Горелик Людмила Борисовна

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Лабораторные работы могут быть полезны для решения задач из интерактивных минизадачников по одноименной теме, помогают отыскать решение задачи или проверить уже найденное, позволяют быстро перебрать возможные сочетания значений параметров для решения задач в общем виде (с параметрами). В этом и состоит роль компьютерных инструментов, которыми снабжена каждая лабораторная работа.

Но перебор вариантов не должен быть хаотичным. Даже если повезет, и ученик случайно найдет нужное сочетание параметров, он не будет уверен, что это полное решение. Прежде чем решать задачу, надо составить хотя бы примерный план, который по мере продвижения вперед будет уточняться. План даст уверенность в том, что ничего не упущено, все случаи рассмотрены, следовательно, задача решена.

В качестве примера рассмотрим одну из лабораторных работ, посвященных частичному исследованию функций.

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ФУНКЦИЯ ВИДА $y = a|x-b| + |x-c|$

В каждой лабораторной работе выделяется проблема, которую нужно решить. Рассмотрим пример постановки проблемы (цитируем учебник):

«*Постановка проблемы.* Перед решением задач из интерактивного задачника «Функции вида $y = a|x-b| + |x-c|$» необходимо представить особенности функций данного вида. Для этого предлагается выполнить несколько конструктивных заданий на динамической модели, где каждый параметр можно менять в небольших пределах».

План исследования помогут составить следующие предварительные рассуждения.

- При равенстве параметров b и c в записи функции остался бы только один модуль с коэффициентом $(a + 1)$. График такой функции – ломаная, состоящая из *двух* звеньев, с вершиной в точке с абсциссой, равной b, и ординатой, равной 0. В зависимости от знака $(a + 1)$ лучи будут направлены либо вверх, либо вниз.
- Если $b \neq c$, то график этой функции – ломаная, состоящая из *трех* звеньев, вершины которой находятся в точках с абсциссами b и c.
- Если бы параметр a, стоящий перед первым модулем в записи функции, был равен 1, то параметры b и c входили бы в формулу равноправно. Значит, нужно выделить этот случай. При ос-

...выделяется проблема, которую нужно решить.

