Горелик Людмила Борисовна

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ И ПОИСКОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Самое яркое отличие ИУМК от традиционного учебника и, следовательно, одно из самых убедительных доказательств инновационности ИУМК «Математика в школе – XXI век» – наличие существенного элемента «Исследовательские работы и поисковые задания». Рассмотрим отдельно каждый из этих видов.

1. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ

Почти все модули ИУМК содержат задания на исследование вопросов, связанных с темой учебника. Этим поддерживается интерес учащихся к математике, а также дается возможность проявить творчество.

Осуществление этой возможности во многом зависит от представления учителя о целях обучения. Для иных подготовка к ЕГЭ – высшая цель, к которой нужно стремиться, не теряя времени «на пустяки». Желание других – реализовать себя в совместной творческой деятельности с учащимися. Мы не будем обсуждать преимущества и недостатки того или иного стиля преподавания. Наша задача – поделиться тем скромным опытом, который приобрели, работая с ИУМК «Математика в школе – XXI век».

Тема одной из исследовательских работ учебника – «О числах и будильниках (простые числа)». В пояснительном тексте дается ссылка на книгу Д.В. Аносова «Взгляд на математику и нечто из нее», где приводится пример «короткой» арифметики Д. Гильберта, построенной на множестве чисел вида $4k + 1$ (k – целое неотрицательное число), в котором определена операция умножения. Проиллюстрируем возможный подход к развитию темы.

Проблема, которая обнаруживается в связи с рассмотрением этого множества, состоит в том, что основная теорема арифметики в нем не выполняется, а именно: некоторые числа имеют неоднозначное разложение на «простые» (то есть в этом множестве неразложимые) множители. Предлагается выполнить следующие задания.

«1) Приведите другие примеры разложимых и неразложимых чисел вида $4k + 1$*... Существуют ли разложимые числа вида* $4k + 1$*, имеющие единственное разложение?*

2) По аналогии с доказательством бесконечности простых чисел докажите, что число неразложимых чисел вида $4k + 1$*... бесконечно.*

3) Исследуйте другие множества подобного вида, например, $3k + 1$*».*

Ответим сначала на первый вопрос. Трудно ожидать от учащихся, даже от старшеклассников, «обобщения с места», о котором говорили В.В. Давыдов [1, с. 152–153] и В.А. Крутецкий [2, с. 366]. Самое простое решение – выбрать требуемые числа из списка элементов рассматриваемого множества (обозначим его M). Но если список элементов множества M составить нетрудно (с помощью электронной таблицы, которая значительно ускорит процесс и избавит нас от устного счета), то разложить их в M на неразложимые множители не так просто. Какова процедура разложения?

Прежде чем начать разложение, раскрасим таблицу. Отметим красным цветом простые числа. Для этого используем программу Maxima или любой другой доступный учащимся компьютерный инструмент, разлагающий числа на простые множители, например виртуальную лабораторию «Делимость чисел» (ЦОР «Математика 5–11. Практикум. Учебное электронное издание. 1 CD. М.: ООО «ДОС», 2003»). Все остальные элементы разложим на простые в N числа. Далее используем такой алгоритм.

- Если разложение содержит 2 множителя, то, ввиду того, что M *замкнуто* относительно умножения, достаточно убедиться, что один из множителей принадлежит M (список элементов множества M должен быть упорядочен по возрастанию, тогда легко обнаружить принадлежность).
- Если в разложении 3 множителя, то возможны такие случаи.

1. Один из них принадлежит M. Тогда перемножаем остальные множители. Их произведение, опять же в силу замкнутости множества по умножению, будет принадлежать M. В этом случае из трех простых в N множителей получается два множителя, неразложимых в M.
2. Ни один не принадлежит M. Тогда число неразложимо в M.

- Если получаются 4 множителя и больше, то, в зависимости от их принадлежности или непринадлежности множеству M, умножаем попарно множители, не принадлежащие M, и оставляем без изменения множители, принадлежащие ему (если они есть). При этом могут получиться различные варианты сочетания множителей. Отсюда и неоднозначность разложения в M.

