Горелик Людмила Борисовна

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНИК С ДИНАМИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

От редакции: в этом году заканчивается создание нескольких инновационных учебно-методических комплексов (ИУМК), два года назад получивших в результате конкурсного отбора поддержку Национального Фонда Подготовки Кадров. Все эти комплексы будут доступны школам через сайт Федерального Центра Информационно-Образовательных Ресурсов. Один из таких ИУМК – «Математика в школе – XXI век» на страницах нашего журнала представляет его апробатор, опытный учитель математики Людмила Борисовна Горелик, которая будет в течение всего года знакомить читателей с различными элементами данного ИУМК. На диске к журналу читатели могут найти все материалы, описанные в статье и составить о них собственное мнение.

ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ С КРАТКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ УЧЕБНИКОМ

Профессор Массачусетского технологического института Симур Пайперт, написавший известную книгу «Mindstorms: children, computers and powerful ideas» («Переворот в сознании: дети, компьютеры и плодотворные идеи») обозначил сущность применения ИКТ в учебном процессе как возможность развития продуктивных способностей учащихся. Смысл работы школьников с компьютером, на взгляд профессора, – не повышение успеваемости за счет принудительного запоминания фактов и правил, а интегральное развитие познавательных и творчески-продуктивных способностей учеников и что «лучший способ обучения детей – вовлечение их в процесс делания чего-либо».

...надо дать ему возможность самому решать, чему он хочет учиться.

«Для того, чтобы активно вовлечь ребенка в образовательный процесс, – говорил он, – надо дать ему возможность самому решать, чему он хочет учиться. И дать ему в руки инструмент, который позволил бы учащемуся самостоятельно конструировать свои знания»[1].

ИУМК «Математика в школе – XXI век» для 10 класса с углубленным изучением математики предоставляет учащимся такую возможность.

Существенные элементы этого комплекса суть средства для организации деятельности учащихся на уроках математики.

[1] Источник: «Симур Пайперт высказывается против развития «мышления кузнечика» у школьников» // http://shkola.spb.ru/news/index.phtml?tid=0&id=270

Одним из элементов ИУМК является электронный учебник, в котором собраны краткие, но емкие по содержанию тексты с интерактивными динамическими иллюстрациями. Они позволяют учащемуся увидеть проблему, ставить себе цель, проводить эксперименты, упорядочивать полученные факты, интерпретировать их, делать выводы, приводить доказательства. Ученик в такой ситуации прокладывает свой путь в изучении математики, накапливая собственный опыт работы с математическими объектами. Работа с динамическими моделями создает эмпирическую основу будущих знаний, положительный эмоциональный фон при изучении предмета.

Когда познание опережает опыт, усвоение знаний формально. Ученикам приходится зубрить то, до чего они сами могли бы додуматься. И если бы это произошло, то яркость переживаний победы, чувство гордости за себя, за свое усердие, трудолюбие сделало бы полученные знания незабываемыми. ИУМК как раз и нацеллен на то, чтобы создать предметную основу знаний, накопить личный опыт, окрасить его живыми представлениями, яркими впечатлениями.

В классе собраны учащиеся с разными способностями, разным темпом мышления, разным темпераментом. Одни любят долго размышлять над одной и той же задачей, пока не исчерпают ее, другим это быстро надоедает, и они переходят к другим задачам. Третьи ждут, когда учитель им все расскажет и покажет. Четвертые не видят никаких проблем. Им все ясно (или ничего не ясно), и они с большой неохотой участвуют в общей работе на уроке. Для того чтобы погрузить учащихся в деятельность, сначала ее нужно организовать. И в этом (по крайней мере, на начальном этапе работы с ИУМК) состоит роль учителя.

Понимая, что каждый учитель способен творчески подойти к осуществлению этой роли, мы не пытались давать жесткие указания по составлению конспекта уроков. Напротив, мы были бы рады любому отклику по методике работы с материалами ИУМК, любому диалогу. Живая заинтересованность в новых подходах к обучению математике, адекватных содержанию и средствам, заложенным в ИУМК «Математика в школе – XXI век», составила бы основу для освоения инновационных педагогических технологий в учительской среде.

Все советы по работе с ИУМК мы расцениваем как первую реплику в долгом, содержательном и, надеемся, интересном диалоге с коллегами.