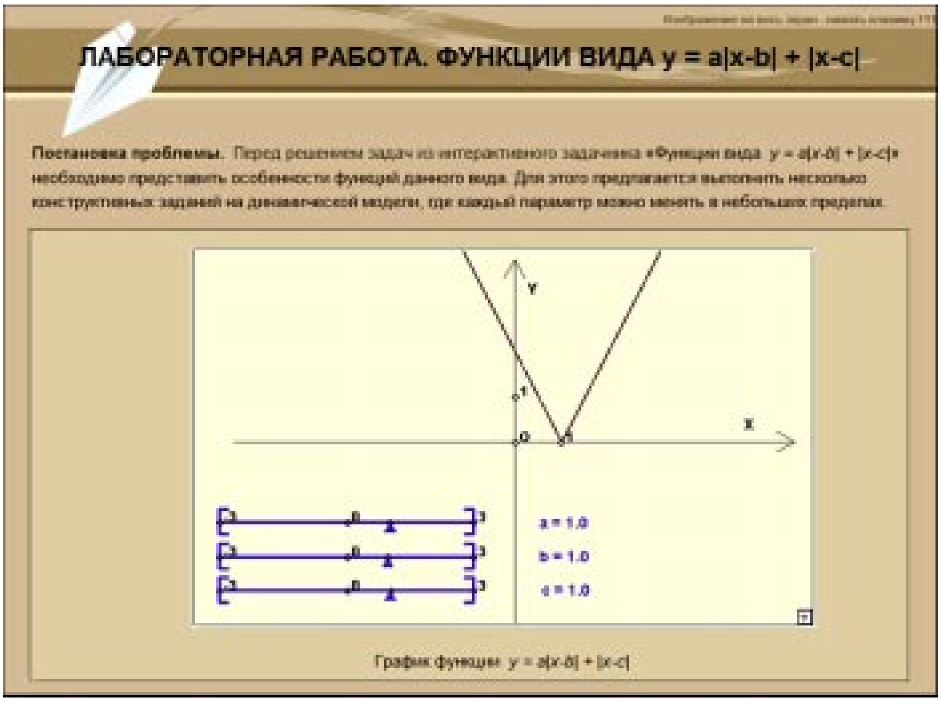


Рис. 1

тальных значениях параметра a следует учесть отношение порядка для b и c, то есть рассмотреть случаи, когда $b < c$, $b = c$ и $b > c$.

- При $a = 0$ остается только один модуль, поэтому рассмотрим отдельно $a = 0$.
- При $a = -1$ крайние звенья ломаной представляет собой отрезки, параллельные оси абсцисс. Ниже будет приведено доказательство, но динамическая модель позволит на практике убедиться в этом. Выделяем этот случай.

Таким образом, мы выделили отдельно случаи, когда $a = -1$, $a = 0$ и $a = 1$. При этом значения параметров b и c могут находиться в одном из следующих отношений: $b < c$, $b = c$ и $b > c$.

Значения -1, 0 и 1 делят множество допустимых значений параметра a на 4 промежутка. С помощью динамической модели легко убедиться в том, что любое конкретное значение a, взятое в одном из этих промежутков, будет *ведущим* для исследования монотонности функции. Значит, кроме -1, 0 и 1, рассматриваем какое-нибудь значение параметра a в указанных промежутках.

План перебора вариантов готов. Пользуясь движками, позволяющими варьировать значения параметров, заполняем таблицу 1.

Перебрав все случаи сочетания значений параметров, выполним задания из лабораторной работы.

1. Положите $a = 0$. *Постройте график функции с минимумом в точке* $x = 1$. *При каком значении* c *он достигается?*

2. Положите $c = 0$. *Постройте график функции с максимумом в точке* $x = 1$. *При каких значениях* a *и* b *он достигается?*

3. Положите $a = 1$. *Постройте график функции с минимумом в точке* $x = 1$. *При каких значениях* b *и* c *он достигается?*

