



ПОДГОТОВКА УЧИТЕЛЕЙ
В ОБЛАСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРА
НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

*Дубровский Владимир Натанович,
Поздняков Сергей Николаевич*

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ШКОЛЕ. ЗАНЯТИЕ 1

От редакции: этой статьёй журнал открывает серию циклов статей, посвященных использованию наиболее известных компьютерных инструментов для предметного обучения. Публикации начинаются циклом статей по Динамической геометрии, в котором два автора объединились, чтобы представить наиболее важные и типичные черты инструментов этого класса на примере получившей широкое распространение программы «Живая математика» (The Geometer's Sketchpad) и недавно вышедшего в свет отечественного продукта «Математический Конструктор», выпущенного фирмой 1С.

ИСТОРИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

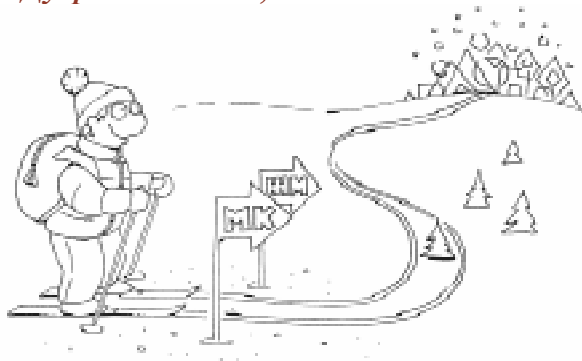
Несмотря на большое количество компьютерных средств для поддержки курса математики, продуктивных идей, которые выдержали испытание временем, не так уж много – для их перечисления хватит пальцев одной руки. Одной из самых эффективных оказалась идея, реализованная в программах динамической геометрии. В настоящее время известно не менее десятка достаточно хорошо развитых программ динамической геометрии, разработанных в разных странах, но все они отличаются только деталями.

Появлению динамической геометрии предшествовало увлечение формальным аксиоматическим подходом к изложению геометрии и уменьшение часов на её преподавание в школе. Наиболее ярко этот подход проявился в книге «Линейная алгебра и элементарная геометрия» Ж. Дьедонне, одного из лидеров знаменитой группы Бурбаки, представившей общий и предельно формализованный взгляд на

математику. Больше всего от такого подхода пострадало преподавание геометрии: из неё вытеснялась наглядность, эвристический подход к решению задач, бытовали мнения о необязательности геометрии в школьном курсе математики. Весьма характерно, что в вышеупомянутом учебнике Дьедонне нет ни одного (!) рисунка.

Концепция динамической геометрии стала в определённой мере реакцией на бурбакистскую тенденцию в обучении математике. Основатели проекта положили в основу изучения геометрии эксперимент, наглядность, эвристическую деятельность, чему в значительной мере способствовало распространение персональных компьютеров.

Работа над динамической геометрией началась в 80-х годах с проекта Cabri (CAhier de BRouillon Informatique, по русски, Черновик для информатики), который предполагал создание среды для работы с объектами дискретной математики (графами, булевыми функциями). В 1985 году Жан-Мари Лаборд (Jean-Marie Laborde) написал книгу «Cabri-géomètre»,



...для тех, кто только начинает свой путь в страну динамической геометрии, различия в возможностях этих программ будут минимальны...

посвящённую экспериментальному изучению геометрии, его студенты (Philippe Cayet, Yves Baulac и Franck Bellemain) подготовили программное обеспечение для поддержки курса динамической геометрии. Это были программы под ныне неиспользуемые операционные системы.

Можно предположить, что в момент создания авторы ещё и сами не понимали, насколько перспективный пласт компьютерных возможностей они подняли. Но по-настоящему эти возможности раскрылись с появлением операционных систем с графическим интерфейсом (Mac и Windows), который позволил в полной мере реализовать идею моделирования геометрических построений, преобразований и измерений в динамике.

Параллельно с развитием Cabri разрабатывалась и аналогичная программа The Geometer's Sketchpad («Блокнот геометра»), которую создал в конце 80-х в США Nicholas Jackiw. Обладая очень удобным интерфейсом и мощной поддержкой издательства Key Curriculum Press, она быстро завоевала популярность учителей. Эти две программы получили наибольшее распространение в мире. В частности, Институтом Новых Технологий (Москва) русифицирована программа «The Geometer's Sketchpad»; она продается в России под названием «Живая Математика».

