Дубровский Владимир Натанович,
Поздняков Сергей Николаевич

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ШКОЛЕ. ЗАНЯТИЕ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Важнейшая роль, которую играют преобразования в геометрии, была выявлена немецким математиком Феликсом Клейном в его знаменитой «Эрлангенской программе» (1872), где он следующим образом ответил на вопрос «что такое геометрия?»: «Геометрия изучает свойства фигур, инвариантные относительно той или иной группы преобразований».[1] Например, геометрия, которую мы проходим в школе, изучает свойства фигур, не изменяющиеся при движениях, то есть преобразованиях, не меняющих расстояний между точками. Действительно, равные фигуры обладают совершенно идентичными с точки зрения геометрии свойствами, а равенство фигур и означает, что их можно совместить движением. Более пристальный анализ показывает, что две фигуры «геометрически одинаковы» и в том случае, если они подобны. Поэтому будет несколько точнее сказать, что евклидова геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при преобразованиях подобия, то есть преобразованиях, при которых все расстояния изменяются в одно и то же число раз. Движения – частный случай подобий; другой важнейший пример преобразования подобия – гомотетия или центральное подобие, при котором все точки передвигаются по прямым, проходящим через фиксированную точку – центр гомотетии, удаляясь от нее или приближаясь к ней в заданное число раз. Любое подобие является композицией (результатом последовательного выполнения) движения и гомотетии. Более подробно об этих преобразованиях и их роли в геометрии можно прочитать в классической книге И.М. Яглома «Геометрические преобразования. Т. 1», которая имеется в интернет-библиотеке Московского центра непрерывного математического образования (http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/yaglom/tom1.htm). Отметим, что в школьном курсе встречаются и другие геометрические преобразования. Так, при изучении изображений пространственных фигур главную роль играют параллельные проекции (композиции параллельных проекций образуют группу *аффинных преобразований*, определяющие так называемую аффинную геометрию), а изучение центральной проекции, перспективы, приводит к еще более общей геометрии – проективной. В программы для физико-математических школ и классов часто включают изучение еще одного вида преобразований – инверсии.

В результате реформы курса математики, начатой в 60-е годы прошлого века

[1] Справедливости ради надо сказать, что современное понимание этого предмета несколько шире.

А.Н. Колмогоровым, геометрические преобразования вошли в школьный курс геометрии. В учебнике Колмогорова они играли ключевую роль в построении курса. Учебники, пришедшие ему на смену, строятся на других идеях, но и в них более или менее подробно рассматриваются различные виды преобразований – при изучении симметрии фигур, при введении понятий равенства и подобия произвольных фигур (где обойтись без преобразований просто невозможно), при изучении некоторых методов решения задач, в первую очередь, задач на построение. Интересно, что первые математические (геометрические) доказательства, которые дал великий греческий учёный Фалес, основывались, как считают историки, как раз на преобразованиях, и лишь много позже, благодаря Евклиду, основным методом в геометрии стало рассмотрение равных или подобных треугольников. Но двухтысячелетнее влияние Евклида столь велико, что до сих пор преобразования представляются каким-то нововведением в классическую геометрию, едва ли не факультативным материалом. О сравнении фалесовского и евклидовского подходов можно прочитать в интересной статье В.Г. Болтянского «Движения» в «Энциклопедии для детей, т. 11, Математика» издательства «Аванта+».

Программы динамической геометрии открывают новые прекрасные возможности как для изучения преобразований самих по себе, так и для их применения к решению разнообразных задач. Как правило, в них имеется специальное меню с командами для выполнения параллельного переноса, поворота, осевой симметрии и гомотетии, а иногда и для некоторых других преобразований. Рассмотрим несколько примеров использования этих команд.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАК ИНСТРУМЕНТ ПОСТРОЕНИЙ

Как мы знаем, наряду с основными инструментами – циркулем и линейкой, программы динамической геометрии включают и «комбинированные» инструменты, заменяющие некоторые стандартные построения, выполнимые и с помощью основных инструментов, избавляющие нас от рутинных операций и экономящие нам время. На первый взгляд кажется, что и команды преобразований играют такую же вспомогательную роль. Однако это не совсем так. Рассмотрим простой пример.

Пусть даны три вершины A, B и C параллелограмма и соединяющие их стороны AB и AC (рис. 1). *Требуется достроить их до полного параллелограмма ABDC.*

Известно, что четырёхугольник, у которого противоположные стороны равны, является параллелограммом. Пользуясь этим признаком, можно построить четвертую вершину одним циркулем – как пересечение окружностей с центрами *B* и *C* и радиусами *AC* и *AB* соответственно (рис. 1 *а*). Обратите внимание, что построенные окруж-

а) *б)*

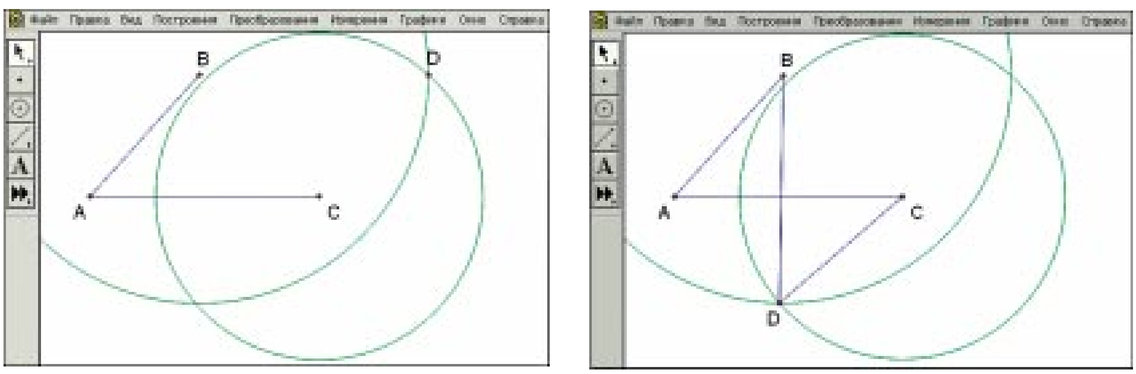


Рис. 1

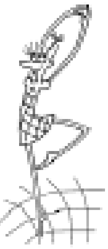
ности имеют две точки пересечения, и лишь одна из них дает параллелограмм. При построениях на бумаге это обстоятельство остается незамеченным – мы просто видим, какая из двух точек нам нужна, и берем ее. Но на динамическом чертеже оно становится существенным: при изменении данных, когда вершина B переходит через прямую AC, параллелограмм превращается в самопересекающуюся ломаную из четырех звеньев (рис. 1 *б*). Дело в том, что программа не знает, чем мы руководствуемся при выборе одной из двух точек, и пользуется при выборе точки своим собственным алгоритмом. Проблема снимается с помощью параллельного переноса: вершина D получается из B переносом на вектор $\overrightarrow{AC}$ (или из C переносом на $\overrightarrow{AB}$).