ТЕМА 1. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

1.1. ТЕКСТ «ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА» С ИНСТРУМЕНТОМ «ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ЧИСЕЛ»

В тексте дается понятие натурального числа как общего свойства всех множеств, имеющих одинаковое количество элементов. Далее дается определение множества целых чисел, перечисляются операции, определенные на этом множестве (сложение и умножение), и отношения (неравенства и делимости). Последнее из этих отношений учащиеся будут подробно изучать в следующем разделе.

Основная тема текста – системы записи чисел. Десятиклассники знакомятся с позиционными и непозиционными системами счисления на примерах десятичной и римской систем.

В тексте помещен инструмент, позволяющий преобразовывать запись числа из одной системы в другую (рис. 1).

Работа с инструментом не требует пояснений. Кнопки «Перевести» позволяют

Рис. 1. Преобразователь чисел

переходить от одной записи числа к другой. Кнопка «Обновить» стирает все записи, очищая ячейки для следующего использования.

Для освоения преобразователя чисел в учебнике даны упражнения и задания.

С помощью упражнений 1 и 2 учащиеся осуществляют переход из одной системы в другую. Упражнение 3 дает возможность проверить, как инструмент исправляет ошибки в написании числа римскими цифрами. Наконец, предлагается выполнить задания на межпредметные связи математики и информатики.

Прежде чем познакомиться с преобразователем чисел, ученики имеют возможность по ссылке, указанной в тексте, перейти к статье из Википедии «Римские цифры». В ней перечислены в порядке возрастания все цифры, дано мнемоническое правило для их запоминания. Приводятся примеры записи чисел и «сокращенный способ» записи больших чисел с оговоркой, что его использовать не рекомендуется. Приводятся правила и примеры записи больших чисел с помощью «расширенных римских цифр».

Прочитав статью, ученик получит все сведения о римской системе счисления, правила записи чисел в этой системе, и «Преобразователь чисел» ему не понадобится. Он только сможет убедиться в том, что преобразователь действует. Останется записать алгоритмы перевода чисел из одной системы в другую и алгоритм исправления ошибок в записи чисел римскими цифрами, затем реализовать алгоритм на известном языке программирования. Но лучше организовать работу следующим образом.

1. До знакомства со статьей из Википедии попросить учащихся сформулировать правила записи чисел римскими цифрами. Каждый делает пометки в тетради, затем в беседе записанные правила сравниваются, исправляются, дополняются. В распоряжении учащихся – преобразователь чисел. Главное в этой работе не столько вспомнить выученные правила, сколько понять сам *принцип* записи. Каждый учащийся по-своему организует этот этап работы в классе. Самое нелепое, но и самое надежное действие – записывать натуральные числа в десятичной системе и переводить их в римскую. Анализируя каждый перевод, можно быстро воссоздать правила записи. Для уточнения правил задаются следующие вопросы по римской системе.

a) Если строго следовать правилам, то какое самое большое число можно записать римскими цифрами? (3999). Почему, по вашему мнению, древние римляне не ввели цифры следующих десятичных разрядов и их половин?

b) Какая цифра, вопреки правилам, может быть записана более трех раз подряд и в каком случае? (цифра M в случае записи чисел, не меньших 4000).

c) За счет введения каких цифр стало возможным записывать цифры не более трех раз подряд? (за счет введения половин десятичных разрядов: V, L, D).

d) Какие цифры не могут повторяться? (половины десятичных разрядов). Отвечая на этот вопрос, учащиеся могут пользоваться преобразователем чисел, проверяя корректность записи при повторении цифр V, L, D.

e) Почему перед большей цифрой не ставятся V, L, D? (эти цифры – вспомогательные и введены для того, чтобы не повторять больше трех раз подряд цифры

Таблица 1

I	1	**VIII**	8	**LXXV**	75	**D**	500
II	2	**IX**	9	**XCII**	92	**DCXCV**	695
III	3	**X**	10	**IC**	99	**DCCIL**	749
IV	4	**XVIII**	18	**C**	100	**M**	1000
V	5	**XXXI**	31	**CCCII**	302	**MCMIX**	1909
VI	6	**XLVI**	46	**CDXLI**	441	**MCMLXXXIV**	1984
VII	7	**L**	50	**ID**	499	**MIM**	1999

десятичных разрядов). Отвечая на вопрос, десятиклассники могут проверить с помощью преобразователя чисел, действительно ли эти цифры не ставятся перед большей цифрой.

f) Почему I может стоять слева только от V и X, X слева только от L и C, а C – слева только от D и M? (для ответа на этот вопрос можно построить неравномерную шкалу, где наглядно будет продемонстрирован *принцип* записи чисел римскими цифрами).