Рис. 1

Таблица 1. Разложение чисел в *M*

1		5		9		13		17	
21		25	5*5	29		33		37	
41		45	5*9	49		53		57	
61		65	5*13	69		73		77	
81	9*9	85	5*17	89		93		97	
101		105	5*21	109		113		117	9*13
121		125	5*25	129		133		137	
141		145	5*29	149		153	9*17	157	
161		165	5*33	169	13*13	173		177	
181		185	5*37	189	9*21	193		197	
201		205	5*41	209		213		217	
221	13*17	225	5*45 = 9*25	229		233		237	
241		245	5*49	249		253		257	
261	9*29	265	5*53	269		273	13*21	277	
281		285	5*57	289	17*17	293		297	9*33
301		305	5*61	309		313		317	
321		325	5*65 = 13*25	329		333		337	
341		345	5*69	349		353		357	17*21
361		365	5*73	369	9*41	373		377	13*29
381		385	5*77	389		393		397	
401		405	5*81 = 9*45	409		413		417	
421		425	5*85 = 17*25	429	13*33	433		437	
441	9*49 = 21*21	445	5*89	449		453		457	
461		465	5*93	469		473		477	9*53
481	13*37	485	5*97	489		493		497	
501		505	5*101	509		513		517	
521		525	5*105 = 21*25	529		533		537	
541		545	5*109	581		553		557	
561	17*33	565	5*113	569		573		577	
581		585	5*117 = 13*45	589		593		597	
601		605	5*121	609	21*29	613		617	
621	9*69	625	5*125 = 25*25	629	17*37	633		637	13*49
641		645	5*129	649		653		657	9*73
661		665	5*133	669		673		677	
681		685	5*137	689	13*53	693	9*77 = 21*33	697	17*41
701		705	5*141	709		713		717	
721		725	5*145 = 25*29	729		733		737	
741	13*57	745	5*149	749		753		757	
761		765	5*153 = 17*45	769		773		777	21*37
781		785	5*157	789		793	13*61	797	
801	9*89	805	5*161	809		813		817	
821		825	5*165 = 25*33	829		833	17*49	837	9*93
841	29*29	845	5*169 = 13*65	849		853		857	
861	21*41	865	5*173	869		873	9*97	877	
881		885	5*177	889		893		897	13*69
901	17*53	905	5*181	909	9*101	913		917	
921		925	5*185 = 25*37	929		933		937	
941		945	5*189=21*45	949	13*73	953		957	29*33
961		965	5*193	969	17*57	973		977	
981	9*109	985	5*197	989		993		997	

Результат этой работы виден в таблице 1. Для разложимых чисел дано их разложение. Фоном выделены ячейки, в которых разложение имеет несколько вариантов.

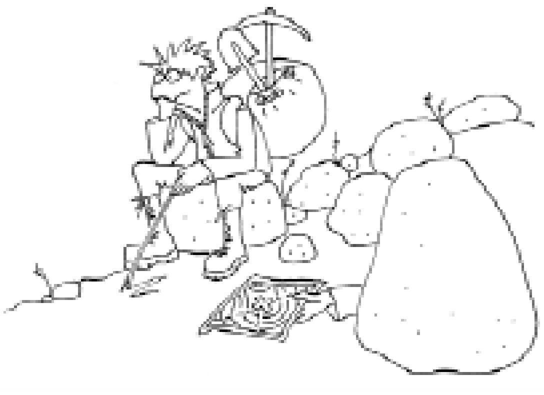
Как видно из таблицы, из 250 первых элементов множества M только 15 допускают разложение на «простые» в M множители (это всего лишь 6%).

Но ответить на первый вопрос задания – это еще не исследование. Без таблицы ученики не могут привести примеры чисел, обладающих требуемыми свойствами, так как наугад их вряд ли можно выбрать. Здесь нужно сделать теоретическое обобщение.