В данном случае можно было обойтись и без переноса, воспользовавшись параллельностью противоположных сторон параллелограмма и инструментом «Параллельная прямая», но сути дела это не меняет: если мы хотим, чтобы динамический чертеж правильно себя вел при изменении исходных данных, нужно при возможности использовать преобразования (а также аналитическое задание объектов).

Другая ситуация, в которой применяются инструменты преобразований – это построения, зависящие от численных параметров. Например, если нужно поделить отрезок в заданном отношении или умножить его на заданный коэффициент, мы применяем гомотетию; если нужно отложить угол данной величины, применяем поворот. А если нужно провести через данную точку строго горизонтальную прямую (для красоты чертежа), переносим эту точку на вектор с координатами вида (a; 0) и соединяем ее с ее образом.

Перейдем к примерам заданий, непосредственно связанных с преобразованиями.

ПОСТРОЕНИЕ ПАРКЕТОВ



Существуют разные определения паркета; здесь мы понимаем под этим термином разбиение плоскости на равные многоугольники, которое можно совместить само с собой параллельными переносами по крайней мере двух различных направлений. Задания на построение паркетов интересны для учеников, позволяют им проявить фантазию, допускают формулировки разной степени содержательности и сложности (можно предложить просто нарисовать паркет, а можно потребовать, чтобы его группа симметрий порождалась заданным набором движений), сочетают эстетическую привлекательность с глубокой теоретической подоплекой. А программы динамической геометрии избавляют эти задания от скучной чертежной рутины.

Для построения паркета нужно построить подходящий многоугольник (плитку паркета), а затем размножить ее параллельными переносами. Плитку мы построим, «пошевелив» стороны параллелограмма с таким расчетом, чтобы противоположные стороны при «размножении» точно совместились.

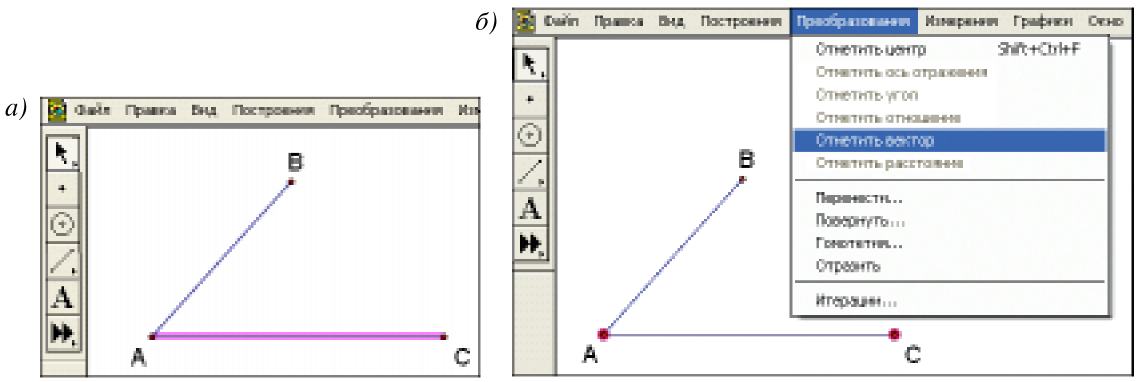


Рис. 2

Начнем, однако, со случая, когда плитка является просто параллелограммом; заодно на этом простейшем примере мы познакомимся с работой команды «Перенести...».

Пусть опять даны две смежные стороны параллелограмма. Чтобы выполнить перенос стороны AB (рис. 2 *а*), надо задать вектор переноса (в нашем случае вектор определяемый второй стороной). Как это сделать? Выделим поочередно его начало и конец (рис. 2 *б*). Правильность выделения подтверждается видом меню – команда «отметить вектор» в меню «Преобразования» становится активной (рис 2 *б*). После ее выполнения вдоль направленного отрезка AC «пробегает волна», еще раз показывая, что именно этот вектор будет вектором переноса, который мы будем производить. Теперь отметим объекты, которые мы хотим перенести (в нашем случае это сторона AB вместе с вершиной B) и нажмем на команду «Перенести...» в меню «Преобразования» (рис. 3 *а*). Появляется окошко, в котором вектор переноса можно при необходимости переопределить (или определить впервые, если это не было сделано заранее), причем как двумя точками – началом и концом, так и его координатами – полярными или декартовыми. Наконец, нажимаем на кнопку «Перенос» в этом окне.

После переноса (рис. 3 *б*) останется провести четвертую сторону параллелограмма (параллельную AC; рис. 3 *в*). Для тренировки можно повторить построение параллелограмма, использовав перенос стороны AC на вектор $\overrightarrow{AB}$.

Многократно применяя к построенному параллелограмму переносы на векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, и противоположные к ним, мы замостим плоскость плитками-параллелограммами (рис. 4). Отметим, что удобно сначала выполнить несколько переносов на один вектор (при этом не нужно его каждый раз задавать снова), а затем размножить переносами полученную полоску.

Теперь нарисуем нечто более интересное. Соединим концы основания нашего параллелограмма ломаной, например, из трех звеньев, как показано на рисунке 5 *а*. Эта ломаная будет нижней стороной новой плитки. Аналогично построим новую боковую сторону (рис. 5 *б*).