2. После такой подробной работы над правилами можно записать алгоритмы перевода чисел из одной системы в другую.

3. Рекомендуется проделать следующую работу: найти в Интернете текст по ссылке http://www.school-city.by/index.php?Itemid=68&id=374&option=com_content&task=view и исправить ошибки записи чисел римскими цифрами (таблица 1, ошибки отмечены красным цветом).

4. Далее можно выслушать предположения учеников о том, как можно продолжить римскую систему, чтобы в ней можно было записывать числа, большие, чем 3999, не повторяя цифру M более трех раз? На этом этапе работы после высказанных предположений уместно будет, наконец-то, использовать ссылку на статью из Википедии, данную в тексте, и сравнить то, что было придумано, с тем, что есть в статье. В частности, там будет упоминание о «сокращенной» записи чисел, как например, записи в таблице, выделенные красным цветом. Правда, такая запись не рекомендуется, но все же иногда для краткости применяется (только вот непонятно, применяли сами древние римляне такую запись или нет?). В той же статье есть расширенная римская система, позволяющая в непозиционную систему вносить элементы позиционной (пусть учащиеся сравнят свои варианты с указанным в статье) и тем самым записывать расширенными римскими цифрами большие числа.

5. Пришел черед «испытать» преобразователь чисел «на прочность». Как он исправляет неправильные записи? Всегда ли он понимает намерения человека? Например, записано число IIX. Можно предположить, что это была попытка изобразить число 8 (10-2=8).Как исправит ошибку преобразователь? Оказывается, он не понимает, что имелось в виду, и выдает свой ответ, игнорируя повторяющиеся цифры слева от большей (рис. 2).

А если поставить перед большей цифрой подряд три или четыре меньшие? Как отреагирует модель?

После этого учащиеся составляют алгоритм исправления неправильной записи.

Если есть возможность провести урок совместно с учителем информатики, то, скорее всего, учащиеся выполнят задания по записи программ на каком-нибудь языке программирования. В этом случае разумно будет вместо одного урока провести сдвоенный.

Вовсе не обязательно использовать в работе все приведенные выше вопросы. Можно их не задавать вообще, а попросить учащихся учесть возможные при записи чисел римскими цифрами ошибки и составить текст в форме сократического диалога.

Выводы.

Итак, были предложены две формы работы с текстом.

Первая заключалась в том, чтобы извлечь из него и из дополнительного текста (указана ссылка на статью из Интернета) как можно более подробную информацию и использовать ее для записи чисел римскими цифрами. Но так ли важна при этом прямая цель? Вряд ли современному человеку нужно знание римской системы счисления и умение читать и записывать числа. Эта информация оказыва-

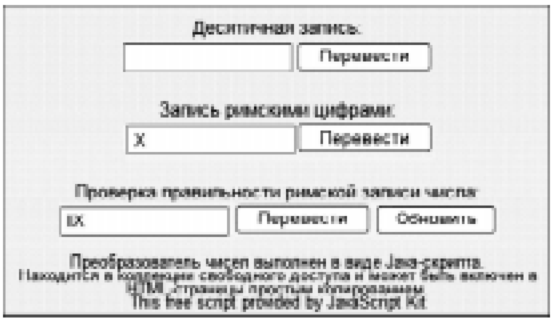

Рис. 2. «Проверка» правильности записи

ется бесполезной. Она быстро забудется. Кроме того, при чтении не было бы достаточной мотивации для изучения материала, работы с ним по уточнению, преобразованию и расширению информации. Чтение было бы поверхностным и оставило бы детей равнодушными к сведениям, почерпнутым из них. Информация не превратилась бы в знания.

Вторая форма предусматривала активное использование компьютерного инструмента для создания собственного знания или воссоздания забытой информации. Здесь были многочисленные пробы, которые проводились для того, чтобы ответить на поставленные вопросы.

Было бы неверным думать, что вопросы всегда задает учитель. Это только один из вариантов. Ученик может задавать вопросы сам себе, ведя внутренний диалог. Возможна беседа с товарищем по парте, не лишним будет и полилог в группе. И здесь важна не информация, а способ ее добывания.

