***Дубровский Владимир Натанович,
Поздняков Сергей Николаевич***

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ШКОЛЕ. ЗАНЯТИЕ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Преподаватели математики старшего поколения наверняка помнят книгу известного математика и исследователя психологии математического творчества Жака Адамара по элементарной геометрии (Ж. Адамар. Элементарная геометрия. Часть первая. Планиметрия. Издание третье. М., ОГИЗ).

Сейчас её можно найти в электронной библиотеке Московского центра непрерывного математического образования по адресу: http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/geometry/adamar-planim.htm

Замечательна эта книга ещё и тем, что в ней много задач на построение (циркулем и линейкой). В той же электронной библиотеке можно найти и классический российский сборник задач на построение И.И. Александрова; см. http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/geometry/alexandrov.htm

К сожалению, в какой-то момент модернизации образования стало принятым считать такие задачи устаревшими и не дающими современных знаний. Например Ж. Дьедонне, о концепции которого упоминалось в первой статье этой серии, считал более полезными упражнения на отыскание первообразных. Это, может быть, справедливо с сугубо практической точки зрения – действительно, инженерам нужно уметь считать интегралы, но строить геометрические фигуры по экзотическим наборам данных, да еще только таким ограниченным набором инструментов, как циркуль и линейка (а то и одним из них), явно нигде не потребуется. Даже вузов, предлагающих на вступительных экзаменах решение таких задач, почти не осталось, а внедрение ЕГЭ, вероятно, полностью их искоренит. (Заметим, что Дьедонне критиковал и вузы за включение в программу экзаменов «искусственных» геометрических задач.) С тех пор, однако, появилось много компьютерных программ, в которые заложен алгоритм вычисления первообразных (и не только). И это умение, или, если угодно, искусство стало столь же ненужным с прагматической точки зрения, как и умение решать задачи на построение. Теперь уже вряд ли кто-нибудь станет утверждать, что первое даёт больше пищи уму, более ценно для образования, особенно школьного, чем второе. Наоборот, в геометрических задачах на построение наиболее ярко проявляются черты инженерного или технического мышления, которое определяется психологами как понятийно-образно-действенное. Иными словами, ученик, решая абстрактную математическую задачу, связывает её с наглядной геометрической конструкцией, которую он создаёт и меняет, для того чтобы достичь поставленной цели. Таким образом, изучение геометрии является основой формирования технического мышления. Неудивительно поэтому, что в школах США вновь начали вводить курсы геометрии, выброшенные многими составителями школьных программ.

...динамическую конструкцию можно «шевелить»...

Вторую жизнь задачам на построение дали программы динамической геометрии.

Что нового добавляет этот инструмент к уже имевшимся качествам таких задач?

Во-первых, теперь у школьника появилась возможность не только описать построение теоретически, снабдив его наброском чертежа (у кого хватает терпения точно выполнить весь алгоритм построения циркулем и линейкой!), но и реализовать его, создав геометрическую конструкцию, которую в некотором смысле можно «пощупать». Это делает решение задач увлекательным для более широкого множества учеников.

Во-вторых, динамическую конструкцию можно «шевелить», непосредственно варьируя данные. С точки зрения обучения это имеет два следствия. С одной стороны, возрастают требования к самому построению – коротко говоря, оно должно быть идеально правильным, иначе при «шевелении» конструкция разрушится. С другой стороны, на новом уровне возрождается интерес к последнему этапу классической схемы решения задач на построение – «исследованию» (разрешимости и числа решений в зависимости от данных), которое в наше время обычно игнорируется.

В-третьих, программа позволяет использовать расширенный набор инструментов, экономящих время на построение без ущерба для его корректности. Речь идет об инструментах для построения середины отрезка, параллельной прямой и т. п., заменяющих стандартные алгоритмы построения циркулем и линейкой. Более того, пользователь может создавать новые инструменты на основе имеющихся (например, инструмент для проведения серединного перпендикуляра к отрезку или, скажем, для построения правильного пятиугольника с данной стороной). Это даёт импульс техническому творчеству, позволяет поставить новые математические задачи о выполнимости построений тем или иным набором инструментов.

В-четвертых, как уже говорилось на первом занятии, программа позволяет каждому ученику найти собственное решение задачи и убедить преподавателя в его истинности, основываясь на общем принципе «практика – критерий истины».

ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЙ

Кроме инструментов для построения точек, окружностей и отрезков (а также лучей и прямых), вынесенных в вертикальное меню, имеется возможность выбрать нужную команду построения из горизонтального меню в разделе **Построения**. Если открыть это меню в тот момент, когда на экране (листке электронного блокнота) ничего не построено или построено, но не выделено, то все команды окажутся неактивными – на рисунке видно, что ни одна из них не выделена таким же ярким цветом, как названия разделов горизонтального меню (рис. 1). Логику такого поведения

программы понять легко: для любого построения нужно задать ИСХОДНЫЕ ОБЪЕКТЫ. Уточним правильные действия на примере.