Итак, проблема состоит в том, что мы можем указать неоднозначное разложение только перечислительным методом. Но это нерационально, так как требует времени. Кроме того, с математической точки зрения такой метод неинтересен. Как найти более интересный способ?

Если на этом этапе работы учитель поторопится и подскажет ответ, ученики никогда не научатся проводить исследования. Как бы долго ни затянулся процесс поиска, педагог всеми способами только поддерживает интерес к исследованию. Например, организует обмен мнениями, устраивает брейн-ринги, хвалит за любое продвижение вперед.

Нет рецепта управления дальнейшей деятельностью учащихся, кроме поддержания мотивации на уровне, обеспечивающем ее продолжение. Работа над проблемой может уйти в подсознание [3, с. 43–44], так как бесплодные поиски и усталость на время прерывают сознательный этап решения проблемы. Придет ли после отдыха или смены деятельности озарение, никто не может сказать. В исследовательской деятельности нет гарантии успеха. И если мотивация поиска уже настолько слаба, что теряется интерес к задаче, то учителю пора продумать подсказки, наталкивающие на открытие.



...если мотивация поиска уже настолько слаба, что теряется интерес к задаче, то учителю пора продумать подсказки...

Последовательность подсказок может быть такой.

- Всегда ли произведение двух простых в N множителей числа из множества M принадлежит этому множеству? Как это можно доказать?
- В том случае, когда учитель не получает ответа на первый вопрос, он дает подсказку в виде следующего: «Что общего в этих простых множителях?» (можно ли записать формулу этих чисел?).
- При очередной неудаче задаем вопрос, какой остаток от деления на 4 имеют эти числа. На этот вопрос трудно не ответить. И если формула этих чисел получена (они имеют вид $4k + 3$), то теперь уже легко перемножить в общем виде два таких числа и убедиться, что их произведение принадлежит множеству M.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что формула простого числа в разложении названа исходя из того, что было произведено несколько проб с помощью уже найденных в таблице разложений. Но нет никакой уверенности в том, что остальные числа будут иметь такие же множители в разложении: либо $4k + 3$, либо $4k + 1$. Это всего лишь гипотеза. Ее нужно доказать.

Если учитель в процессе работы над задачей не хочет выходить за рамки программы, то можно предложить ученикам перебрать все варианты остатков при делении на 4 и доказать, что *только* числа вида $4k + 3$ при попарном умножении дают числа вида $4k + 1$, то есть их произведение является элементом множества M. Если же у учителя есть достаточный запас времени и желание познакомить учеников с теорией, то он расскажет о полной системе вычетов по модулю, покажет, что выгоднее брать не остатки от деления на 4, а вычеты, модуль которых не превосходит половины 4, то есть числа –1, 0, 1, 2, так как $3 \equiv -1 \mod m$.

Это подготовит учащихся к обобщению, так как теперь легко провести следующие рассуждения. В каждой системе вычетов по любому модулю m есть числа 1 и –1, то есть классы чисел вида $mq-1$ и $mq+1$. Произведение чисел вида $mq-1$ и только этих чисел дает число вида $mq+1$. Это значит, что каждое число, не являющееся простым в N, но неразложимое во множестве чисел вида $mq+1$, имеет в качестве множителей числа вида $mq-1$. Их количество четно. И если таких множителей больше двух, то мы можем получить в M неоднозначное разложение.

Следующий этап работы – рассмотрение различных случаев простых множителей: есть ли среди них равные и сколько их, как это влияет на число различных разложений в M. Можно вывести формулу для числа различных разложений. С этого момента мы уже можем без таблицы записывать все виды чисел множества M.

И, наконец, доказательство бесконечности чисел, неразложимых в M, легко провести по аналогии с известным доказательством бесконечности простых в N чисел.

Возникает интересный вопрос: решена ли проблема? Скорее всего, нет. Если читатель пойдет по нашим стопам, он обнаружит еще, по крайней мере, один вопрос, ответа на который у нас пока нет. Когда можно считать исследование законченным? Будет ли ответ объективным?