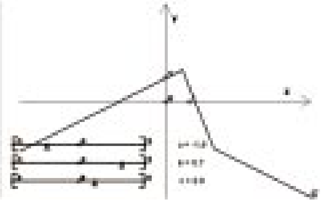
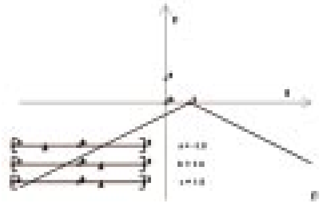
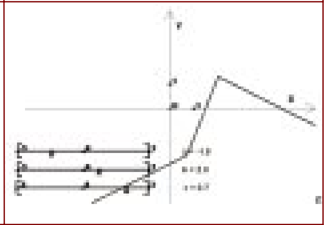
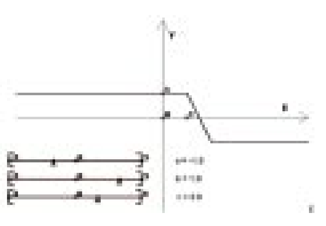
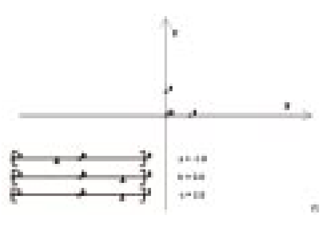
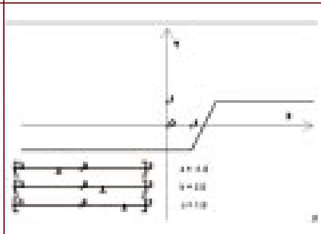
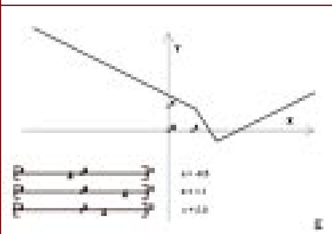
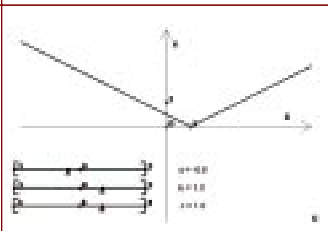
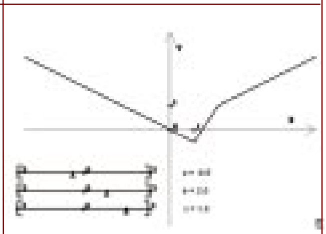
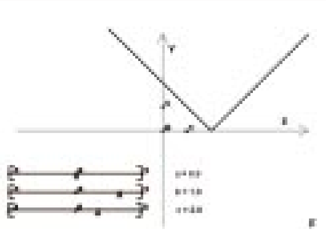
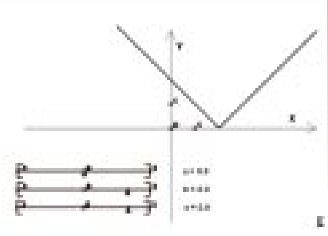
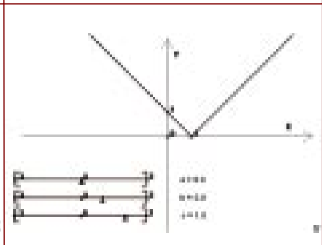
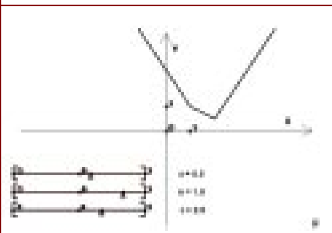
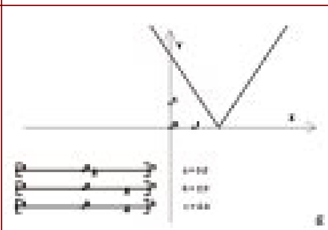
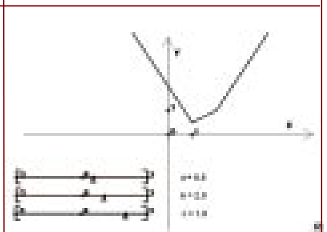
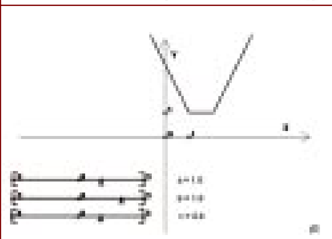
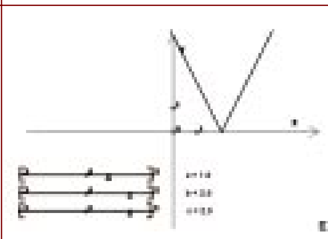
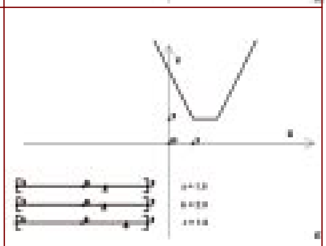
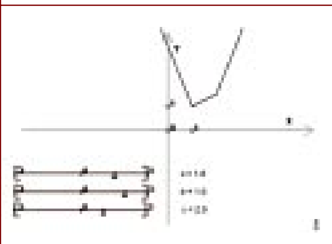
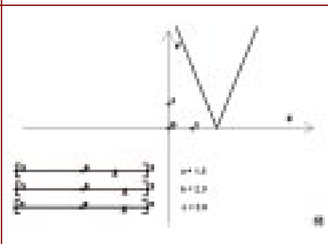
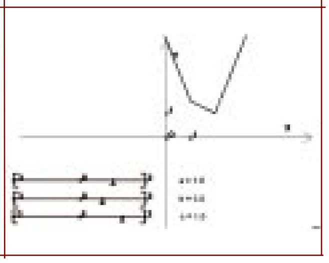
4. Положите $a = -1$. *Постройте график возрастающей функции. При каких значениях* b *и* c *функция возрастает?*

