*Посов Илья Александрович,*
*Собко Евгений Михайлович*

# ЗАДАЧА «КАЧЕЛИ» КОНКУРСА КИО-2008

*«В тени косматой ели,*
*Над шумною рекой*
*Качает черт качели*
*Мохнатою рукой».*

*Ф. Сологуб*

В этой статье мы обсудим задачу «Качели», которая была предложена на ежегодном конкурсе «Конструируй! Исследуй! Оптимизируй! – 2008». Участники управляли роботом, сидящим на качелях, и требовалось написать программу, с помощью которой робот раскачает качели и сделает на них полный оборот как можно быстрее.

## УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

В задаче «Качели» участникам требовалось написать программу для робота, сидящего на качелях, с помощью которой он сможет как можно быстрее раскачать качели и сделать на них полный оборот. На рис. 1 изображен интерфейс программы, которую участники использовали для решения задачи. Основную часть экрана занимают качели с роботом. Качели состоят из двух ножек, корзины с роботом и держателя, на который подвешена корзина. Чтобы роботу было проще раскачать качели, на другой стороне держателя находится противовес, его масса соизмерима с массой корзины и робота.

Для раскачивания робот использует программу, ее можно редактировать и просматривать в области экрана, расположенной под качелями. В программе используются значения параметров $f_1$, $f_2$, $w_1$, $w_2$. $f_1$ обозначает угол отклонения держателя от вертикали, $f_2$ – это угол наклона корзины к держателю. Параметры $w_i$ соответствуют скоростям изменения углов $f_i$.

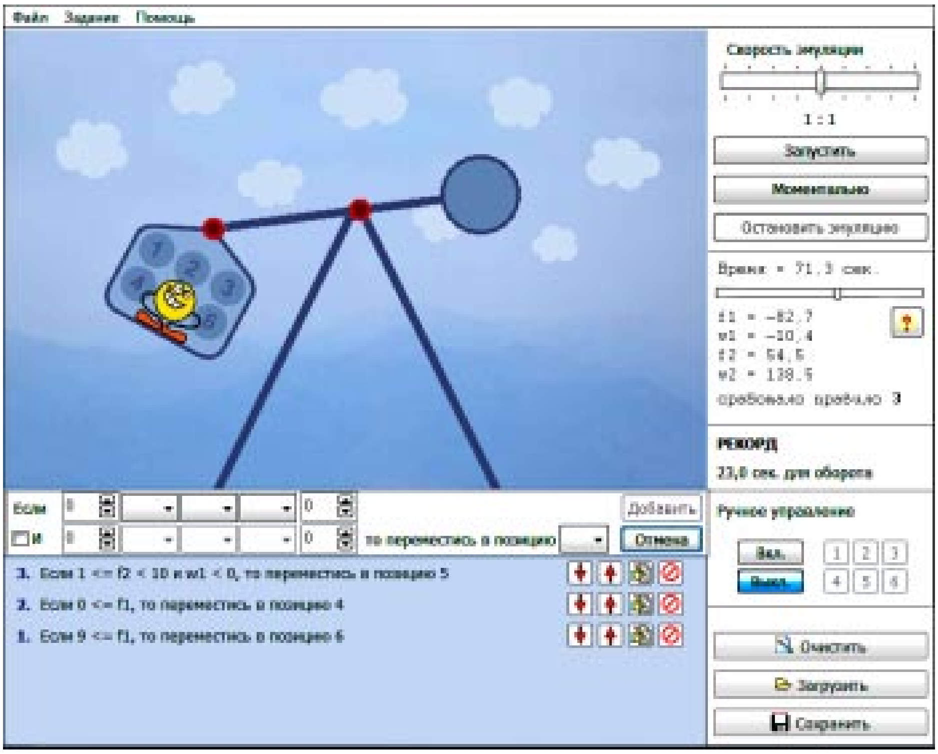


**Рис. 1**

В более простом варианте условия задачи, предложенном участникам первого уровня, параметры $w_i$ отсутствовали.

Программа состоит из правил, пример правил можно увидеть на рисунках 2 и 3. Каждое правило содержит в себе условие на параметры и позицию робота в корзине, куда ему нужно переместиться, если условия выполнились. В каждый момент времени робот просматривает правила от первого до последнего (то есть снизу вверх) и ищет первое из них, в котором условия на параметры выполняется. Если такое правило нашлось, он перемещается в указанную в нем позицию. Если ни одно из правил не подошло, робот остается в той же позиции, в которой был.