Д.Б. Богоявленская [4, с. 108] говорит об *интеллектуальной* активности как деятельности подлинно творческой. Она характеризуется тем, что человек по своей инициативе выходит за рамки решаемой задачи, ставит свои собственные цели и продолжает исследование. Именно это поведение и должно быть моделью творчества целью воспитания учеников.

Что дает учащимся исследовательская работа? Если они впервые приступают к ней, то вопросы-подсказки учителя, а также собственные мучения в раздумьях над проблемой, переживание неприятных моментов неудач, а затем радости открытия демонстрируют способ поисковой деятельности и обогащают опыт учеников. Создается, по словам Л.С. Выгодского, «ближайшая зона развития», работа в которой с помощью учителя создаются предпосылки для дальнейшей самостоятельной деятельности.

2. ПОИСКОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Условно мы разделили поисковые задания на две группы: задания на конструирование (поиск математических объектов, обладающих указанными свойствами) и задания на поиск информации, в том числе с использованием ресурсов Интернета.

2.1. ЗАДАНИЯ НА КОНСТРУИРОВАНИЕ

Вот один из примеров, которые мы условно назвали заданиями на конструирование. Процитируем учебник.

«Рассмотрим занимательный пример.

Верно ли, что следующее равенство является тождеством?

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{1-x^2}\,.$$

В Википедии находим определение тождества:

...переживание неприятных моментов неудач, а затем радости открытия демонстрируют способ поисковой деятельности...

«Тождество (в математике) – равенство, выполняющееся на всем множестве значений входящих в него переменных».

В нашем примере допустимые значения для левой части – числа от –1 *до* 1*, а в правой – числа больше или равные* 1 *и меньше или равные* –1*. Таким образом, допустимыми для обеих частей являются только* –1 *и* 1*. Для этих значений обе части уравнения равны* 0*. Значит, оно является тождеством!*

Задание. Найдите другие занимательные тождества и дайте доказательство их истинности».

Какова реакция учащихся на это задание? Они начинают подбирать примеры, которые по конструкции являются точными копиями тождества, приведенного выше, и быстро теряют интерес к работе. Задание не вызывает у них удивления. Цель учителя на данном этапе – разбудить чувства учеников, заставить их удивляться, возмущаться, вызвать у них желание возражать, приводить контрпримеры. Как это сделать?

Поступим следующим образом. Не будем пока раскрывать секрета «странности» этого тождества, а попробуем, не открывая учебника, сначала задать только вопрос, тождество ли это (не давая определения тождества). Увидев приведенное выше равенство, торопливые дети сразу начинают возражать. Они говорят, что это равенство не является истинным, потому что числа x^2-1 и $1-x^2$ противоположные, следовательно, друг другу равняться не могут. При этом они забывают и о нуле, и об области определения корней четной степени. Другие вообще не понимают, чего от них требуют, потому что приучены к таким заданиям, в которых уже известно, что данное равенство тождеством является, и остается только это доказать. Нужно еще добавить, что арсенал способов для подобного доказательства у них очень скуден. Учащиеся знают такой алгоритм действий в подобных случаях: с помощью тождественных преобразований привести левую часть к виду правой или правую часть к виду левой. Можно преобразовывать одновременно и левую, и правую части до тех пор, пока не получатся одинаковые выражения. И это все.

Вернемся к заданию. Какие преобразования левой и правой части равенства $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{1-x^2}$ можно выполнить, чтобы привести их к одному и тому же виду? Таких преобразований нет. Это сразу ставит учащихся в тупик. Некоторые недолго удерживают в памяти задание и заменяют его «привычным»: решить уравнение $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{1-x^2}$. Впрочем, это хорошее начало для ответа на заданный вопрос, достаточно только убедиться в том, что множество корней уравнения совпадает с областью его определения. Но этот шаг возможен только тогда, когда решающий полностью понимает задачную ситуацию, а не просто применяет заученные правила.