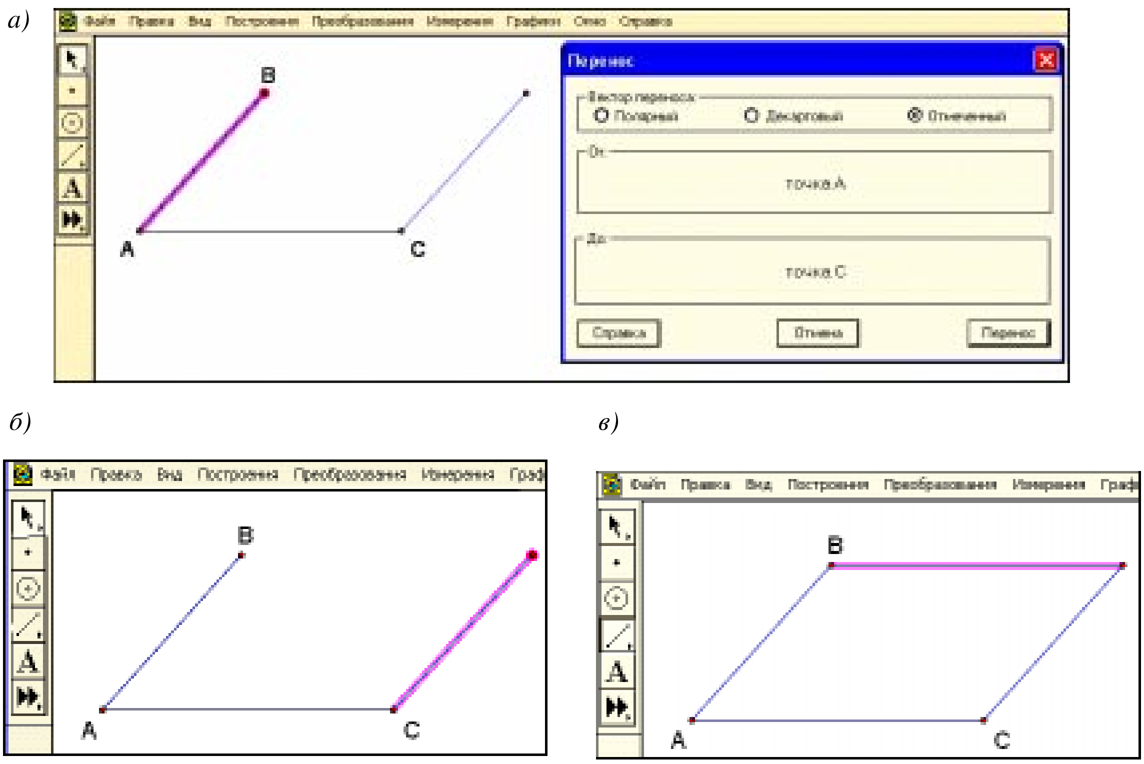


Рис. 3

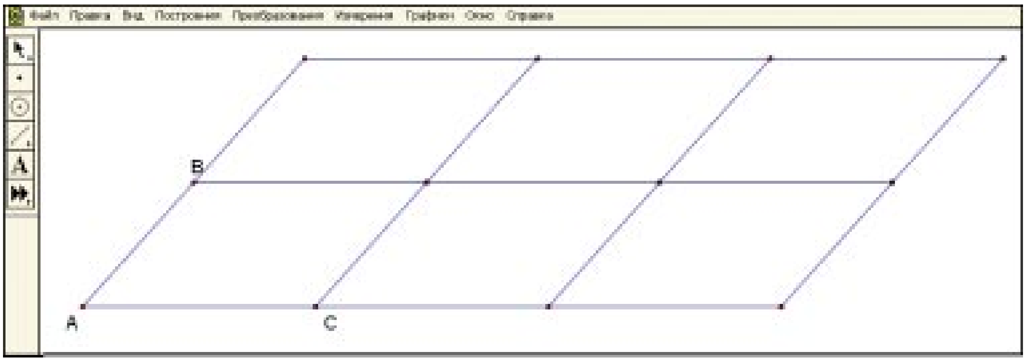
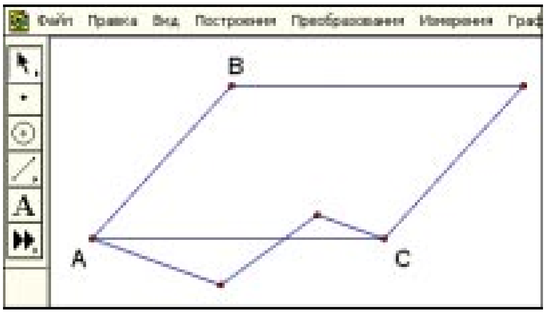


Рис. 4

а)



б)

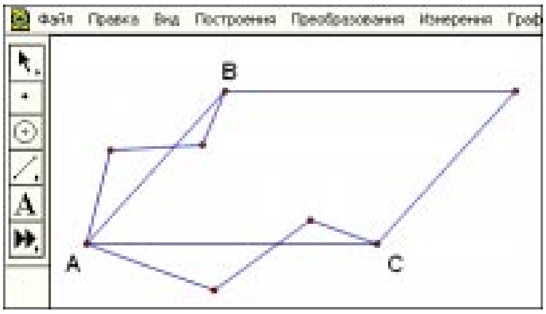
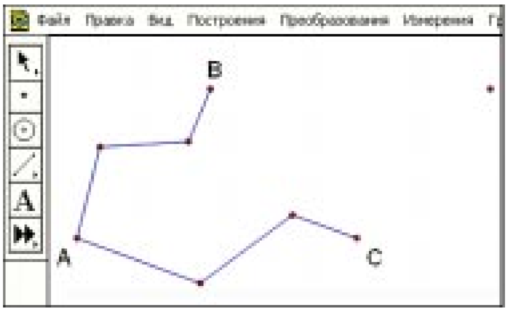


Рис. 5

а)



Стороны исходного параллелограмма нам не нужны, и их можно спрятать (выделить и выполнить команду «Скрыть» меню «Вид») или даже удалить (выделить и использовать команду «Удалить» меню «Правка»; подчеркнем, что удалять стороны можно, если они не использовались при построении четвертой вершины параллелограмма, а именно, если она строилась с помощью параллельного переноса). Результат показан на рис. 6 *а*.

