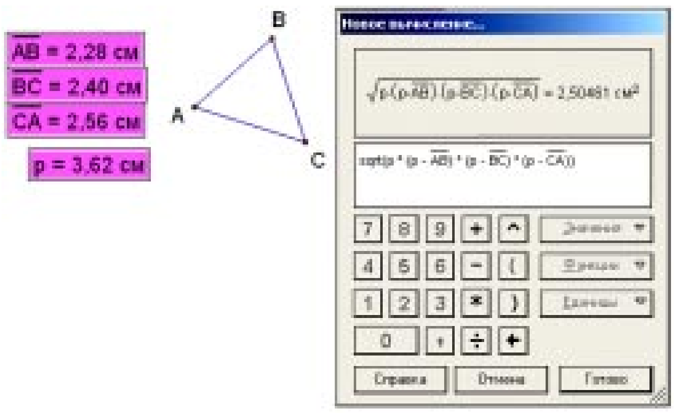


Рис. 6

наченные, скорее, разработчикам, чем широкому кругу пользователей. В остальном структура этого окна отличается от аналогичного окна «Живой математики», о котором говорится ниже, лишь дизайном (рис. 8). В соответствии с общим принципом, команды измерений можно использовать и как инструменты. Например, чтобы найти расстояние между двумя точками, можно выделить эти точки, а затем выбрать команду **Расстояние** в меню или, наоборот, выбрать команду, а затем щелкнуть на требуемых точках (если щелкнуть на пустом месте, то там появится и будет использована в измерении новая точка). Важным достоинством является возможность включения измеренной величины непосредственно в пояснительный текст.

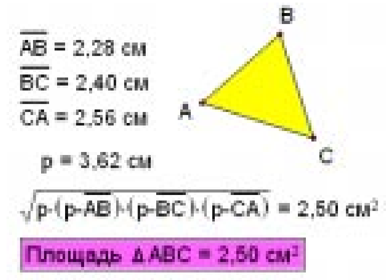


Рис. 7

ПРИМЕР САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ И ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ПОИСКУ ЕЁ РЕШЕНИЯ

Использование программ динамической геометрии позволяет вместе с решением геометрических задач на вычисление провести увлекательное исследование, связанное с постановкой таких задач, выдвижением гипотез, поиском решений и исследованием области применимости этих решений.

Основа этого методического приёма уже была изложена выше: возможность сравнить геометрическую величину, полученную прямым измерением, с вычислением её значения через другие величины. Для проверки правильности вычисления достаточно «пошевелить» исходные параметры. Если при этом измеренное и вычисленное значения меняются, но остаются равными, решение правильное. Если при некоторых значениях параметров наблюдается расхождение, то в этой области решение некорректно.

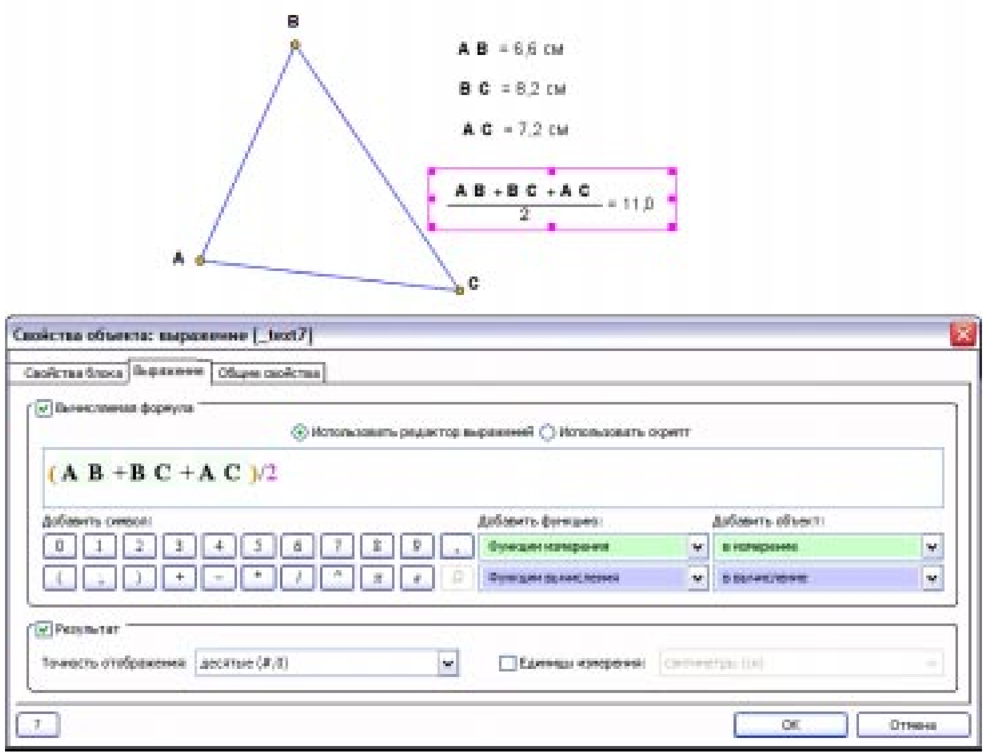


Рис. 8. Вычисление полупериметра в среде «Математический конструктор»

Замечание. Из способа проверки видно, что некоторые задачи являются неудобными для реализации такого подхода. Это «жёсткие» задачи, в которых искомое соотношение между параметрами достигается в единственном случае при конкретных значениях параметров.