Бездумное применение алгоритмов, формул, правил – большая беда школьного обучения. Против механического заучивания знаний и натаскивания учащихся на решение «нужных» задач возражал еще М. Вертгеймер: «...наибольшую опасность для развития... представляет, прежде всего, слепое вспоминание, слепое применение чего-то заученного, старательное выполнение отдельных операций, неспособность увидеть всю ситуацию в целом... Хотя у меня нет достаточных количественных данных на этот счет, мне кажется, что способность продуцировать творческие процессы часто значительно уменьшается, когда школьники привыкают к механическому заучиванию» [5, с. 34].

Что мешает ученику проявить творчество в связи с предложенным ему заданием сконструировать интересные тождества?

Во-первых, нужно отметить незнание или недостаточное осознание понятий «уравнение» и «тождество». Как соотносятся между собой эти понятия? Объем какого из них шире? Вариант вопроса: может ли уравнение быть тождеством, и в каком случае это происходит?

Во-вторых, на хорошо накатанном пути школярства не часто встречаются предложения придумать что-то свое, проявить инициативу. А наказание в виде плохой оценки за ошибку не только отбивает охоту к творчеству, но и порождает страх перед необходимостью действовать самостоятельно.

В-третьих, у учащихся нет опыта развития сюжета задачи: ее обобщения или, наоборот, специализации, рассмотрения частных случаев (таких, как, например, крайний иди ведущий частный случай, частный случай-представитель и т. д., о чем говорил Д. Пойа [6, с. 45–50]. Отсутствие этого опыта объясняет то, что десятиклассники, подбирая примеры «странных» тождеств, беззастенчиво эксплуатируют идеи, заложенные в исходном тождестве: $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2m]{-f(x)}$, где 0 входит в область значений функции $y = f(x)$.

В-четвертых, в школьной практике обучения математике укоренились преимущественно дедуктивные рассуждения и, как следствие, однозначные ответы. У учащихся не развивается дивергентное мышление, что свойственно креативным процессам. Индуктивный подход в учебниках математики встречается крайне редко. Не выявляются противоречия, не ставятся проблемы. Все гладко, все строго вытекает из предыдущего знания и не допускает противоречивых толкований. Однако, по мнению У. Байерса [7], «двусмысленность присутствует всегда, от самых элементарных уровней математики до наиболее передовых. При изучении науки это создает большие трудности, в исследовательской же работе двусмысленность является источником развития, прогресса». И далее: «Двусмысленность является одной из важнейших характеристик математического мышления».

В применении к нашему заданию с тождеством показателен пример Байерса о двусмысленности понятия «переменная *x*»: «В уравнении $x + 2 = 4$ переменная *x* обращается к какому-то конкретному числу или к любому? Ответ будет неоднозначным. В начале решения *x* может быть любым числом, в конце – только 2. Также в конце рассуждений мы утверждаем, что любое значение *x*, не равное 2, является нерешением, то есть речь снова идет о любом числе... Если осознавать это, то решение уравнения сложно назвать чисто механическими рассуждениями. Ученику нужно иметь в виду оба контекста выражения и применять нужный в зависимости от ситуации» [там же].

Таким образом, в толковании терминов «уравнение» и «тождество» определяющим является множество решений и «нерешений», а важной процедурой – доказательство того, что множество «нерешений» пусто. В этом случае уравнение называют тождеством.

Итак, поработав над понятиями равенства, уравнения и тождества, ученики начинают понимать, что странность данного тождества в том, что области допустимых значений переменной его левой и правой части совпадают в отдельных точках, и в этих точках значения левой и правой части равны. Сразу же возникает зрительный образ: если рассматривать эти части как функции, то график одной из них продолжает график другой функции, образуя общую непрерывную линию. Для этого достаточно, чтобы области определения функций представляли собой либо отрезки, либо закрытые лучи. Это основное суждение. Выбрав такие функции[1], можем с помощью преобразований «сцепить» «края» их графиков.