Задача. Построить окружность, вписанную в произвольный треугольник.

Для начала построим произвольный треугольник (как обсуждалось на прошлом занятии) и выведем на экран названия его вершин. Вспомним, что центр вписанной окружности находится на пересечении биссектрис треугольника (рис. 2).

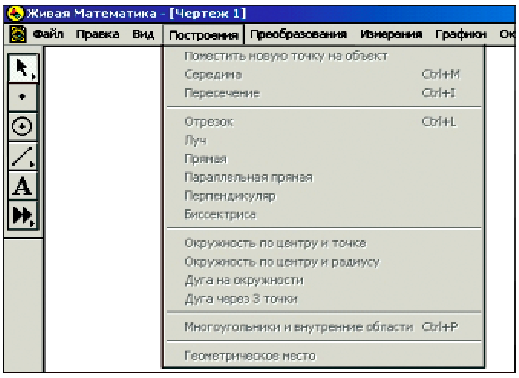


Рис. 1

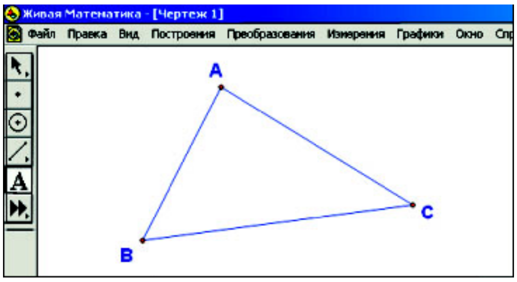


Рис. 2

Следуя предложенному принципу обучения компьютерному инструментарию, пробуем решить поставленную задачу, действуя «естественным» образом. При этом будем использовать дополнительные команды меню, заменяющие стандартные алгоритмы построений циркулем и линейкой. Рассуждаем так:

В меню **Построения** имеется команда «Биссектриса». Чтобы применить ее, надо както указать (отметить) нужный угол. Как можно определить угол? Двумя его сторонами, вершиной и сторонами или тремя точками, средняя из которых, как принято, берется за вершину, а две другие лежат на сторонах. Пробуем первые два способа, отмечая нужные элементы чертежа и пытаясь активизировать команду построения биссектрисы – не получается. Например, на рис. 3 показано, что при выделении двух отрезков активизируются команды помещения новых точек на выделенные отрезки, нахождения середин отрезков и построения точки их пересечения, но не нужная нам команда «Биссектриса».

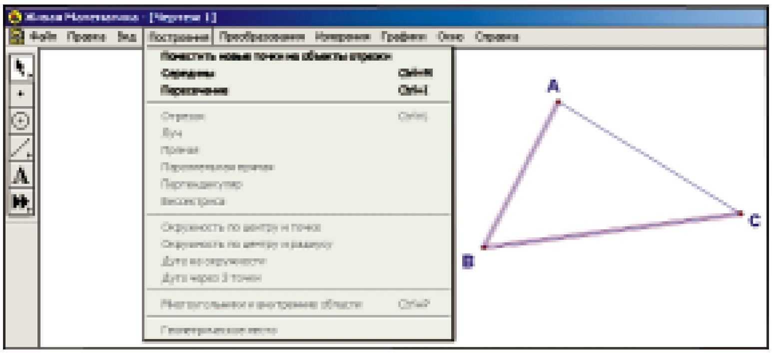


Рис. 3

Однако третий способ указания исходных данных оказывается подходящим (рис. 4).