б)

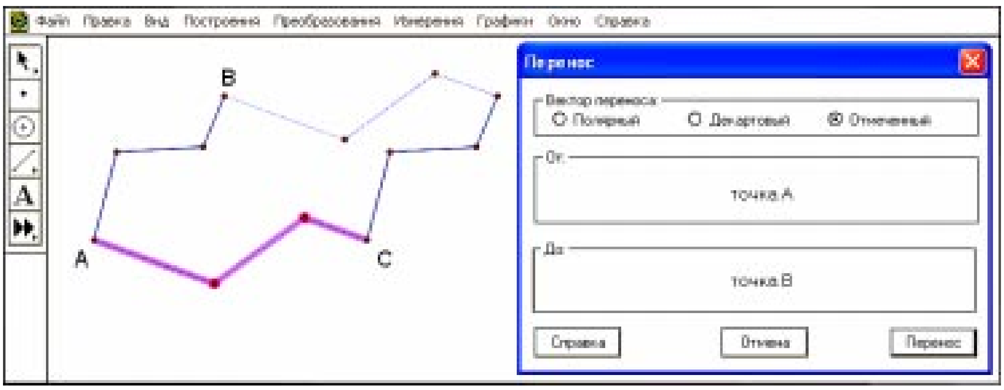
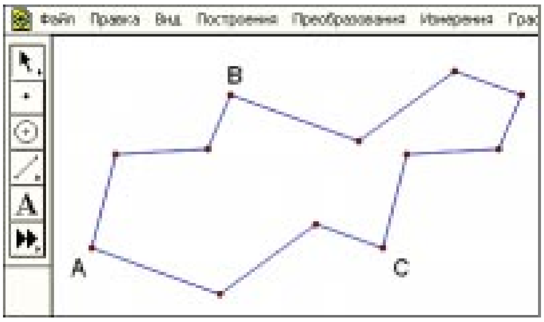


Рис. 6

а)



б)

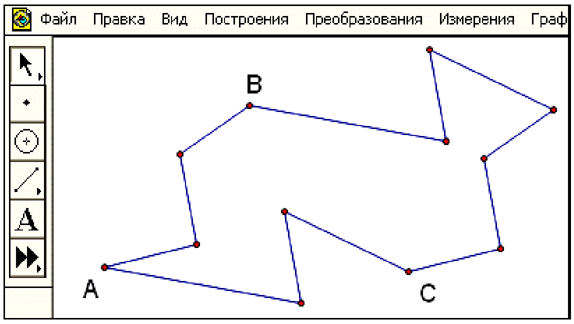


Рис. 7

Далее перенесем ломаную AB на вектор $\overrightarrow{AC}$, а ломаную AC на вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 6 *б*).

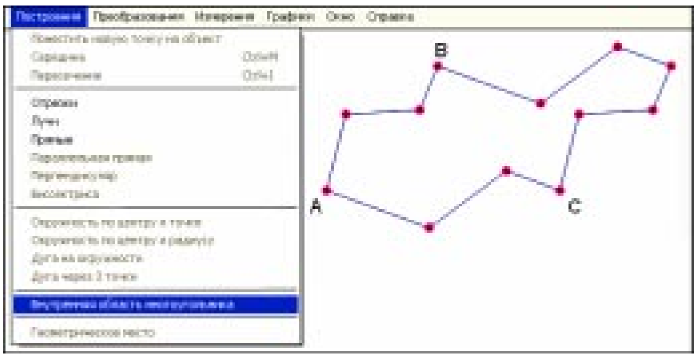
Получим фигуру-плитку, которой можно замостить плоскость с помощью тех же переносов, которые использовались при построении первого паркета из параллелограммов. Но теперь мы можем менять форму плиток, перемещая добавленные точки – вершины ломаных (рис. 7).

Перед тем, как «уложить» новый паркет, раскрасим плитку. Для этого выделим последовательно ее вершины и выполним команду «Построить внутренность многоугольника» из меню «Построения» (рис. 8 *а*).

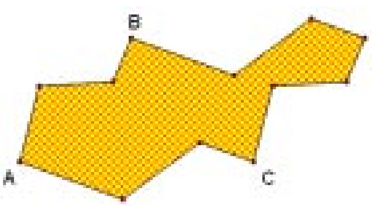
После этого на чертеже возникает раскрашенная внутренняя область нашей многоугольной плитки; ее цвет выбирается по умолчанию (рис. 8 *б*). Чтобы изменить цвет, надо выделить эту область (сразу после построения она будет выделена автоматически) и выбрать в меню «Вид» команду «Цвет», с помощью которой можно получить произвольный цвет и оттенок (рис. 8 *в*; «тонкая регулировка» осуществляется командой «Конструктор цвета»).

Замечание. Если, отмечая точки, вы промахнетесь и случайно щёлкнете на свободном месте, то выделение предыдущих точек пропадет. Чтобы этого избежать, можно другой рукой удерживать нажатой клавишу Shift. Если вы нечаянно отметите сторону или не ту точку,

а)



б)



в)