Кратко эту методику можно представить следующим перечнем действий:

– строится динамический чертёж;

– делается несколько измерений геометрических величин, входящих в данный чертёж;

– выбирается некоторое множество измерений, которые рассматриваются в роли исходных данных;

– выбирается измерение, которое рассматривается в роли неизвестного и предположительно может быть выражено через исходные данные;

– ищется формула, выражающая неизвестное через исходные данные;

– корректность формулы проверяется её верификацией путём варьирования исходных данных и сравнения вычисленных по формуле значений неизвестного с измеренным значением.

Разумеется, полученная задача может оказаться слишком лёгкой или слишком трудной. Но придумывание красивой задачи даже с помощью динамической геометрии остаётся высоким искусством, и тем, что мы можем приобщить к нему учеников, мы обязаны появлению инструментов, подобных динамической геометрии.

Рассмотрим эту методику на примере.

Пример

Построим произвольную трапецию (как это сделать?), проведём в ней диагонали и отметим точку пересечения. В результате получаем чертёж с такими элементами: стороны, диагонали, отрезки диагоналей, углы трапеции, углы между диагоналями и углы между диагоналями и сторонами, а также треугольники, образованные сторонами трапеции и диагоналями или их частями. Среди этих элементов нужно выбрать исходные данные и «неизвестную» величину.

Рассмотрим, например, площади треугольников AOD и BOC в качестве исходных данных, а площадь треугольника COD в качестве неизвестной величины. Для этого надо создать внутренние области треугольников и измерить их площади (рис. 9).

Попробуем выразить последнюю площадь через первые две.

Полезно вести работу по двум направлениям – подходам:

– теоретический подход (запись соотношений для площадей, использование соображений подобия);

– экспериментальный подход (рассмотрение частных случаев и выдвижение гипотез о предположительном ответе).

Обсудим эксперименты, приводящие к гипотезе (в соответствии с рекомендациями известной книги Пойа «Как решать задачу»).

Рассмотрим два крайних случая – трапеция приближается к прямоугольнику или параллелограмму. В этом случае площади всех трёх треугольников равны. И площадь последнего может быть выражена, например, как среднее арифметическое первых двух (рис. 10).

Однако это противоречит данным рисунка 9!

Тогда приходит мысль поставить целенаправленный эксперимент так, чтобы одна из исходных площадей не менялась, тогда при изменении другой, мы сможем наблю-

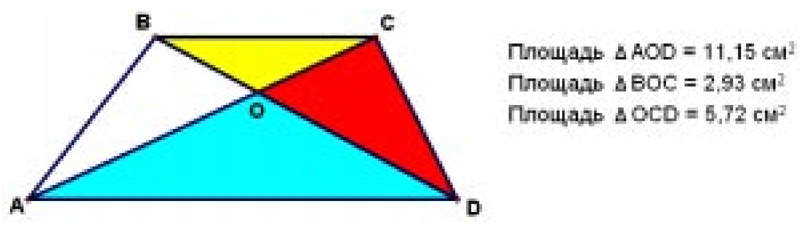


Рис. 9

дать характер её влияния на искомую величину.

Этого мы можем добиться с помощью преобразования подобия, делая его так, чтобы после него площадь треугольника OBC становилась, например, единичной. Для этого достаточно поделить все площади на площадь треугольника OBC (рис. 11).

Теперь нетрудно заметить закономерность: зависимость площади AOD от площади OCD квадратичная. Нас же интересует обратная зависимость, которая, таким образом, определяется через квадратный корень. Понятно, что если площадь треугольника AOD будет равна 1, то такая же зависимость будет между OCD и BOC.

Теперь уже можно выдвинуть гипотезу: площадь треугольника OCD есть среднее геометрическое площадей AOD и BOC. В этом нетрудно убедиться экспериментально (рис. 12).

На этом экспериментальный этап заканчивается и нужно переходить к теоретическому обоснованию. Даже если его сделает учитель, педагогический эффект будет сильным, так как ученики мотивированы к обоснованию полученной экспериментально формулы.