Преобразователь чисел в тексте учебника играет роль *средства* для конструирования учащимися своего собственного знания. В начале работы это могло быть бездумное манипулирование числами для освоения компьютерного инструмента, затем появляются вопросы, ответить на которые помогает инструмент, решаются возникшие проблемы. Дальше знание развивается в зависимости от того, насколько глубоко ученик способен погрузиться в проблему. Немаловажную роль играет учитель. Он помогает проблему обнаружить, сформулировать, направить деятельность учащихся на поиски решения.

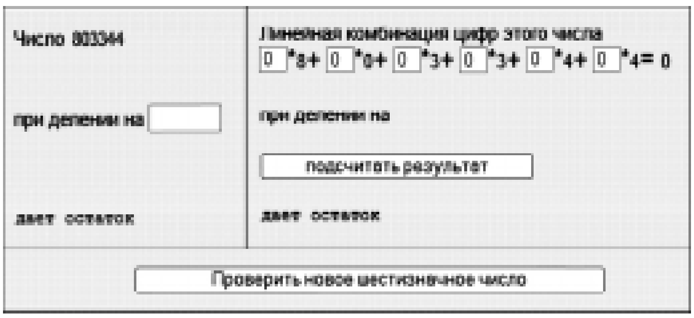

Рис. 3

1.2. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С ПРИЗНАКАМИ ДЕЛИМОСТИ

В тексте дается определение отношения делимости на множестве целых чисел, свойства этого отношения. Говорится, что свойства делимости применяются для доказательства признаков делимости. Приводится пример доказательства признака делимости на число 4.

Инструмент для экспериментов с признаками делимости генерирует шестизначное число, и это число повторяется таким образом, что его цифры появляются справа от ячеек, в которые вписываются коэффициенты линейной комбинации цифр генерируемого числа (рис. 3).

Инструмент работает следующим образом.

Предположим, что нужно вывести признак делимости на 4.

В окно, слева от которого написано «при делении на» вводим число 4, а в ячейки справа (туда, где сейчас стоят нули) вводим любые числа.

Нажимаем на кнопку «подсчитать результат».

Если число и введенная линейная комбинация цифр этого числа дают один и тот же остаток, то, возможно, линейная комбинация угадана правильно. Для подтверждения правильности результата нажимаем на кнопку «проверить новое шестизначное число». Вполне возможно, что и для нового шестизначного числа выбранная линейная комбинация цифр дает тот же остаток при делении на 4, что и само число. Если да, то это еще ничего не значит. Вывод о том, что найден признак делимости на 4, сделать нельзя. Второе совпадение остатков делает предположение о том, что признак делимости на 4 обнаружен, немного более правдоподобным.

Какую же роль играет компьютерный инструмент в исследовании признаков делимости? Это эвристическое средство, позволяющее реализовать индуктивный подход в обучении математике. Формируя культуру эвристической деятельности у учащихся, полезно вооружить учащихся знаниями тех трех принципов, которые сформулировал Д. Пойа:

«Во-первых, мы должны быть готовы пересмотреть любое из наших представлений.

Во-вторых, мы должны изменить представление, когда имеются веские обстоятельства, вынуждающие его изменить.

В-третьих, мы не должны изменять представления произвольно, без достаточных оснований»[1].

Но в данном разделе на удачу полагаться нерационально. Признак найдется не раньше, чем обезьяна напечатает библию, наугад нажимая на клавиши пишущей машинки. Нужна первоначальная идея. В примере доказательства, приведенного в учебнике выше, эта идея есть. Нужно заменить степени 10 выражениями с остатком от деления на 4.

Но тогда компьютерный инструмент будет играть не эвристическую роль. Он позволит проверить на практике признаки, доказанные с помощью дедуктивных рассуждений.

Конечно, можно сказать, что дедуктивные рассуждения не нуждаются в проверке. Но всегда есть риск пропущенной при рассуждении ошибки. Кроме того, дедуктивные рассуждения редко бывают чисто дедуктивными. Как правило, мы принимаем некоторые суждения как очевидные, не требующие доказательства, сами не замечая этого. Здесь и кроется источник ошибок.