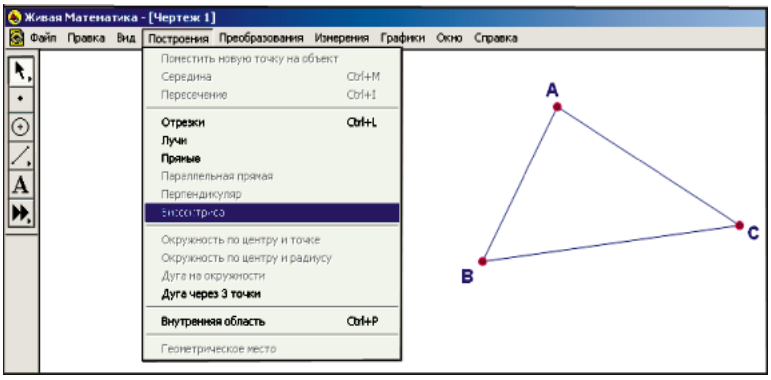


Рис. 4

И, если мы нажмём на соответствующую строку

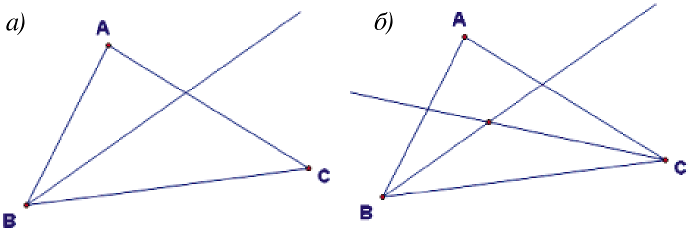


Рис. 5

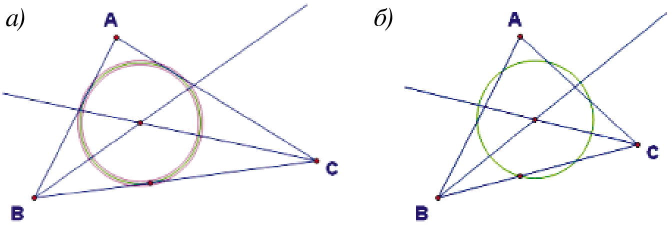


Рис. 6

меню, то появится биссектриса – луч, выходящий из вершины и делящий угол на две равнее части (рис. 5*а*).

Выделяя вершины треугольника в другом порядке, строим вторую биссектрису (рис. 5*б*), а затем точку пересечения биссектрис – центр вписанной окружности.

Теперь нужно построить вписанную окружность с заданным центром. Большой соблазн в этом месте – выбрать в вертикальном меню инструмент «циркуль» и построить окружность из найденного центра, доведя точку окружности до стороны треугольника, которой должна коснуться окружность (рис. 6*а*). Однако небольшое шевеление треугольника показывает ошибочность построения (рис. 6*б*) – окружность проходит через точку на стороне, но не обязательно касается стороны!

Вернёмся на несколько шагов назад, выбрав команду «Отменить» в меню **Правка** (горячая клавиша Ctrl+Z) и нажав её нужное число раз, и обдумаем порядок дальнейших построений. Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен стороне треугольника. Значит, чтобы найти точку касания, нужно из центра опустить перпендикуляр на сторону. Опять же подумаем, что нужно указать (отметить), чтобы команда построения перпендикуляра могла выполниться:

Нужно отметить ТОЧКУ, через которую проходит перпендикуляр и ОТРЕЗОК (сторону), к которому проводится перпендикуляр.

Будьте внимательны: никакие объекты, кроме этой точки и отрезка, не должны быть выделены – иначе появится неопределённость (рис. 7*а*, *б*).

Заметим, что перпендикуляр – это прямая (не отрезок и не луч).

Осталось найти точку пересечения перпендикуляра со стороной треугольника и ещё раз построить окружность с прежним центром, но теперь уже проходящую через построенную точку.

Это можно сделать, как описано выше, но можно и использовать команду меню **Окружность по центру и точке**.