**2.** Если 0 <= f1, то переместись в позицию 4

**1.** Если 9 <= f1, то переместись в позицию 6

**Рис. 2**

**8.** Если -189 < f1 < -188, то переместись в позицию 4

**7.** Если -140 < f1 < -139, то переместись в позицию 3

**6.** Если -71 < f1 < -70 и 1 < f2 < 2, то переместись в позицию 1

**5.** Если 83 < f1 < 84, то переместись в позицию 6

**4.** Если -40 < f1 < -39 и -43 < f2 < -42, то переместись в позицию 1

**3.** Если 7 < f1 < 8 и 53 < f2 < 54, то переместись в позицию 3

**2.** Если 2 < f1 < 3 и -45 < f2 < -44, то переместись в позицию 4

**1.** Если 0 <= f1 <= 0, то переместись в позицию 3

**Рис. 3**

## РЕЗУЛЬТАТЫ УЧАСТНИКОВ

Значения масс, расстояний, моментов импульсов для качелей были подобраны таким образом, чтобы сделать на них полный оборот оказалось несложно. Действительно, с этим справилось большинство участников. Примером простой программы, всего из двух правил, которая позволяет сделать полный оборот достаточно быстро (23 секунды) может быть программа, изображенная на рис. 2.

Рекорд среди участников первого уровня – полный оборот за 16,57 секунды. Рекорд для второго уровня – полный оборот за 16,34 секунды. Программа, реализующая этот результат, приведена на рис. 3.

Как видно, в программе не используются параметры $w_i$, то есть теоретически этот же результат могли получить и участники первого уровня.

Распределение результатов участников приведено в таблице 1.

## ОБСУЖДЕНИЕ ЗАДАЧИ

Провести в этой задаче исследование, найти оптимальную программу или хотя бы только оценить минимальное возможное время оборота совсем не просто. Ситуация осложнется тем, что участники решали задачу не про идеальную физическую модель качелей, а про конкретную реализацию этой модели на компьютере со всеми ее проблемами в вычислениях, такими как ошибки округления и неточность самого метода определения положения качелей. При моделировании на компьютере качели движутся не непрерывно, их положение перевычисляется каждую сотую долю секунды. Ко всему прочему, участникам даже не были предоставлены значения параметров качелей, таких как массы и моменты инерции различных частей конструкции. Решать задачу предполагалось с помощью общих знаний из жизненного опыта о том, как надо раскачивать качели. Например, мы знаем, что при раскачивании подталкивать качели стоит в тот момент, когда они практически останавливаются, достигнув наивысшей точки траектории. На этой идее основаны решения всех участников, получивших хорошие результаты, и, в частности, приведенное выше решение с лучшим результатом.

Первый вопрос, который мог у многих появиться: почему качели раскачиваются, несмотря на то, что к ним не приложена никакая внешняя сила? Не кроется ли здесь противоречие с законом сохранения энергии? Когда вы садитесь на качели и начинаете раскачиваться, механическая энергия системы увеличивается, и источником являетесь вы сами, а точнее, химические процессы, в вас происходящие.

Процесс раскачивания качелей связан с явлением резонанса, то есть резкого увеличения амплитуды колебаний системы вследствие удачного приложения внешней силы или изменения внутренних параметров системы. Классический резонанс возникает, когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте колебаний системы. В случае раскачивания качелей это означает, что прикладывать силу надо с той же частотой, с которой они совершают одно качание вперед-назад.

Если на качелях мы раскачиваемся без чьей-либо помощи, то есть без приложения внешней силы, то когда мы болтаем ногами из стороны в сторону, мы тем самым изменяем параметры системы, и оказывается, что при определённых условиях может наблюдаться так называемый параметрический резонанс. Этот резонанс является следствием изменений, происходящих в самой системе, без внешнего воздействия. Для большей наглядности разберём простой, но содержательный пример. Для начала вспомним уравнение физического маятника

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0\,, \qquad (1)$$

$$\omega^2 = \frac{mga}{I}\,,$$

где $\theta$ – угол отклонения маятника, $m$ – масса, $g$ = 9,8 м/с$^2$ – ускорение свободно-

Таблица 1

| Секунды | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25–29 | 30–... | Без результата | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Уровень I | 2 | 10 | 5 | 1 | 6 | 14 | 12 | 3 | 13 | 13 | 54 | 111 | 244 |
| Уровень II | 14 | 9 | 6 | 1 | 13 | 6 | 7 | 5 | 8 | 14 | 28 | 28 | 139 |