Заметим, что это уже не случайное блуждание в поисках странных тождеств. Получен один из *принципов* их построения. И это плодотворная идея, так как мы сразу же отрываемся от заданной конструкции из алгебраических выражений и получаем возможность сочетать алгебраические и трансцендентные функции, то

[1] Это могут быть и функции, область определения которых искусственно *редуцирована* к отрезку или закрытому лучу, например, $y = \cos x, x \in [0, \pi]$. Но интереснее брать такие функции, в которых естественная область определения уже представляет собой отрезок или закрытый луч.

есть получать, на наш взгляд, более интересные тождества.

Какие же функции имеют областью определения отрезки или закрытые лучи? Из трансцендентных функций это, например, $\arcsin x$ и $\arccos x$. Из алгебраических – корни четной степени[1].

Построим графики этих функций. Теперь мы имеем возможность с помощью параллельных переносов (а, возможно, и других движений, например симметрии относительно биссектрисы первого и третьего координатного угла) и растяжений или сжатий графиков подогнать их один к другому так, чтобы получилась непрерывная линия[2].

Давайте осознаем, что же произошло. Мы получили возможность построения непрерывных линий из готовых частей, «перекладывая» их в выбранной системе координат нужным образом. Это конструирование в прямом смысле слова. Оно легко дается учащимся хотя бы потому, что возникает почти физическое ощущение манипулирования *предметами*, так как зрительные образы функций воспринимаются как материальные. Остается только научиться переводить физические перемещения в знаковую форму. Но это уже другая тема, которую здесь мы не обсуждаем.

Итак, первый этап работы со «странными» тождествами закончен. Он был посвящен подбору левой и правой частей равенства таким образом, чтобы множества допустимых значений переменной левой и правой части имели *конечное* число общих точек. Зацепимся за слово «конечное» и последуем за безумной идеей получения бесконечного множества таких точек. Оказывается, не такая уж она и безумная. Достаточно немного изменить форму исходного тождества, с которого мы и начали работу. Взять, например, такое уравнение:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)} = \\ = \sqrt{(1-x)(x-2)\ldots(x-n)},$$

где n – натуральное нечётное число.

Областью определения уравнения является начальный отрезок ряда натуральных чисел, который можно сделать сколь угодно длинным. Но так как каждое из этих натуральных чисел является также и корнем данного уравнения, то оно не что иное, как тождество.

Продолжая обобщать задачу, поставим такой вопрос: можно ли построить тождество так, чтобы множество значений его переменной представляло собой не дискретное, а непрерывное множество?

Если с помощью равносильных преобразований из одной части равенства можно получить другую, то ответ на вопрос тривиален: при непрерывном множестве допустимых значений одной из частей равенства мы получаем тождество на *непрерывном* множестве допустимых значений, например: $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$, но такие тождества в нашем понимании не являются «странными». Вопрос не в том, чтобы получить несомненное тождество с помощью тождественных преобразований. Таким способом из алгебраических функций получаются алгебраические, из транс-

---

[1] Отметим интересные случаи «управления» областью определения функций. Так, область определения логарифма есть открытый луч (множество положительных действительных чисел), и это для наших целей не подходит. Но если взять композицию функций, то с помощью ограниченной внутренней функции (или ограниченной только сверху или снизу) с областью определения, являющейся отрезком или закрытым лучом, можно добиться того, чтобы внешняя (логарифмическая) функция тоже имела бы областью определения отрезок или закрытый луч. Такова, например, функция $y = \log_2\left(\arcsin x + \frac{\pi+2}{2}\right)$. Теперь для нее несложно сделать «подгонку» так, чтобы получилось тождество: $\sqrt{-x-1} = \log_2\left(\arcsin x + \frac{\pi+2}{2}\right)$.

[2] Из функций с искусственно заданной (редуцированной к отрезку или закрытому лучу) областью определения получаются такие «экзотические» тождества, как, например, $1+\sqrt{-x} = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$.

цендентных – трансцендентные. Поставим себе более трудную задачу: построить такие тождества на непрерывном множестве значений переменной, в которых сочетались бы алгебраические функции с трансцендентными.