И снова оговорка по поводу проверки истинности полученного знания с помощью компьютерного инструмента. Если в результате проверки хоть в одном случае высказывание не подтвердится, значит, оно истинным не является. Если же проверка не обнаруживает ошибки, то истинность высказывания проверка не установила (но это не значит, что оно ложно).

Несмотря на столь пессимистические высказывания, эксперимент и наблюдение часто позволяют сделать индуктивное предположение, которое впоследствии пытаются доказать дедуктивно.

К инструменту для экспериментов с признаками делимости даны такие упражнения.

«Используя инструмент, проверьте следующие признаки делимости:

1. Признак делимости на 4.
2. Признак делимости на 3.
3. Нажимая многократно кнопку генерации шестизначных чисел «проверить новое шестизначное число», найдите число, делящееся на 11. Подберите коэффициенты линейной комбинации цифр, при которой она тоже делится на 11. Проверьте предполагаемый признак на других шестизначных числах, продолжая нажимать кнопку генерации».

Проверить признаки делимости легко, а вот выполнить упражнение 3 не так просто. Если число, кратное 11, найдется быстро (остаток при делении на 11 должен быть равен 0), то нужную линейную комбинацию цифр подбирать долго.

Как следует действовать, описано подробно в одноименной лабораторной работе. После освоения процедуры подбора признаков делимости учащиеся сравнительно легко решают задачи из интерактивного задачника.

1.4. СРАВНЕНИЯ. ДИНАМИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ ДЕЛЕНИЯ С ОСТАТКОМ

Сразу же после определения чисел, сравнимых между собой по модулю, помещена динамическая иллюстрация деления с остатком одного числа на другое (рис. 4) и предлагается выполнить следующие упражнения.

1. Проверьте примеры, приведённые выше.
2. Какова закономерность остатков от деления последовательных степеней двойки на 7?
3. Используя дополнительно встроенный калькулятор, найдите закономерность от деления седьмых степеней натуральных

[1] *Д. Пойа.* Математика и правдоподобные рассуждения. Перевод с английского И. А. Вайнштейна. Под редакцией С. А. Яновской. Издание восьмое, исправленное. М.: Наука, 1975. С. 30.

чисел на семь (проверьте устно для 1, далее для 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

Выше были приведены следующие примеры.

1) $123456 \equiv 6 \pmod{10}$;

2) $123456 \equiv 1236 \pmod{9}$;

3) $123456 \equiv 0 \pmod{4}$.

Отвечая с помощью динамической иллюстрации на первый вопрос, ученик должен переформулировать утверждения с языка сравнений на язык деления чисел с остатком. Из первого сравнения по определению следует, что при делении на 10 числа 123456 и 6 дают один и тот же остаток, из второго – что равны остатки при делении на 9 чисел 123456 и 1236, из третьего – что при делении на 4 числа 123456 остаток равен 0.

То, что это так и есть на самом деле, ученик не сомневается (можно убедиться в этом устно), поэтому проверка с помощью компьютерного инструмента истинности высказываний превращается в проверку самого инструмента.

Убедившись в том, что он работает исправно, ученик приступает к ответу на второй вопрос. Здесь учитель должен уметь держать паузу, дожидаясь реакции учащихся на полученные ответы. Нелюбознательные ученики формально выполнят это упражнение, не делая никаких выводов, другие недоуменно спросят, почему берутся степени именно двойки и почему они делятся именно на 7? А если взять другие числа? И здесь от учителя потребуется умение поддержать желание учащихся прервать выполнение заданных упражнений ради ответа на свои вопросы.

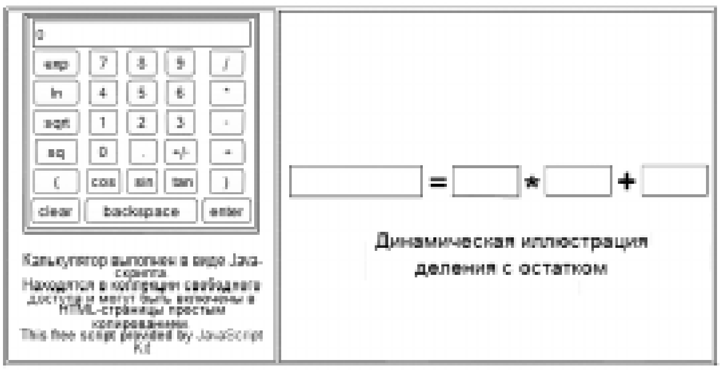

Рис. 4

Самое главное в уроке то, что инициатива в продолжении задания (то есть в постановке дополнительных, своих целей) должна идти от учащихся. Это первый урок, на котором происходит расширение деятельности по желанию учеников, и хороший учитель будет только рад этому и не пожалеет времени урока, поддержит детей в их стремлении докопаться до сути. А нужно сделать немало.