5. Положите $a = -1$, $b = -1$. *При каких значениях* c *корень функции положителен? Отрицателен?*

6. Положите $a = -1$. *Постройте график чётной функции. При каких значениях* b *и* c *функция чётная?*

7. Положите $a = -2$. *Постройте график с наибольшим значением* 1 *при* $x = 0$.

Таблица 1

	$b < c$	$b = c$	$b > c$
$a < -1$			
$a = -1$			
$-1 < a < 0$			
$a = 0$			
$0 < a < 1$			
$a = 1$			
$a > 1$			

При каких значениях b и c функция чётная?

Для выполнения первого задания выбираем из таблицы строку с условием $a = 0$ и находим в ней требуемый график. Под ним указано значение c, при котором он достигается.

Чтобы ответить на второй вопрос, выбираем из таблицы 1 графики тех функций, в которых есть максимум. Он достигается при условии $a < -1$ либо в точке a, либо в точке b. Значит, при $b < c$ максимум в точке $x = 1$ получается при $b = 1$, в случае $b = c$ при $b = c = 1$. Если же $b > c$, то точка максимума равна 1 при $c = 1$.

При ответе на третий вопрос обращаем внимание на значение $a = 1$ (шестая строка таблицы). Минимум достигается при $b = c = 1$.

Ответим на вопрос № 4. Как видно из таблицы, ни при каких значениях параметров данная функция не бывает строго возрастающей. При $a = -1$ и $b \geq c$ исследуемая функция – неубывающая.

При ответе на вопрос № 5 обратим внимание на строчку таблицы с условием $a = -1$. При таком условии графики функций симметричны относительно точки $x = \dfrac{b+c}{2}$, $y = 0$ и пересекают ось абсцисс в точке с координатой $x = \dfrac{b+c}{2}$. Поэтому при $b = -1$ корень положителен тогда и только тогда, когда $0{,}5\,(-1 + c) > 0$, то есть при $c > 1$. При $c < 1$ корень функции отрицателен.

Отвечая на вопрос № 6 (строчка таблицы с условием $a = -1$), обратим внимание на то, что при $b = c$ график представляет собой прямую $y = 0$, симметричную относительно оси ординат. Только в этом случае функция будет четной.

Наконец, последний вопрос. Выбираем нужную строчку таблицы: $a < -1$. В этом случае функция имеет наибольшее значение в точке максимума. С помощью динамической модели подбираем значения b и c: $b = 0$, $c = 1$ или $c = -1$.

После ответов на все вопросы лабораторной работы полезно просмотреть задачи из интерактивного минизадачника на эту тему. Кстати, решение задач в этом случае становится приятным делом: ответы мы просто считываем с таблицы и переводим их на язык интерактивного задачника.

Но можно пойти другим путем. Оставим на время задачник. Подумаем над тем, что сделано. Все задания выполнены, графики построены. Работа выполнена полностью. Но, как ни странно, мы почему-то ощущаем некоторое разочарование, чувствуя неполноту и отрывочность полученных знаний. Мы не можем понять замысла автора, задающего именно эти вопросы. Они кажутся нам случайными, бессистемными. Кстати, такое впечатление складывается всегда, когда мы еще не составили себе полной картины по теме. Заранее спешим сказать, что после того, как мы проведем дополнительные исследования, эти вопросы нам уже не будут казаться случайными.

Что можно было бы еще узнать о данной функции? Какие проблемы возникли в связи с выполнением лабораторной работы?