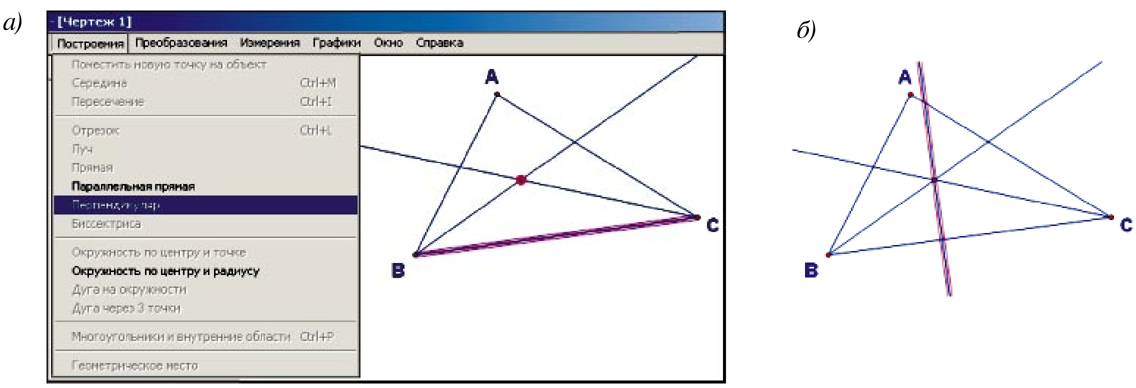


Рис. 7

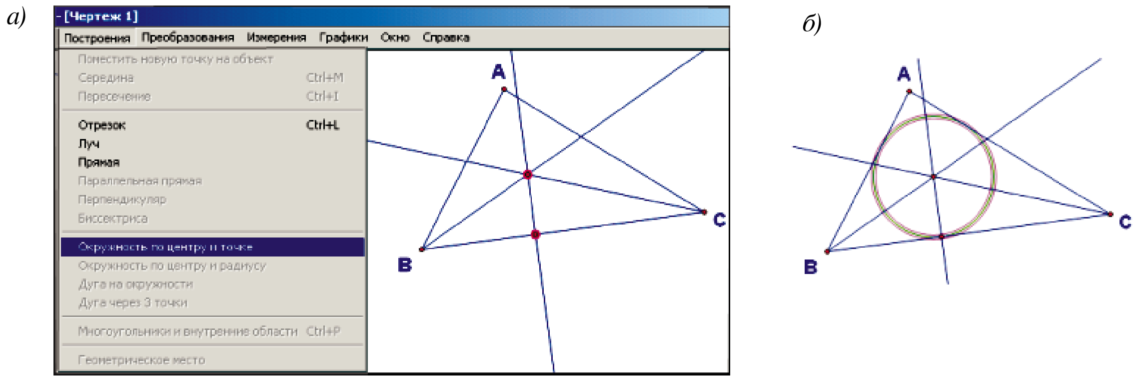
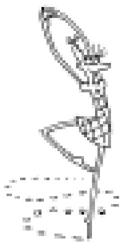


Рис. 8

Для этого надо выделить сначала центр окружности, а потом ее точку (и ничего больше) и нажать на данную команду (рис. 8). Если по каким-то причинам оказались выделены лишние объекты, нажмите на них мышкой – выделение снимется (либо щёлкните на пустой рабочей области экрана, чтобы снять все выделения, а затем выделить уже только то, что нужно).



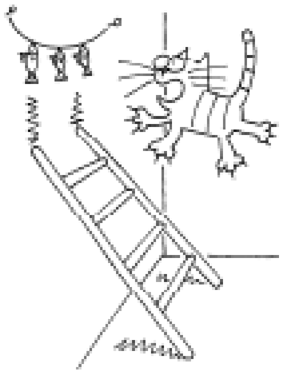
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Один из важнейших методов решения задач на построение – это метод пересечения множеств, или метод геометрических мест точек (ГМТ), как по сложившейся в геометрии традиции называют множества, задаваемые некоторыми условиями. Например, окружность определяется как множество (геометрическое место) точек, равноудаленных от данной точки (центра); отрезок *AB* иногда определяют как геометрическое место точек, сумма расстояний которых до *A* и *B* равна расстоянию *AB* и т. д. Решая приведенную выше задачу, мы исходили из того, что центр вписанной окружности треугольника равноудален от его сторон, а геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла (и лежащих внутри него), есть его биссектриса. (Тем самым, кстати говоря, мы и воспользовались методом ГМТ). Задачи на отыскание геометрических мест интересны и сами по себе: такие замечательные кривые, как конические сечения (эллипс, гипербола, парабола), гипо- и эпициклоиды, лемниската, конхоида и многие-многие другие могут быть определены как геометрические места, задаваемые весьма простыми условиями. Программы динамической геометрии позволяют без большого труда как строить эти красивые кривые, так и находить геометрические места, составленные из обычных прямых (или отрезков) и окружностей (или дуг), но задаваемых неочевидным образом. Например, можно непосредственно по определению построить множество точек, отношение расстояние от которых до одной данной точки в *k* раз больше, чем до другой (известная окружность Аполлония). Для одних учеников достаточным достижением будет само построение ГМТ, от других можно потребовать и теоретического обоснования найденного конструктивно ответа.

В программах динамической геометрии встречаются два способа построения ГМТ:

– можно «подкрасить» точку (команда «След»), в результате чего при перемещении она будет оставлять след на экране; таким образом можно увидеть траекторию движения точки, но эта траектория не является «геометрическим объектом» – она остается в своем первоначальном виде при любых дальнейших изменениях картинки и не привязана ни к каким фигурам на чертеже;

– можно построить геометрическое место как кривую, обладающую (почти) такими же свойствами, как и стандартные линии – прямые, окружности и их части; в частности, можно исследовать, как изменяется ГМТ при изменении задающих его параметров.



Какую траекторию опишет при этом котенок?

Важно понимать, что и в одном и в другом случае нужно, прежде всего, по данным задачи построить «точку-карандаш», пробегающую искомое геометрическое место, и обеспечить механизм этого «пробега». Обычно создается «точка-параметр», от которой зависит вся конструкция и которую можно свободно перемещать по некоторой линии. При этом перемещении конструкция изменяется с сохранением условий задачи, а точка-карандаш рисует ГМТ или его часть.

Рассмотрим два способа построения ГМТ на примерах.

Пример 1. «Сползающая лестница».

Постановка задачи. К стене приставлена лестница (отрезок, концы которого лежат на сторонах прямого угла, образованного стеной и полом), на середине лестницы сидит котенок (его изображает точка). Лестница начинает сползать. Какую траекторию опишет при этом котенок?

Смоделируем задачу. Для этого построим две точки и по ним произвольный луч (выделить точки и выбрать команду **Луч** из меню **Построения**). Затем построим перпендикуляр, проходящий через вершину луча (выделить луч, вершину и выбрать команду **Перпендикуляр** из меню **Построения**). Получится картинка, показанная на рис. 9*а*.