Отметим, что имеется и целый ряд других программ динамической геометрии, более или менее профессиональных, со своими преимуществами и недостатками.

Наиболее известны в настоящее время программы Cinderella и Zirkel und Lineal (Германия), GeoGebra (Австрия). Последние две замечательны тем, что относятся к системам с открытым кодом и свободно распространяются, что способствует созданию их разноязычных версий.

Отдельного разговора заслуживает программа «Математический конструктор», разрабатываемая в фирме 1С. В момент написания этой статьи в магазинах можно было приобрести версию 2 этой программы, однако к моменту выхода журнала должна выйти в свет новая, существенно усовершенствованная версия 3. В нашей серии статей по динамической геометрии мы будем в основном ориентироваться на «Живую Математику» (ЖМ), сопровождая рассказ обсуждением специфики и отличий «Математического конструктора» (МК). Следует сразу сказать, что для тех, кто только начинает свой путь в страну динамической геометрии, различия в возможностях этих программ будут минимальны; в основном они относятся к некоторым деталям интерфейса.

На сегодня главные преимущества «Математического конструктора» для российского потребителя, как нам представляется, в другом. Прежде всего, эта программа гораздо доступнее («Живая Математика» – продукт достаточно дорогой). Во-вторых, МК разрабатывается в России и учитывает как содержание наших курсов геометрии, так и используемую у нас систему обозначений (один пример: в «Живой Математике», как это принято в США, длина отрезка AB обозначается $m(AB)$, что выглядит очень непривычно для российского школьника). Наконец, параллельно с разработкой собственно программы, фирма 1С в рамках федерального проекта «Информатизация системы образования» выпускает несколько учебных комплексов, многие материалы которых сделаны на основе МК; среди них – цифровые образовательные ресурсы к учебнику «Геометрия 7–9» Л.С. Атанасяна и др., «Конструктивные задания по геометрии» и др. Таким образом, пользователи смогут получить не только инструмента-

рий, но и большой набор конкретных моделей, изготовленных с его помощью.

На диске, прилагаемом к журналу, вы найдете МК-модель с инструментами, на которых можно выполнять предлагаемые в статье задания. Кстати, это еще одна особенность «Математического конструктора» – он позволяет экспортировать чертежи в форме моделей-апплетов, которые, в принципе, могут содержать все имеющиеся в программе инструменты и не требуют наличия программы для их использования. Единственное ограничение – выполненные в апплете построения нельзя сохранять.

ЧТО САМОЕ ГЛАВНОЕ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ?

При работе с программами динамической геометрии ученик строит чертежи не на бумаге, а на экране компьютера. Что это меняет? Оказывается, что разница, по сравнению, например, с написанием текста и набором его на компьютере, принципиальная. Проверка решения задачи (на построение), проиллюстрированное обычным рисунком, учитель должен проанализировать все рассуждения ученика – сам рисунок не даёт учителю никакой информации о правильности решения. Когда же ученик строит чертёж в программе динамической геометрии, он фактически конструирует алгоритм построения. Построенный чертёж получается динамическим. Например, если ученик правильно построил вписанную в треугольник окружность, она должна оставаться вписанной, даже если изменить форму треугольника, «потянув» за вершины. Такая устойчивость показывает, что построение верное.

Эта способность среды проверять – верифицировать – правильность конструкций простым изменением параметров позволяет сделать преподавание более демократичным и индивидуализиро-

ванным. Ученик может придумать неожиданное для учителя решение и легко убедить учителя в своей правоте. Разные ученики могут предложить разные решения. Появляется возможность естественно ввести в учебный процесс творческую составляющую, конструирование, эксперимент, исследование. При этом новые методы обучения оказываются технологичными, они не требуют от учителя дополнительного рабочего времени.

КАК УЧИТЕЛЮ НАЧАТЬ РАБОТАТЬ С ПРОГРАММАМИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ?