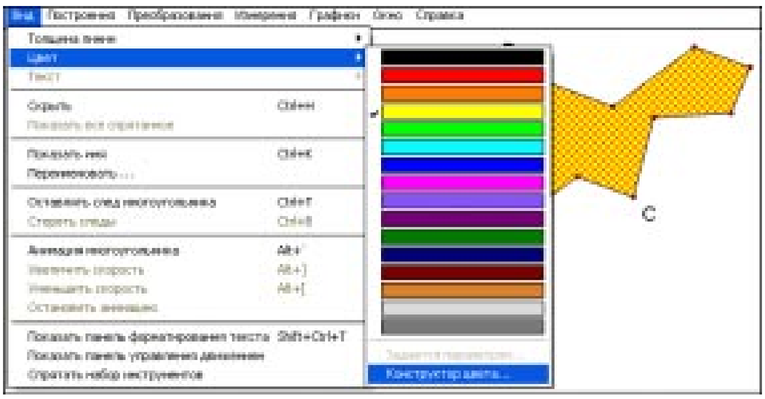


Рис. 8

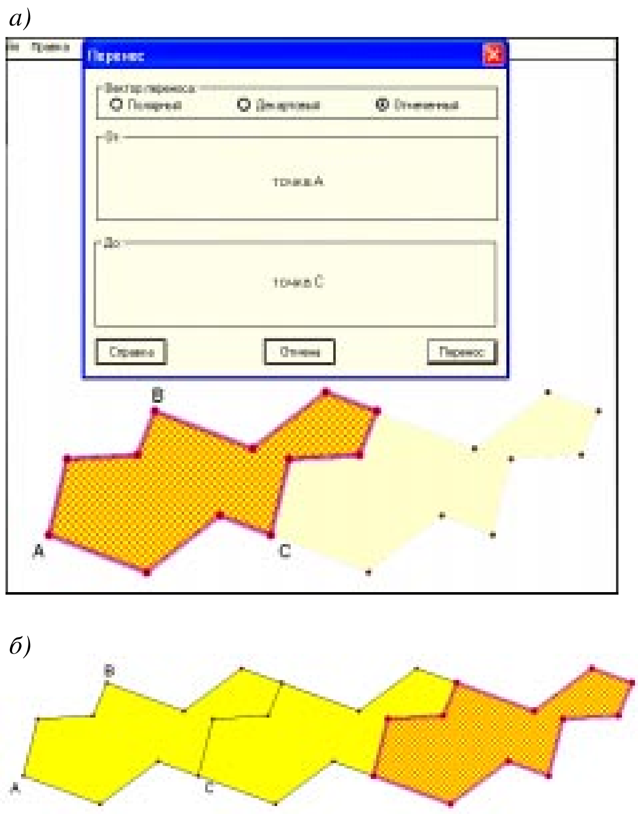


Рис. 9

щёлкните по ней мышкой повторно и выделение пропадёт.

Теперь можно перейти к замощению. Зададим вектор переноса, как указывалось выше (какой-то из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ уже задан, поэтому в данном случае этого можно и не делать). Выделим внутренность плитки (можно выделить также стороны и вершины, если хотим, чтобы они были видны на нашем паркете), выберем команду переноса на отмеченный вектор и повторим ее несколько раз (рис. 9 *а*, *б*); получим полоску. Далее выделим всю полоску (курсором в режиме указателя провести «диагональ» этой фигуры; возникающая рамка покажет область выделения) и перенесем ее несколько раз на второй из векторов, определяющих плитку (рис. 10 *а*). Полученные плитки можно раскрасить в разные цвета. Возможный вид паркета после переносов и раскраски показан на рисунке 10 *б*.

Если представить себе, что таким образом замощена вся плоскость, то получим пример геометрического объекта, обладающего переносной симметрией. Перемещая базовые фигуры, можно получить много других паркетов, обладающих такой же переносной симметрией. Например, увеличив число звеньев исходных ломаных и меняя параметры исходной фигуры, можно получить паркеты, похожие на те, которые использовал в качестве основы для своих произведений Морис Эшер (рис. 11).

Решим теперь задачу на построение, используя свойства симметрии фигур и инструменты для выполнения геометрических преобразований.

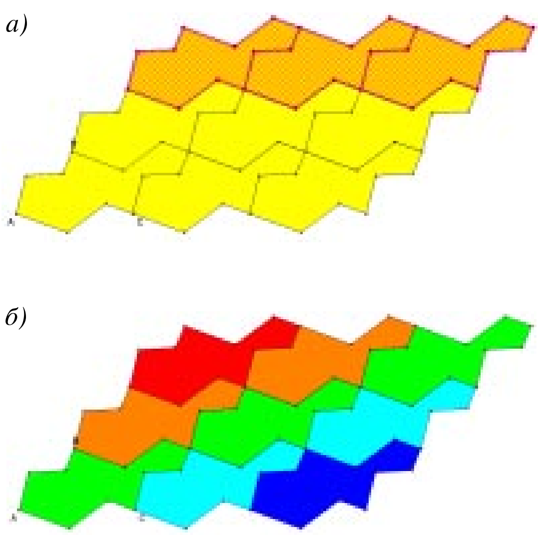


Рис. 10

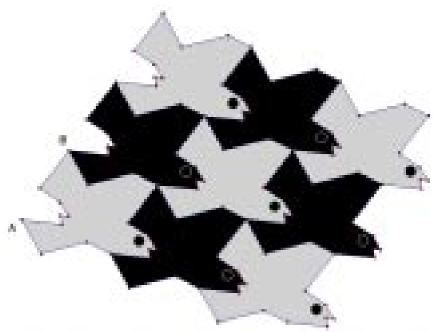


Рис. 11

а) б)

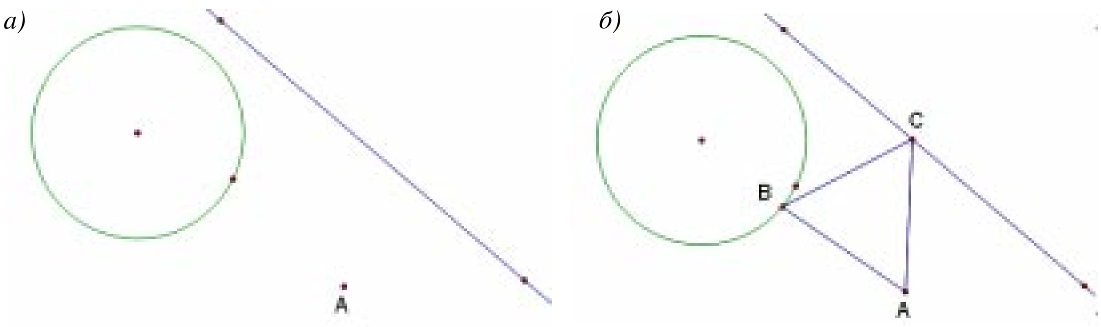


Рис. 12

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Многие задачи на построение циркулем и линейкой решаются с помощью геометрических преобразований. Мы рассмотрим одну такую типичную задачу и заодно познакомимся с тем, как выполняется поворот в «Живой математике».