Динамическая модель позволяет увидеть только схему графика, поэтому некоторые свойства функции пока скрыты от нас. Ощущение того, что мы все-таки что-то упустили, возникает при сравнении графиков второй и четвертой колонки нашей таблицы (условия $b < c$ и $b > c$). Меняя местами значения b и c или делая их равными, мы видели, что углы наклона лучей оста-

...выполним задания из лабораторной работы.

ются теми же, меняется только наклон среднего отрезка (если он есть). Это наводит на мысль о том, что при одном и том же значении параметра a угловые коэффициенты левого и правого лучей на одном и том же графике отличаются только знаком, а их модули равны. Так ли это на самом деле? В этом случае динамическая модель не помощник. Нужно браться за перо и бумагу.

Кроме того, окно, в котором появляется график, не может вмещать его так, чтобы мы увидели все детали. Например, мы не совсем уверены, что при $b \neq c$ один из лучей ломаной не будет лежать на одной и той же прямой со средним отрезком, образуя при этом ломаную из двух, а не из трех звеньев. Как вычислить углы наклона звеньев ломаной? Какие параметры влияют на их величину?

Еще один вопрос. Всякая ли ломаная, состоящая из двух или трех звеньев, будет графиком некоторой функции вида $y = a|x-b| + |x-c|$. Какие ограничения нужно наложить на форму ломаной, чтобы она представляла собой график именно такой функции?

Поговорим теперь о форме. Составляя таблицу, мы видели, что она во многом зависит от параметра a. Тогда возникает вопрос: «удерживает» ли форму ломаной заданное значение параметра a? Какую роль в «формообразовании» играют параметры b и c? Способны ли они изменить форму графика при фиксированном значении a?

На эти вопросы нельзя ответить, пользуясь только тем компьютерным инструментом, которым оборудована лаборатория. Придется произвести некоторые вычисления.

Здесь напрашивается небольшое отступление. Нужно сделать пояснение по поводу приведенного списка вопросов. На самом деле вопросы не приходят внезапно и все сразу. Как правило, они появляются благодаря ошибкам, которые мы делаем, пытаясь что-то для себя уяснить, вычислить, доказать. Наши ошибки – источник знания! В этом отличие их статуса при традиционном и инновационном обучении. В первой парадигме обучения ученик не имеет права на ошибку. Печальный знак запрета на нее – снижение оценки за работу. Напротив, в той системе обучения, где позволяется проводить опыты, ставить эксперименты, делать выводы при решении ***своих собственных проблем****, ошибки, во-первых,* ***неизбежны****, во-вторых – да здравствуют ошибки!*

И еще одно замечание. Каждый вопрос из нашего списка имеет для нас смысл, его решение является насущной проблемой (иначе чувство беспокойства не даст нам спать). Согласитесь, что это совсем иное, чем решать задачи, составленные кем-то. Неотвязное «пусть их решает тот, кто составил» и глухое сопротивление неизбежному злу сопровождает почти всегда решение задач из школьных учебников и задачников. Это относится и к олимпиадным задачам. Откуда взялась та или иная задача? Что подвигло автора на ее составление? Ответом на какую проблему будет ее решение? Подумаем над этим и впредь постараемся предварять каждую задачу, имеющую смысл (всем известно, что есть задачи со смыслом, а есть и бессмысленные, каких великое множество в школьных задачниках), необходимыми пояснениями, рассуждениями. Раздумья над задачей до ее решения – сильный стимул к работе над ней.

Итак, возвращаемся к нашим проблемам и выполняем аналитическую часть работы.

Для вычисления углов найдем значения функции $y = a|x-b| + |x-c|$ в точках b и c и в точках, лежащих на лучах ломаной и отличных от абсцисс их начала.