Эту картинку можно считать достаточной для изображения стены и пола, а можно сделать более правдоподобной, заменив вертикальную прямую на луч, но это мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Теперь построим лестницу. Нам нужно, чтобы:

1) её основание было подвижным;

2) её длина не менялась при перемещении основания.

Первой (и правильной!) мыслью, как создать подвижную точку, будет выбрать инструмент «Точка» и щёлкнуть на горизонтальном луче. Другой вариант – выделить луч и выбрать в меню **Построения** команду **Поместить новую точку на объект...** (рис. 9*б*). Построенную точку передвинем в удобное место луча.

Решим теперь проблему постоянной длины лестницы. Вспомним, что в постановке геометрических задач на построение длина задается отрезком. Построим произвольный отрезок; он будет задавать длину лестницы (рис. 10*а*).

Теперь надо нарисовать лестницу, основание которой находится в построенной точке на луче, а длина равна длине

а) *б)*

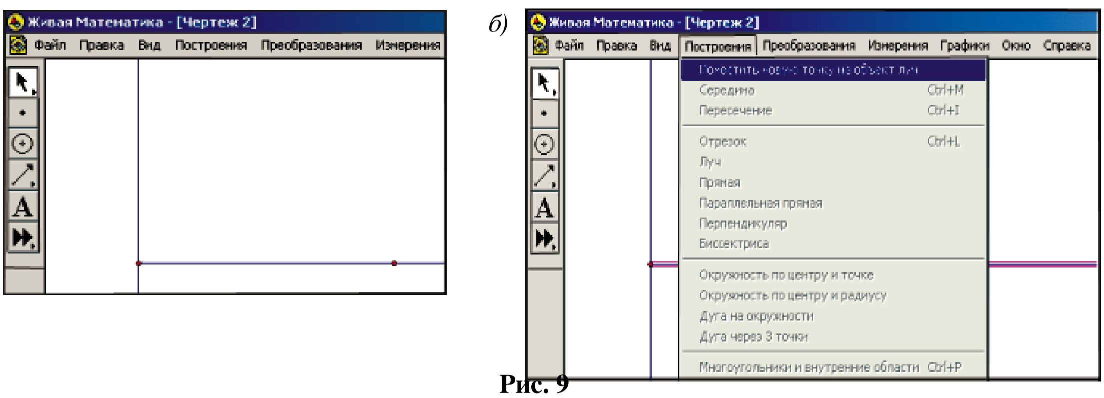


Рис. 9

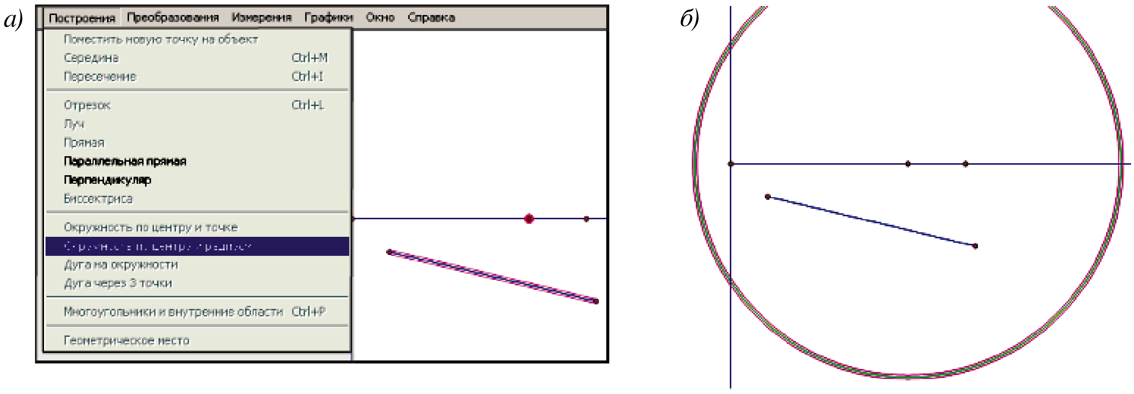


Рис. 10

построенного отрезка. Чтобы найти верхний конец лестницы, нужно из основания как центра провести окружность данного радиуса – стандартная операция для которой и создан циркуль. Выделив нужные точку и отрезок, поищем соответствующую команду в меню **Построения**. Вот она (рис. 10*а*): **Окружность по центру и радиусу**. Результат на рис. 10*б*. Осталось соединить точку пересечения окружности и «стенки» с основанием лестницы (центром окружности) и, для красоты, скрыть окружность, так же как и точку, определявшую горизонтальную прямую, чтобы за неё случайно не «дёрнуть». Теперь, передвигая основание лестницы, можно увидеть, как она «сползает» и поднимается.