Построить равносторонний треугольник ABC, вершина A которого находится в заданной точке, вершина B лежит на заданной окружности, а вершина C лежит на заданной прямой (рис. 12 *а*).

Для решения задачи проведём анализ, предположив, что искомый треугольник *ABC* уже построен (рис. 12 *б*). Точка *A* нам дана по условию, а точки *B* и *C* надо найти.

Заметим, что точка *C* переходит в *B* при повороте на 60° вокруг точки *A*. Но точка *C* должна лежать на данной прямой; поэтому точка *B* – образ *C* при повороте – должна лежать на образе этой прямой. Следовательно, для построения точки *C* достаточно повернуть данную прямую вокруг точки *A* на 60° и взять точку (или точки) ее пересечения с данной окружностью.

Чтобы выполнить поворот, нужно отметить его центр. Выделим точку *A* и в меню «Преобразования» выберем команду «Отметить центр» (рис. 13 *а*). Подтверждением того, что команда выполнена, является «вспышка» отмечаемой точки. Можно отметить центр и просто двойным щелчком на точке. Теперь выделим поворачиваемую прямую и выберем команду «Повернуть...» в меню «Преобразования» (рис. 13 *б*). В данном случае нужен поворот на фиксированный угол, и мы заменяем угол по умолчанию (90°) на нужный нам угол 60°. Результат показан на рисунке 14 *а*.

Каждой из полученных (двух) точек пересечения образа прямой с окружностью соответствует одно решение нашей задачи. Построим одно из них.

а)

б)

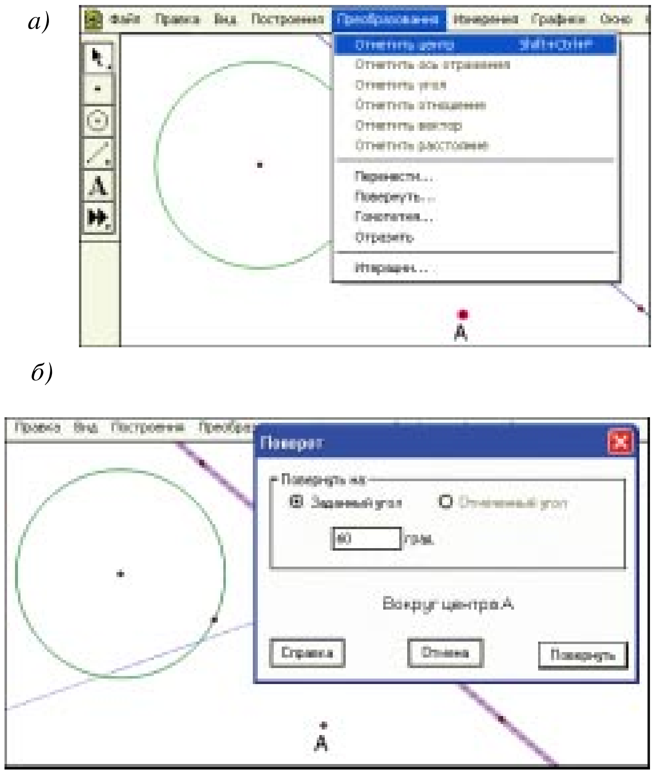


Рис. 13

а) *б)*

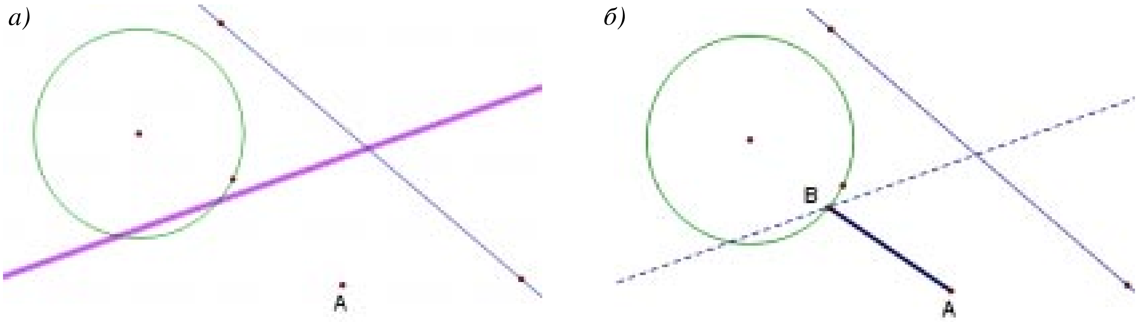


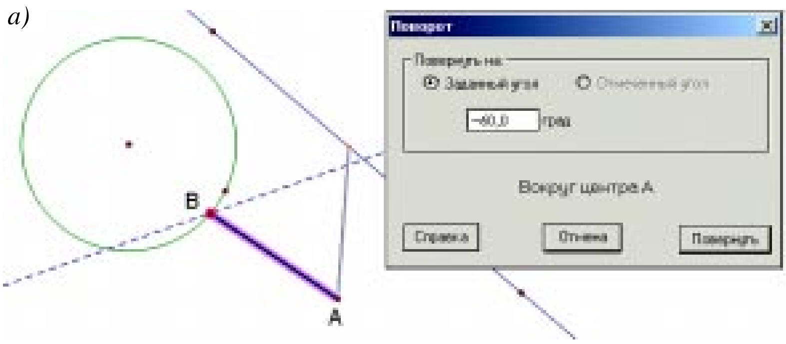
Рис. 14

Возьмем одну из точек пересечения (вершину *B* будущего треугольника) и соединим её с точкой *A* (рис. 14 *б*). Для наглядности на рисунке мы провели построенную сторону треугольника жирной линией, а образ прямой – пунктирной. (Чтобы это сделать, выделяем отрезок или линию, а затем в меню «Вид» выбираем нужный стиль линии из подменю «Толщина линии».) Остается построить точку *C*. Это можно сделать по-разному. Можно просто построить правильный треугольник на «жирном» отрезке циркулем и линейкой (обратите внимание – таких треугольников два, но нам подходит только один из них). Другой способ – повернуть построенный отрезок *AB* на –60° вокруг центра *A*, при этом его конец *B* перейдёт в точку *C* (рис. 15 *а*). Наконец, можно повернуть на –60° вокруг *A* данную окружность и взять её пересечение с исходной прямой (рис. 15 *б*).