Пусть $b < c$. Тогда для некоторого $t > 0$ точка с абсциссой $b - t$ лежит на левом луче, а с абсциссой $c + t$ на правом луче ломаной.

$$y(b-t) = a|b-t-b| + |b-t-c| = c-b+(a+1)t,$$

$$y(b) = |b-c| = c-b,$$

$$y(c) = a|c-b| = a(c-b),$$

$$y(c+t) = a|c+t-b| + |c+t-c| = a(c-b)+(a+1)t.$$

Теперь можно вычислить угловые коэффициенты лучей и отрезка. Пусть α_1 – угол наклона левого луча к оси абсцисс, α_2 – угол наклона среднего отрезка ломаной, а α_3 – угол наклона правого луча, тогда

$$tg\alpha_1 = \frac{y(b)-y(b-t)}{b-(b-t)} = -(a+1),$$

$$tg\alpha_2 = \frac{y(c)-y(b)}{c-b} = a-1,$$

$$tg\alpha_3 = \frac{y(c+t)-y(c)}{c+t-c} = a+1.$$

Это первая награда за наш труд: тангенс угла наклона звеньев ломаной, представляющей собой график изучаемой функции, *зависит только от параметра a.* Впрочем, мы так и предполагали. Динамическая модель лаборатории позволила нам *предвосхитить* этот результат.

Какой вклад вносят тогда в форму графика данной функции параметры b и c?

При изменении значений указанных параметров изменяются не углы, а длина среднего отрезка. Это значит, что форма графика остается прежней. Какие случаи возможны при этом? Графики могут быть равными, подобными или гомотетичными геометрическими фигурами. Попробуем найти центр гомотетии и выясним, при каких значениях параметров он будет существовать.

Пусть даны две функции с одним и тем же значением параметра a:

$$y_1(x) = a|x-b_1| + |x-c_1|,$$

$$y_2(x) = a|x-b_2| + |x-c_2|.$$

Для определенности положим $b_1 < c_1$ и $b_2 < c_2$. Так как известно, что угловые коэффициенты лучей и отрезков графиков рассматриваемых функций зависят только от a, то для определения преобразования, связывающего графики, достаточно рассмотреть в каждом графике только среднюю часть ломаной, то есть отрезки B_1C_1 и B_2C_2, где $B_1(b_1;\ c_1-b_1)$, $C_1(c_1;\ a(c_1-b_1))$, $B_2(b_2;\ c_2-b_2)$, $C_2(c_2;\ a(c_2-b_2))$.

Рассмотрим преобразование, при котором B_1 переходит в B_2, а C_1 в C_2. Если прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересекутся, то точка их пересечения будет центром гомотетии. В противном случае преобразование будет либо движением, либо подобием.

Произведя несколько проб, мы с удивлением обнаруживаем, что, если прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются, то точка их пересечения лежит на оси абсцисс! Остается ответить на вопрос: всегда ли будет так, или нам очень везет, и мы все время выбираем именно те значения параметров, при которых ордината точки пересечения указанных прямых равна 0?

На данном этапе работы важно, чтобы учащиеся осознали два момента: во-первых, возможности компьютерного инструмента, позволяющего открыть неизвестный факт; во-вторых, недостаточность даже очень большого числа проб для того, чтобы этот факт считать достоверным, то есть истинным при любых значениях переменных, дающих пересечение прямых B_1B_2 и C_1C_2.

Итак, выясним, при каких условиях прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются, и вычислим координаты центра гомотетии. Для этого составим уравнения этих прямых.

$$B_1B_2\colon\ \frac{x-b_2}{b_1-b_2} = \frac{y-(c_2-b_2)}{c_1-b_1-(c_2-b_2)},$$

$$C_1C_2\colon\ \frac{x-c_2}{c_1-c_2} = \frac{y-a(c_2-b_2)}{a(c_1-b_1)-a(c_2-b_2)},$$