Теперь построим середину отрезка-лестницы, выделим её (при построении она выделяется автоматически как текущий результат команды «Середина») и найдём в меню Вид команду **Оставлять след...** (рис. 11а). Если снова подвинуть основание лестницы, то её середина будет оставлять след, похожий на дугу окружности (рис. 11*б*). И наш эксперимент заканчивается постановкой задачи «Докажите, что геометрическое место середины сползающей лестницы – четверть окружности».

Недостаток такого представления геометрического места точек в том, что связь полученной линии с исходными данными оборвана. Стоит только немного переместить нашу модель, как след перестанет изображать искомое ГМТ (рис. 11*в*).

Второй способ построения ГМТ проиллюстрируем на примере построения эллипса по его классическому определению.

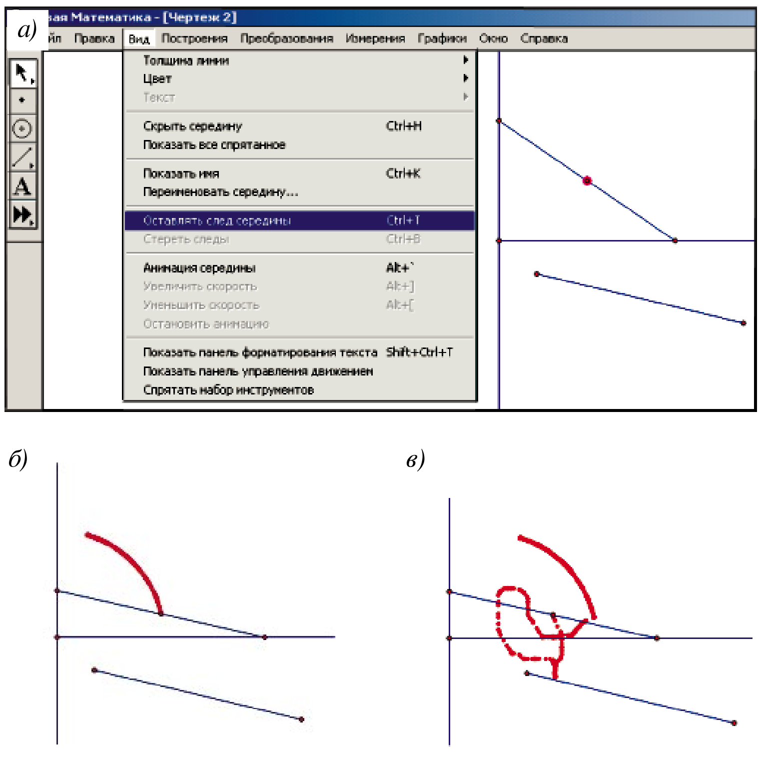


Рис. 11

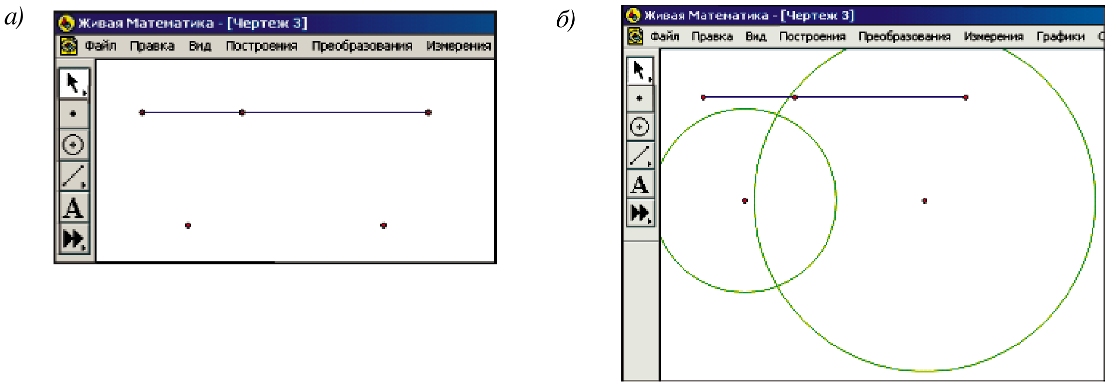


Рис. 12

Пример 2. Эллипсом называется множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек (фокусов эллипса) постоянна. Построить эллипс по данному определению.

Сначала построим две точки – фокусы эллипса. Далее по аналогии с предыдущей задачей зададим отрезком константу (сумму расстояний от точки эллипса до фокусов). На отрезке возьмем произвольную точку (точку-параметр), которая разбивает его на две части; они и будут расстояниями до фокусов эллипса (рис 12*а*). При движении точки-параметра по отрезку эти расстояния изменяются, но их сумма остается постоянной.

Исходный отрезок удобно скрыть и построить два маленьких, на которые его разбивает точка-параметр. Теперь проведём окружности из фокусов как из центров с радиусами, равными маленьким отрезкам (рис 12*б*).

Точки пересечения окружностей удовлетворяют условию задачи и лежат на искомом геометрическом месте – эллипсе (рис. 13).