Ясно, число решений задачи, получаемых указанным способом равно числу точек пересечения повернутой прямой с окружностью, то есть 2 (рис. 16), 1 или 0.

Однако возможны и другие решения, которые нередко пропускают. На наших рисунках треугольник ориентирован отрицательно (обход вершин *A*–*B*–*C* производится по часовой стрелке), но возможна и противоположная ориентация. Во втором случае вершина *B* будет получаться из *C* поворотом на –60°; соответственно надо видоизменить и построение. Таким образом, наша задача может иметь до 4 решений (хотя в конкретном случае на наших рисунках их только два).

а)



б)

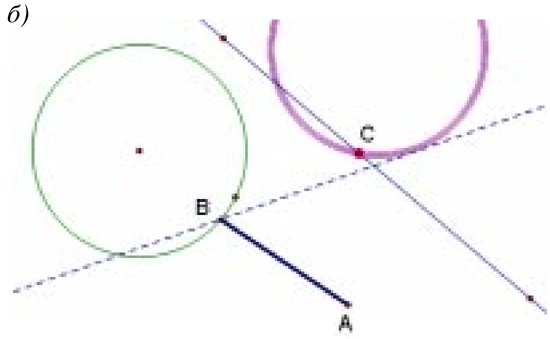


Рис. 15

Заметим, что программы динамической геометрии позволяют применить интересный методический прием при работе с этой и другими подобными задачами в классе. Возьмем любую точку *C* на данной прямой и построим правильный треугольник *ABC* на стороне *AC* – это легко. Применим команду построения следа к его вершине *B* и подвигаем точку *C* по прямой – мы увидим, что точка *B* тоже рисует прямую. Этот эксперимент подсказывает идею решения – геометрическим местом точек *B* является прямая, и искомые точки *B* можно найти на пересечении этой прямой с данной окружностью.

Конечно, задачами этого типа (можно назвать их задачами на «пересечение с образом») многообразие применений преобразований в построениях не исчерпывается. Однако именно такие задачи чаще всего можно встретить в учебниках; имеются они и во всех учебниках, используемых в школе сегодня. Большое число задач на построение с применением преобразований имеется в вышеупомянутой книге И.М. Яглома. Обширная их подборка, снабженная динамическими моделями-апплетами в формате «Математического конструктора», включена в комплекс «Конструктивные геометрические задания. 5–11 кл.» Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/3298222e-279f-475d-85f6-36115554a9cb/.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В «МАТЕМАТИЧЕСКОМ КОНСТРУКТОРЕ»

Как обычно, коснемся особенностей «1С: Математического конструктора» при работе с преобразованиями. Объекты, задающие поворот – центр и угол – могут либо присутствовать на чертеже заранее, либо создаваться в процессе выполнения команды.

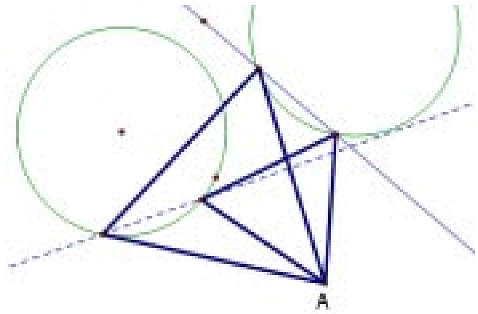
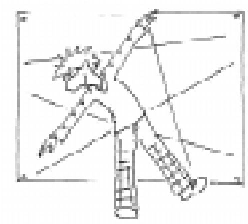


Рис. 16

Шаг 1. *Указание поворачиваемых фигур*: можно либо сначала выделить фигуры, которые нужно повернуть, а затем взять инструмент поворота из меню, либо сначала взять инструмент, а затем выделять фигуры этим инструментом (тогда окончание выделения нужно обозначить нажатием клавиши Enter).

Шаг 2: *Указание центра*: мы либо создаем его там, где требуется, щелкнув на имеющейся точке, которая будет центром, на линии или на свободном месте (при этом возникает новая точка-центр), либо опять нажимаем Enter,