где знаменатели могут быть равными нулю. Рассмотрим случай, когда все знаменатели отличны от 0, тогда

$$B_1B_2\colon\ y = \frac{1}{b_1-b_2}((c_1-b_1-c_2+b_2)x+b_1c_2-b_2c_1),$$

$$C_1C_2\colon\ y = \frac{a}{c_1-c_2}((c_1-b_1-c_2+b_2)x+b_1c_2-b_2c_1).$$

Для нахождения абсциссы точки пересечения прямых решим уравнение:

$$\frac{1}{b_1-b_2}((c_1-b_1-c_2+b_2)x+b_1c_2-b_2c_1) =$$

$$= \frac{a}{c_1-c_2}((c_1-b_1-c_2+b_2)x+b_1c_2-b_2c_1),$$

или

$$\left(\frac{a}{c_1-c_2} - \frac{1}{b_1-b_2}\right)((c_1-b_1-c_2+b_2)x+b_1c_2-b_2c_1) = 0.$$

Случай 1.

$\dfrac{a}{c_1-c_2} - \dfrac{1}{b_1-b_2} = 0$, или, так как по предположению, знаменатели не равны нулю, $a = \dfrac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2}$. Сначала выясним как при этом расположены прямые B_1B_2 и C_1C_2.

Пока у нас нет никаких предположений, но в нашем распоряжении динамическая модель. построим несколько графиков с выполнением условия $a = \dfrac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2}$. Как мы увидим, отрезки B_1B_2 и C_1C_2 расположены на одной прямой!

Теперь можно приступать к доказательству.

Составим уравнение прямой B_1C_1 с угловым коэффициентом $a = \dfrac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2}$, зная кординаты точки B_1 (b_2; $c_2 - b_2$), принадлежащей этой прямой:

$$y = \frac{c_1 - c_2 - b_1 + b_2}{b_1 - b_2} x + \frac{c_2 b_1 - c_1 b_2}{b_1 - b_2}. \qquad (1)$$

Если координатв точки B_2(b_2; $c_2 - b_2$) удовлетворяют уравнению (1), то точка B_2 лежит на этой прямой. Проверим это.

$$c_2 - b_2 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_2 - b_1 b_2 + b_2^2 + c_2 b_1 - c_1 b_2}{b_1 - b_2},$$

$$c_2 - b_2 = \frac{(c_2 - b_2)(b_1 - b_2)}{b_1 - b_2},$$

$$c_2 - b_2 = c_2 - b_2.$$

Последнее равенство истинно, что означает, что отрезки B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой. В этом случае графики функций являются подобными фигурами.

Случай 2.

$\dfrac{a}{c_1 - c_2} - \dfrac{1}{b_1 - b_2}$ отлично от нуля, тогда

$$x = \frac{c_2 b_1 - c_1 b_2}{c_1 - b_1 - (c_2 - b_2)}.$$

Подставим это значение в уравнение прямой B_1B_2 и получим $y = 0$.

Таким образом, во втором случае ордината точки пересечения прямых B_1B_2 и C_1C_2 равна 0, то есть центр гомотетии действительно лежит на оси абсцисс.

Случай 3.

Пусть теперь $b_1 - b_2 = 0$, но при этом $c_1 \neq c_2$. Можно убедиться сначала с помощью динамической модели, а затем доказать, что в этом случае получается гомотетия с центром в точке O (b_2; 0). И снова мы убеждаемся в том, что эта точка лежит на оси Ox.

Случай 4.

Если $c_1 - c_2 = 0$, но $b_1 - b_2 \neq 0$, то центр гомотетии имеет координаты: $x = c_2$, $y = 0$. Это значит, что и в этом случае центр лежит на оси абсцисс.

Случай 5.

$c_1 = c_2$, $b_1 = b_2$. Нетрудно убедиться, что в этом случае графики совпадут.

После такой тщательно проделанной работы у учеников составлено четкое представление о свойствах исследуемой функции. Можно ли было сделать то же самое без компьютерного инструмента? Вопрос риторический.

После такой тщательно проделанной работы у учеников составлено четкое представление о свойствах исследуемой функции.

Горелик Людмила Борисовна,
учитель математики
МОУ лицей № 102 г. Челябинска.