Наконец, перейдём к главному: ВЫДЕЛИМ ТОЧКУ-ПАРАМЕТР и ОДНУ ИЗ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ (точку-карандаш). В меню Построения выберем команду **Геометрическое место.**

Результат – половинка эллипса (рис. 14*а*), пробегаемая этой точкой. Отметим, что в отличие от следа, который рисуется при движении точки-карандаша, геометрическое место появляется сразу целиком, точку двигать не нужно. Аналогично построим вторую половинку, выделив вторую точку пересечения и точку-параметр (и только их) (рис. 14*б*).

Если поменять параметры эллипса, то есть фокусы и сумму расстояний от точек эллипса до фокусов (длину исходного отрезка), то соответственно будет меняться и эллипс (рис. 15).

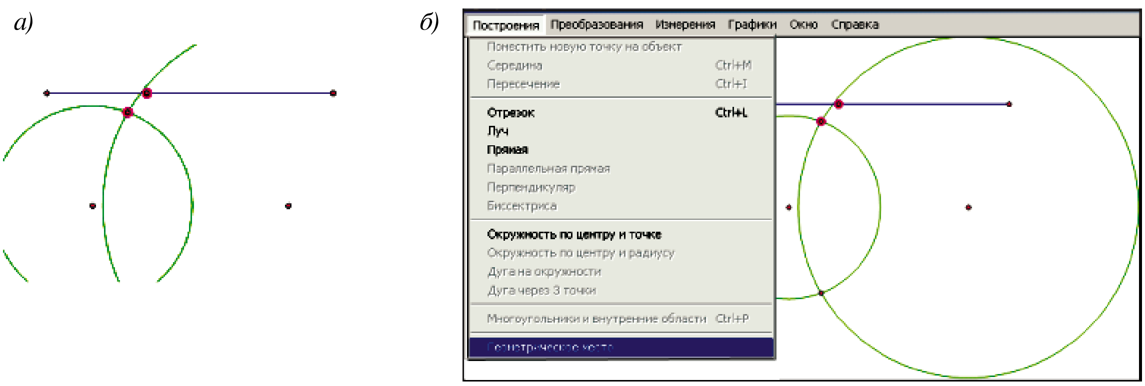
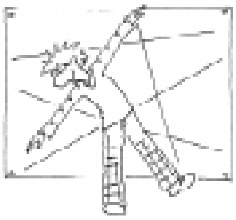


Рис. 13

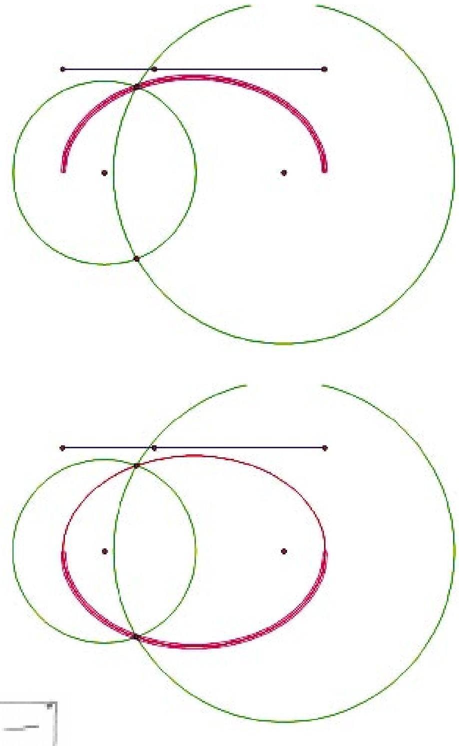
ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В «МАТЕМАТИЧЕСКОМ КОНСТРУКТОРЕ»

Как на нашем первом занятии, познакомимся с отличиями «Математического конструктора» от «Живой Математики» с точки зрения его использования для моделирования задач на построение. Собственно, их немного, и о большинстве из них уже было сказано. Поэтому здесь мы ограничимся кратким повторением.

Набор инструментов для построений у двух программ практически одинаков. В «Математическом конструкторе» их немного больше: например, имеются инструменты для проведения окружности через три точки, для деления отрезка на n частей и др. Важнее то, что каждый инструмент равноправно представлен и на панели, и в меню, и его можно использовать в двух режимах – в режиме команды и в режиме инструмента. Режим команды был описан выше на примере «Живой Математики». В режиме инструмента мы сначала нажимаем кнопку этого инструмента (или выбираем его в меню), а потом указываем те объекты, к которым его нужно применить. Например, выбираем инструмент «Биссектриса», а потом указываем три точки, задающие угол (вторая – вершина угла). Имеется отличие в способе выделения объектов. По умолчанию используется одиночный выбор, т.е. при выделении какого-либо объекта (щелчке инструментом «Стрелка» на нем) все другие выделения автоматически снимаются. Чтобы иметь возможность выделять по очереди несколько объектов, как в «Живой Математике», надо выбрать инструмент «Множественный выбор» (рис. 16) или при повторных выделениях удерживать любую из клавиш Ctrl или Shift.