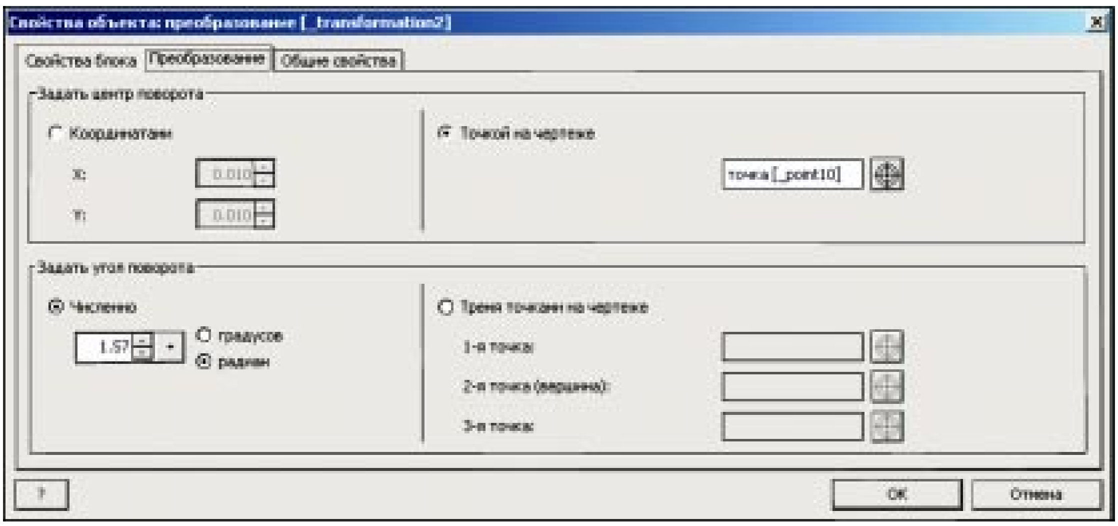


Рис. 17

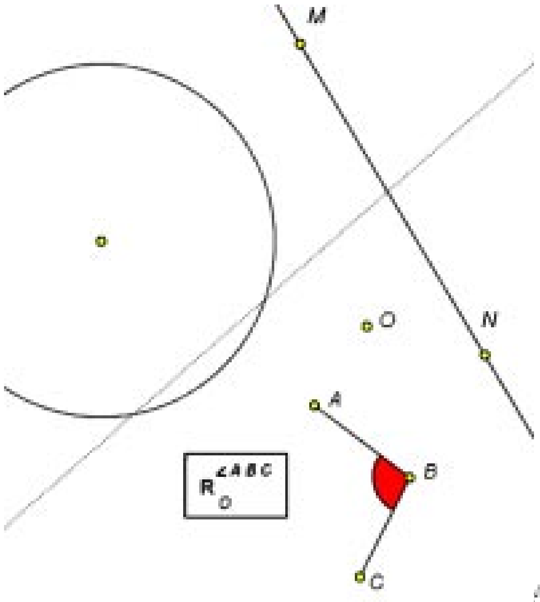


Рис. 18

открывая диалог свойств поворота (рис. 17), в котором можно задать центр численно – координатами (или вернуться к выбору точки, нажав на соответствующую кнопку с «мишенью»).

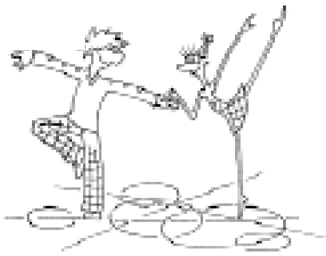
Шаг 3: *Указание угла*: если центр был выбран напрямую, без открытия диалога, то угол поворота можно задать «геометрически», как $\angle ABC$ на чертеже, щелкнув на трех точках A, B, C (при этом они могут создаваться); если же при задании центра был открыт диалог, то в нем определяется и угол – численно или с помощью «мишеней».

В результате получится примерно такая картинка, как на рис. 18, где прямая MN повернута вокруг точки O на угол ABC (для наглядности он отмечен). Особенностью МК является присутствие на чертеже преобразования как самостоятельного объекта – рамки с обозначением преобразования, в данном случае поворота – $R_O^{\angle ABC}$. Благодаря этому можно, во-первых, применять это же преобразование повторно к другим объектам, для чего имеется отдельная команда повторения преобразования; во-вторых, в диалоге свойств преобразования можно изменять его параметры, соответственно перемещая и все повернутые фигуры; в-третьих, этот символ можно вставлять в текстовые комментарии к построению. Отметим и методический момент – присутствие преобразования в явном виде помогает ученику лучше усвоить смысл этого понятия.

УПРАЖНЕНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Постройте правильный треугольник на заданном отрезке как на стороне, используя команду поворота.

2. Постройте модель калейдоскопа, отражая правильный треугольник относительно его сторон вместе с его построенными ранее отражениями. Треугольник разбейте на несколько частей ломаными и раскрасьте эти части разными цветами (они будут имитировать разноцветные стёклышки в калейдоскопе). При изменении вершин ломаных кусочки будут менять форму, а их многочисленные отражения создадут ощущение изменения картинок в калейдоскопе.



Указание. В «Живой математике» отражение производится в помощью команды «Отразить» (осевой симметрии) в меню «Преобразования». Перед выполнением этой команды нужно отметить ось – в данном случае, одну из сторон треугольника двойным щелчком на этой стороне.

3. Дан отрезок AB, прямая и окружность. Постройте параллелограмм $ABCD$, если известно, что его вершина C лежит на данной окружности, а вершина D на данной прямой.

4. Придумайте и решите другие задачи, аналогичные предыдущей (на метод «пересечения с образом»).

5*. Постройте квадрат, одна из вершин которого находится в заданной точке, вторая лежит на заданной окружности, а третья лежит на заданной прямой.

Указание. В этой задаче для нахождения полного решения нужно учитывать три возможных случая – когда вершина, противоположная данной, лежит на данной прямой, на данной окружности или ни там, ни там. В каждом из этих случаев возможны два направления обхода вершин (как в примере с треугольником, рассмотренном в статье), и для каждого из направлений возможны два решения. Итого задача может иметь до 12 решений. Заметим, что в первых двух случаях вспомогательное преобразование должно переводить сторону квадрата в диагональ, то есть изменять расстояние (в $\sqrt{2}$ раз). В качестве такого преобразования можно взять преобразование подобия, являющееся композицией поворота на 45° и гомотетии с коэффициентом $\sqrt{2}$.

Чтобы выполнить гомотетию, нужно сначала отметить её центр так же, как мы отмечали центр поворота. Затем нужно задать коэффициент. Это можно сделать с помощью калькулятора (вызываемого из меню «Измерение» или комбинацией клавиш Alt + =), в котором вычисляется $\sqrt{2}$, выделения этого параметра и выполнения команды «Отметить коэффициент» в меню «Преобразования». Другой способ – геометрический: надо построить равнобедренный прямоугольный треугольник, отметить его гипотенузу и катет в указанном порядке, а затем выбрать команду «Отметить отношение отрезков» в том же меню. В обоих случаях коэффициенту гомотетии будет присвоено значение $\sqrt{2}$. После этого выделяем преобразуемую фигуру и выполняем команду «Гомотетия».

В «Математическом конструкторе» порядок действий такой же, как при задании поворота.

Дубровский Владимир Натанович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова,

Поздняков Сергей Николаевич, профессор кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ «ЛЭТИ».