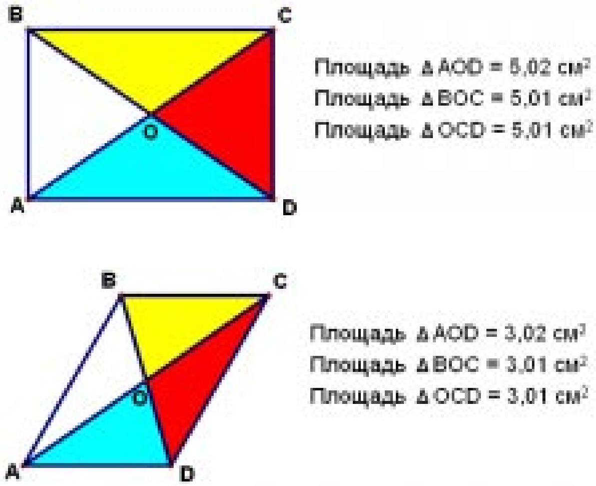


Рис. 10

Вот один из вариантов обоснования:

Выразим площади рассматриваемых треугольников по известной формуле:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\angle AOD,$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\angle BOC,$$

$$S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\angle COD.$$

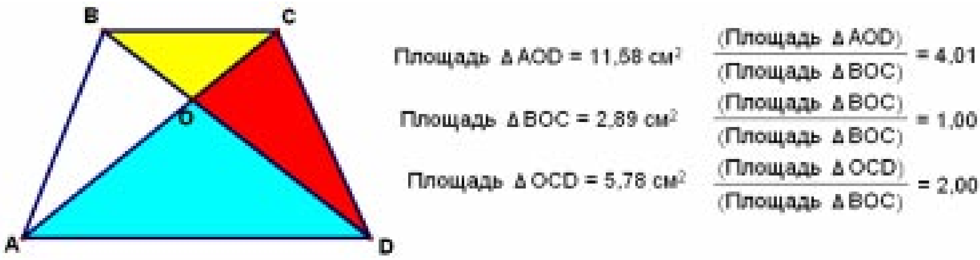


Рис. 11

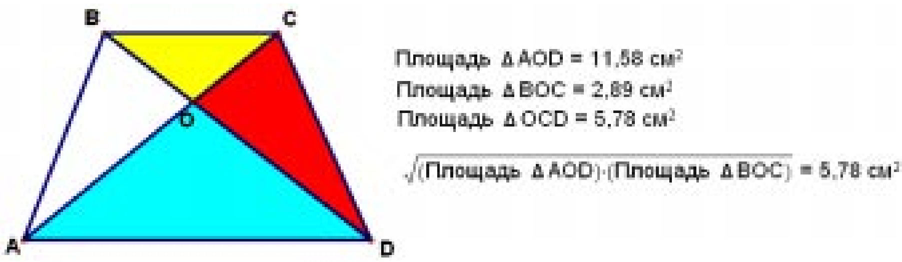


Рис. 12

Тогда

$$\sqrt{S_{\Delta AOD} \cdot S_{\Delta BOC}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\angle AOD \cdot \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\angle BOC} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{AO \cdot BO \cdot OD \cdot OC} \cdot \sin\angle AOD, \qquad (*)$$

в силу того что углы AOD и BOC равны как вертикальные.

Из подобия треугольников AOD и BOC следует, что

$$AO/OC = OD/BO$$

или

$$AO \cdot BO = OD \cdot OC.$$

Продолжая выкладку (*), получаем:

$$\sqrt{S_{\Delta AOD} \cdot S_{\Delta BOC}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{AO \cdot BO \cdot OD \cdot OC} \cdot \sin\angle AOD =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(OD \cdot OC)^2} \cdot \sin\angle AOD =$$

$$= \frac{1}{2} OD \cdot OC \cdot \sin\angle COD = S_{\Delta OCD},$$

так как синусы углов AOD и COD равны.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Исследуйте работу команды **Длина дуги**:

а) постройте сначала дугу на окружности, а потом измерьте её длину;

б) укажите окружность, две точки на ней и измерьте дугу по этим данным.

Есть ли различие в результатах?

2. Исследуйте работу команды **Угловая мера дуги**, используя два описанных выше приёма:

а) в каких пределах изменяется мера дуги при движении концов дуги по окружности?

б) в меню **Правка** выберите пункт **Настройки / Единицы** и попробуйте разные единицы измерения углов; как это повлияет на угловую меру дуги?

в) постройте дугу по трём точкам, найдите её угловую меру и проследите за её изменением при изменении положений исходных точек.

3. Укажите дугу и по ней постройте сектор и/или сегмент. Какие их параметры можно измерить?

4. Постройте дугу на окружности, измерьте её длину, угловую величину, длину хорды, соединяющей концы дуги, площади сегмента и сектора, опирающегося на эту дугу, а также радиус окружности.

а) перечислите наборы измерений, которые определяют остальные наборы;

б) для каких наборов такие вычисления могут быть сделаны с использованием арифметических операций и элементарных функций (то есть с помощью встроенного калькулятора), а для каких этого сделать не удастся?

5. Разработайте сюжет, связанный с определением длины окружности как предела периметров вписанных правильных многоугольников.

Дубровский Владимир Натанович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова,

Поздняков Сергей Николаевич, доктор педагогических наук, профессор кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ «ЛЭТИ».