Следующее отличие касается построения следов и геометрических мест. В МК версии 2.0 реализовано только рисование следов, правда, расширен набор команд, управляющих следами, например, следы можно сохранять. В его следующую версию, которая выходит в продажу осенью 2008 г., включена и команда построения ГМТ. Более того, геометрические места в ней являются, так сказать, более полноценными объектами, чем в ЖМ, в частности, можно находить точки их пересечения с другими объектами.



а)

б)

Рис. 14

Важным достоинством МК является встроенное в него средство проверки правильности построения: при создании учебного задания разработчик может поместить в него кнопку, при нажатии на кото-

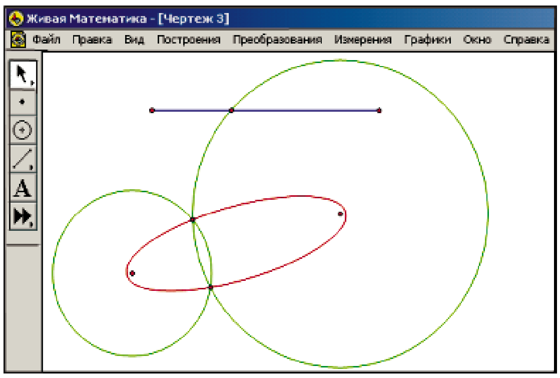


Рис. 15

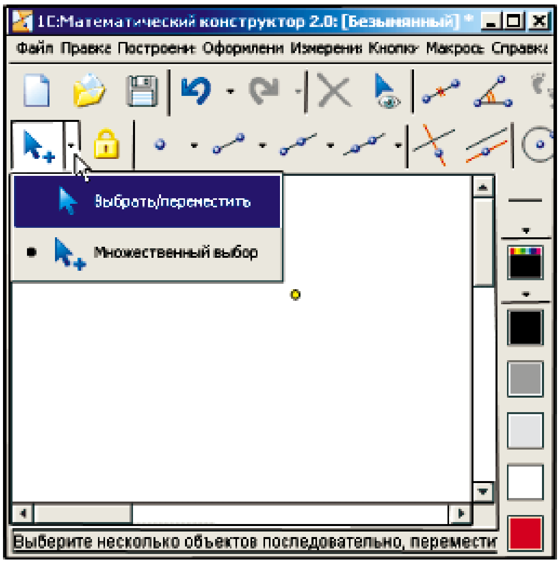


Рис. 16

рую программа проверяет, построена ли фигура, совпадающая с искомой, и выдает соответствующее сообщение. Более подробный рассказ об этом средстве войдет в одно из следующих занятий.

Наконец читателям, которые захотят подробнее познакомиться с задачами на построение и поработать с их компьютерными реализациями в формате МК, можно рекомендовать материалы нового комплекса «Конструктивные геометрические задания. 5–11 кл.», который можно найти в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов: http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/3298222e-279f-475d-85f6-36115554a9cb/?

Наряду с большим числом (около 350) заданий-моделей по планиметрии и стереометрии, он включает базу задач на построение с оригинальной системой поиска, теоретические статьи и методические указания.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. В меню **Вид** найдите операцию, удаляющую следы точки с экрана. Что это за команда?

2. Найдите команду, которая отменяет свойство точки оставлять след. Обратите внимание на доступность команды, когда на экране нет выделенных объектов и когда выделена только точка, оставляющая след. Как будет действовать эта команда, если выделить две точки, одна из которых оставляет след, а вторая – нет.

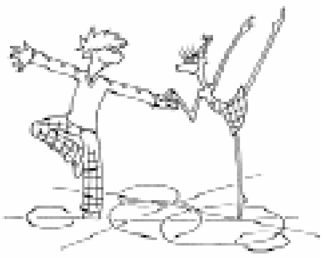
3*а*. Разместите на «лестнице» произвольную точку M и задайте ей свойство оставлять след. Какой фигурой будет (предположительно) след этой точки, если она не будет находиться в середине лестницы?

3*б*. Предположив, что след M задаётся формулой $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (как при этом выбирается система координат?), найдите a и b для случая, когда точка M втрое ближе к верхнему краю, чем к нижнему (как построить такую точку?).

3*в*. Постройте геометрическое место точек M и посмотрите, как меняется его форма при изменении положения «лестницы».

3*г**. Докажите, что след точки M описывается указанным равенством в первой четверти.

4. Выполните задание, предложенное в тексте занятия: постройте (произвольный) прямой угол.



5*. Постройте гиперболу по определению: множество точек, разность расстояний которых от двух заданных (фокусов гиперболы) фиксирована по абсолютной величине.

Дубровский Владимир Натанович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова,

Поздняков Сергей Николаевич,
профессор кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ «ЛЭТИ».