Один из путей решения поставленной задачи – использование композиции тригонометрических функций:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x) .$$

Это тождество известно всем и почему-то удивления не вызывает. Тем не менее, оно удивительно, так как связывает алгебраическую функцию с тригонометрической. Такие вещи проходят мимо внимания учеников, оставляя их равнодушными, нечувствительными к тому, что должно вызывать восхищение своей неожиданностью, красотой. Именно на таком материале можно было бы разбудить любознательность и воображение учащихся, подключив к изучению математики чувство.

Можно было бы показать учащимся или попросить их самих найти тождества, связанные с предельным переходом. Это разложение трансцендентных функций в степенные ряды. Такой «экскурс в будущее» предвосхитит нелегкий для учащихся физико-математических классов материал по разложению функций в ряды Тейлора и Маклорена и, может быть, еще до изучения теории позволит использовать их для приближенных вычислений и получения приближенных формул.

Мы так расширили идею построения занимательных тождеств, что вышли за рамки ожиданий авторов задания. Действительно, достаточно было бы привести примеры тождеств, имеющих в качестве области допустимых значений переменной некоторое конечное дискретное множество. Снова сделаем остановку поразмышляем над тем, что получилось. Решая задачу, сформулированную кем-то (внешняя мотивация), мы не остановились на достигнутом и пошли дальше. Шаг за шагом мы обнаруживали, что исследование можно продолжить. И это уже были наши собственные задачи (внутренняя мотивация).

Одной из ярких особенностей творчески одаренных детей является желание и умение продолжать уже решенную задачу, ставить перед собой новые цели и добиваться их реализации [4, с. 129]. Роль школьного учителя, на наш взгляд, и состоит в том, чтобы показать этот путь творчества другим учащимся. Тем, которые еще не реализовали свой творческий потенциал. Снабдить их не техникой решения задач, а технологией деятельности. Осознанию и решению этой проблемы в немалой степени способствуют те творческие задания, которые предложены в ИУМК «Математика в школе – XXI век».

2.2. ЗАДАНИЯ НА ПОИСК В ИНТЕРНЕТЕ

В настоящее время формирование навыка информационного поиска – одна из самых сложных для учителя задач. Дело в том, что у многих учащихся уже сформировался опыт «скачивания» готовых рефератов. Плагиат процветает [8, 9]. Сама по себе (необработанная) информация нейтральна по отношению к воспитанию и развитию школьников, поэтому бездумное скачивание огромных кусков чужого текста, по меньшей мере, бесполезно. Однако не стоит отказываться от этого вида деятельности, так как его роль в самообразовании огромна. Благодаря поиску и обработке информации создается инфор-

Одной из ярких особенностей творчески одаренных детей является желание и умение продолжать уже решенную задачу...

мационный фон, «на котором происходит аддитивное включение новой информации и создаваемых размышлением на ее основе новых знаний» [10].

Приведем один из примеров заданий на поиск в Интернете из ИУМК «Математика в школе – XXI век».

Задания. *По аналогии с предложенным в учебнике примером найдите интересные примеры зависимостей из разных областей знания и их приложений. Дайте их математическое описание и разъясните смысл приведенных зависимостей.*

Для описания используйте следующую схему:

1. Какие переменные участвуют в зависимости? Опишите их предметный (например, физический) смысл.

2. Как задается зависимость: словесно, формулой или графически? Приведите зависимость в том виде, как она используется в той области знания, откуда вы ее взяли.

3. Какие интересные связи между переменными (влияние одной переменной на другую) представляют интерес в зависимости?

Обязательно приведите ссылку на источник, откуда была взята информация.

Серия приведенных в ИУМК вопросов задает направление не только поиска, но и размышления над найденной информацией. Это дает некоторую гарантию того, что голого скачивания не произойдет.