го падения, $I$ – момент инерции относительно оси вращения, $a$ – расстояние от оси вращения до центра масс. Как отразить в этом уравнении «болтание ногами»? С механической точки зрения оно означает периодическое изменение момента $I$ и расстояния $a$ до центра масс, то есть периодическое, с периодом $T$ изменение $\omega$:

$$\ddot{\theta}+\omega(t)^2\theta=0\,,\quad \omega(t+T)=\omega(t)\,.$$

Из общей теории дифференциальных уравнений с периодическими условиями (см., например книгу Л.С. Понтрягина «Обыкновенные дифференциальные уравнения»), известно, что можно выбрать два решения $\theta_1(t)\,,\theta_2(t)$ (у линейного дифференциального уравнения 2-ого порядка есть ровно 2 линейно независимых решения, и любое другое решение является их линейной комбинацией), таких, что,

$$\theta_1(t+T)=\mu_1^{t/T}F_1(t),\quad \theta_2(t+T)=\mu_2^{t/T}F_2(t)\,,$$

где $F_1(t)$, $F_2(t)$ – периодические функции с периодом $T$. При этом $\mu_1$ и $\mu_2$ могут оказаться комплексными. Оказывается, что $\mu_1$ и $\mu_2$ связаны между собой. Для определения этой зависимости выпишем два тождества:

$$\ddot{\theta}_1+\omega(t)^2\theta_1=0\,,$$
$$\ddot{\theta}_2+\omega(t)^2\theta_2=0\,.$$

Далее умножим первое на $\theta_2$, а второе на $\theta_1$ и вычтем одно из другого:

$$\ddot{\theta}_1\theta_2-\ddot{\theta}_2\theta_1=\frac{d}{dt}(\dot{\theta}_1\theta_2-\dot{\theta}_2\theta_1)=0\,,$$

откуда $\dot{\theta}_1\theta_2-\dot{\theta}_2\theta_1=const$.

Легко видеть, что левая часть полученного равенства умножается на $\mu_1\mu_2$ при увеличении времени на $T$, правая же остаётся без изменений, то есть $\mu_1\mu_2 = 1$. Отсюда следуют два случая, либо $|\mu_1|=|\mu_2|=1$ либо $|\mu_1|>1$, $|\mu_2|<1$ (или $|\mu_1|<1$, $|\mu_2|>1$). Во втором случае $\theta_1$ (или $\theta_2$) экспоненциально возрастает, это и есть параметрический резонанс! Можно спросить, а что произойдёт, если мы добавим в систему трение? Оказывается, что при достаточно интенсивном раскачивании трение не помеха и параметрический резонанс также имеет место быть, но, разумеется, раскачивание будет происходить гораздо медленнее.

Сейчас мы познакомились с вами с ещё одним видом резонанса – параметрическим. Оказывается, что есть ещё и другие виды резонанса, например, так называемый стохастический резонанс.

Представим себе сложную нелинейную систему, на которую мы подаём слабый периодический сигнал, и наблюдаем за откликом на него системы. Так вот, оказывается, что в определённых условиях сигнал может аномально усиливаться, если мы добавим к нашему периодическому входному сигналу белый шум достаточно высокой мощности! На первый взгляд, это кажется удивительным: как шум может усилить периодический сигнал?! Для наглядности представим себе систему типа «триггера» – она может переключаться между двумя состояниями, если входной сигнал достаточно сильный. Слабый периодический сигнал не в состоянии перевести систему из одного состояния в другое, простой же шум заставляет систему перескакивать случайным образом между этими состояниями. Если же теперь подать сумму шума и периодического сигнала, то шум эффективно как бы увеличит амплитуду слабого периодического сигнала и теперь он сможет переключать систему из одного состояния в другое. Таким образом, шум может не только «затирать» динамику, но и усиливать её. Более подробно об этом интересном явлении вы сможете узнать из статьи Игоря Иванова http://elementy.ru/lib/164581

Вообще, задача, которую вам предлагалось решить, относится к классу задач на оптимальное управление: требуется найти такое изменение параметров системы со временем, чтобы какой-то функционал достиг своего экстремального значения. Вам предлагалось минимизировать время до переворота, изменяя положение робота на качелях. То есть на вход шла функция – управление, а на выходе мы имели число – время до переворота. Задачи такого сорта встречаются повсеместно в самых разных областях: в каком режиме должны работать двигатели самолёта, чтобы он перелетел из одного города в другой за кратчайшее время, причём есть ограничение по запасам топлива, его расходу и ускорению, которое может иметь самолёт; или же как надо менять со временем количество акций тех или иных компаний в своём инвестиционном портфеле, чтобы прибыль за год была максимальна? Теория оптимального управления интересна не только своими практическими применениями, но и тесными связями с другими разделами математики. Недавно появилась замечательная книга А.А. Аграчева и Ю.Л. Сачкова «Геометрическая теория управления», по которой вы сможете поближе познакомиться с теорией оптимального управления и узнать о её тесных связях с геометрией.

***Посов Илья Александрович,***
***аспирант математико-механического факультета СПбГУ,***

***Собко Евгений Михайлович,***
***аспирант ФТИ им. А.Ф. Иоффе.***