Во-первых, заметить, что если основание степени взаимно просто с показателем, то обязательно через некоторое время получится в остатке 1, а это значит, что дальше остатки будут повторяться. Единица завершает цикл остатков. Если же основание степени и показатель не взаимно просты, то единица в качестве остатка может и не получиться.

Далее можно заметить, что при показателе, равном некоторому простому числу p (как, например, в нашем случае), цикл остатков имеет длину не более, чем $(p-1)$.

Заметят ли ученики закономерность в длинах циклов остатков при показателе, не являющемся простым числом? Во всяком случае, пока им будет трудно сделать правильный вывод.

Дальнейшая работа над сюжетом второго вопроса может быть продолжена следующим образом.

1) если цикл остатков от деления степени некоторого натурального числа, с простым показателем p меньше, чем p, то необходимо заметить, что длина цикла является делителем числа $(p-1)$, поэтому $(p-1)$-я степень данного натурального числа при делении на p тоже дает остаток 1; необходимо только, чтобы основание степени было взаимно просто с p;

2) формулируем гипотезу: если p – простое число, то $(p-1)$-я степень любого натурального числа, взаимно простого с p, при делении на p дает остаток 1.

Необязательно сразу приниматься за поиски доказательства этой гипотезы. Можно даже на первых порах обойтись без этого, сообщив ученикам, что это малая теорема Ферма, и посоветовав прочесть дополнительный материал по этой теме. Но торопиться не следует и с этим, так как мы ответили не на все вопросы упражнения.

Было бы идеальным вариантом не торопиться с ответом на вопрос 3, а продолжить рассуждения по сюжету второго вопроса. Нетрудно догадаться, что после единицы остатки будут повторяться, и так как первый остаток всегда равен основанию степени, то после остатка, равного единице, снова получится остаток, равный основанию степени. И при этом уже можно снять условие взаимной простоты основания степени с ее показателем. Таким образом, получаем еще одну формулировку малой теоремы Ферма: если p – простое число, то p-я степень *любого* натурального числа при делении на p дает тот же остаток, который получается при делении на p данного натурального числа. Если оно меньше p, то остаток равен данному числу.

Такая неудобная и громоздкая формулировка может быть значительно улучшена, если перейти на язык сравнений: если p – простое число, то p-ая степень любого натурального числа сравнима с ним.

Теперь можно отвечать на вопрос № 3.

Трудно описать радость и чувство удовлетворения проделанной до этого работой, когда ученики с удивлением обнаруживают, что, по существу, они уже ответили на этот вопрос!

Выводы.

На примере выполнения упражнения, которое можно было сделать формально, не вдумываясь в его содержание и не ставя перед собой все новые и новые задачи, мы показали, как можно содержательно продолжить работу.

Учитель должен при таком режиме работы обладать в достаточной степени чувством меры и не спешить самому делать выводы, которые могут сделать и сами ученики. Но в то же время он должен вовремя среагировать, если исследование зашло в тупик. В этом случае учитель должен помочь учащимся продолжить работу.

Нужно...
научиться управлять их деятельностью...

Уже на этапе первого знакомства с материалом (чтения текста модуля и выполнения упражнений на освоение динамической модели) можно организовать исследовательскую деятельность. Нужно только верить в способность учащихся «дойти до всего своим умом» и научиться управлять их деятельностью.

Если первые попытки учителя организовать эту деятельность не увенчаются успехом, то будет еще много поводов для повторных попыток. Главное, чтобы учащиеся обрели вкус к исследованию.

На примере только трех текстов и трех динамических иллюстраций к ним мы продемонстрировали новые методы, способы и приемы работы, которые позволяют учащемуся не обучаться, а учиться, то есть обучать самого себя. Здесь и свобода выбора, и самостоятельность, и своеобразие и неповторимость траектории обретения знания. Нужно только иметь терпение и не сразу требовать результатов. Все придет в свое время.

Горелик Людмила Борисовна,
учитель математики
МОУ лицей № 102 г. Челябинска.