При ответе на первый вопрос нужно упомянуть, например, следующее: если в математике существует понятие обратной функции, так как независимая и зависимая переменные могут меняться местами без ущерба для смысла, то в физике такого быть не может. Например, во втором законе Ньютона именно ускорение является функцией от силы при определенной массе как параметре, характеризующем тело, к которому применена внешняя сила, приводящая его в движение и создающая ускорение. Здесь ускорение как признак движения является *следствием* применения силы, сообщающей этому телу движение, а сила – *причиной* движения с ускорением. Менять местами причину и следствие – значит, идти против законов природы. Запись – всего лишь формула, удобная для вычислений, но она не ставит в зависимость силу от ускорения. Если эту запись рассматривать как функцию, то она теряет физический смысл.

Второй вопрос интересен тем, что приводит к неясности, двусмысленности в понимании задания функции графиком или таблицей. С математической точки зрения не каждый график задает функцию. Для того, чтобы функция была задана, необходимо, чтобы по графику можно было определить для каждого значения аргумента *точное* значение функции, а это возможно далеко не всегда. Для этого нужно знать форму графика, то есть задать его формулой, значит, функция все-таки задается не графиком, а аналитически. Что касается таблицы, то она задает конечное число пар (x, y), а, значит, либо дискретную функцию, либо функцию, которая плохо определена (если по смыслу имеется в виду непрерывная функция). Для доопределения функции нужна интерполяция и экстраполяция, которые можно делать для точек, расположенных близко к известным. Но, по большому счету нет никакой уверенности в том, что найденные таким образом значения заданной таблицей функции будут соответствовать истине.

Но отказываться от графического и табличного задания функции нельзя: в других областях они играют существенную роль, так как определяют *качественную* зависимость между двумя величинами. Например, в психологии колоколообразная линия характеризует зависимость продуктивности умственной деятельности от силы мотивации: если мотивация деятельности слаба, то продуктивность низкая; при средней выраженности мотивации работоспособность оптимальная; высокая же мотивация, оказывается, не повышает продуктивность, а наоборот, мешает ей. Кривая ползет вниз. Так, например, излишнее волнение на экзамене мешает сосредоточиться.

Табличное задание функции необходимо в том случае, если известно, что функциональная зависимость существует, но формула ее неизвестна. Более того, именно с помощью таблицы и построения по ней графика можно сделать предположение о том, какова должна быть формула, задающая функцию.

Поиск информации в Интернете может быть полезен еще и вот в каком отношении: вместе с искомым понятием можно познакомиться с близкими по смыслу другими понятиями. Сравнение этих понятий не только расширяет кругозор, но и способствует уточнению и более глубокому пониманию предмета рассмотрения. Например, в связи с функциональными зависимостями, можно познакомиться с регрессиями, и это абсолютно необходимо для формирования вероятностной картины мира.

Литература

1. *Давыдов В.В.* Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. М., 1986.

2. *Крутецкий В.А.* Психология математических способностей школьников. М., 1998.

3. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Пер. с франц. М.: Советское радио, 1970.

4. *Богоявленская Д.Б.* Психология творческих способностей: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.: Издательский центр «Академия», 2002.

5. *Вертгеймер М.* Продуктивное мышление: Пер. с англ. / Общ. ред. *С.Ф. Горбова и В.П. Зинченко.* Вступ. ст. *В.П. Зинченко.* М.: Прогресс, 1987.

6. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения: Пер. с англ. *И.А. Вайнштейна.* / Под ред. *С.А. Яновской.* М. Издательство «Наука», 1975.

7. Исследование теории У. Байерса. http://www.svoboda.org./programs/SC/2000/SC0118.asp

8. *Дьяконова И.И.* Проблемы обучения и самообразования в эпоху Интернета. http://www.fid.ru/projects/internetworld/social2a/

9. В Оксфорде процветает Интернет-плагиат. http://www.2edu/2edu.nsf

10. *Лернер П.С.* Жгучие проблемы нашей школы и пути их решения. http://bim-bad.reability.ru/biblioteka/article_full.php?aid=1024&binn_rubrik_pl_articles=176&page_pl_news4=14

Горелик Людмила Борисовна,
учитель математики
МОУ лицей № 102 г. Челябинска.