Программы динамической геометрии моделируют геометрическую среду, то есть, геометрические понятия и операции с ними. Интерфейсы современных инструментальных предметных программ создаются так, чтобы учесть сложившиеся традиции работы в этой предметной области. Поэтому работу с программой можно начинать не с чтения руководств, а с работы в этой среде. Разумеется, нужно быть знакомым с устройством стандартного графического интерфейса (например, Windows) и иметь навыки работы с мышкой (как сделать щелчок, двойной щелчок, как «схватить» объект и как «переместить» его и т. п.).

Основные инструменты среды «Живая Математика» вынесены в вертикальное меню. При подведении мышки к инструменту появляется подсказка с названием инструмента (рядом с курсором) и описанием его назначения (в левой нижней части окна) (рис 1).

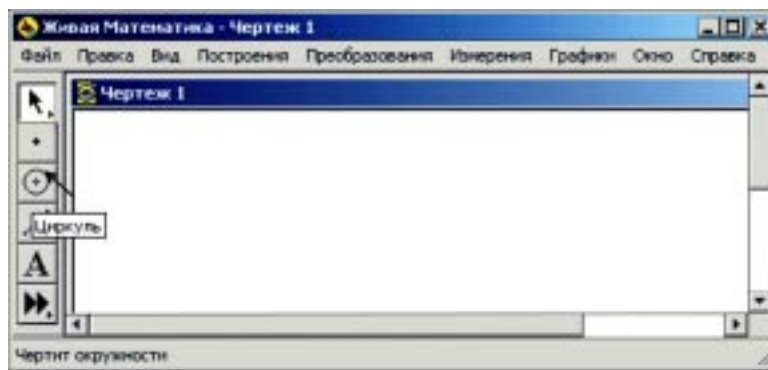


Рис. 1

Верхний инструмент, похожий на стрелку курсора, служит «виртуальной рукой». С его помощью можно указать нужный объект, схватить его и переместить на экране. Он используется чаще всего. В исходном состоянии программы всегда по умолчанию выбран этот инструмент.

Для выбора другого инструмента нужно подвести к нему курсор и нажать (левую) кнопку мыши (это стандартный приём работы с компьютерной мышью).

Например, выбрав циркуль для построения окружности, мы увидим следующее: на «кончике» курсора появится точка. Если теперь перевести курсор на чистый лист компьютерного блокнота и нажать кнопку мыши, то появится точка – центр окружности. Не отпуская кнопку мыши, проведите курсор дальше и отпустите кнопку мыши на свободном месте листа – появится вторая точка и окружность с заданным центром, проходящая через неё (рис. 2).

Упражнение 1. Постройте окружность и проведите в ней радиус.

При выполнении этого упражнения (рис. 3) обратите внимание на дружелюбность интерфейса: после выбора нужного инструмента (линейки) нужно построить отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности. Если начать проведение отрезка от центра окружности, то при подведении курсора к центру окружности, вокруг этой точки появится голубой ободок (рис. 4 а). Этот ободок подсказывает, что курсор «видит» точку, и, если нажать кнопку мыши, то отрезок будет откладываться именно от этой точки. Далее, не отпуская кнопку мыши, следует довести курсор до точки окружности и отпустить кнопку мыши. Здесь возможны два варианта: отрезок попадёт в точку, определяющую окружность (рис. 4 б), либо в другое место окружности (рис. 4 в). В последнем случае на окружности появится новая точка. Эта точка является произ-

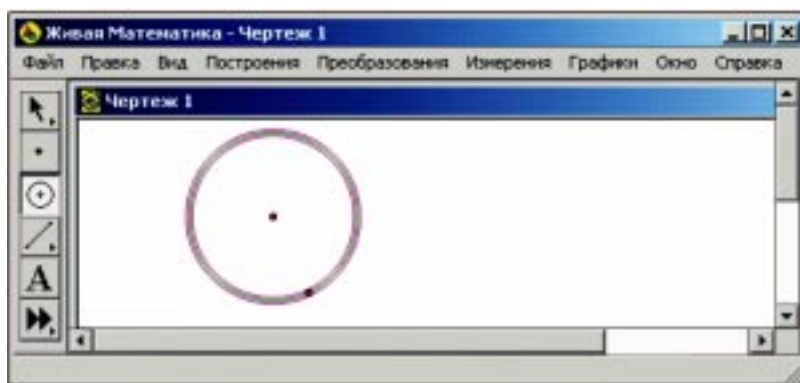


Рис. 2

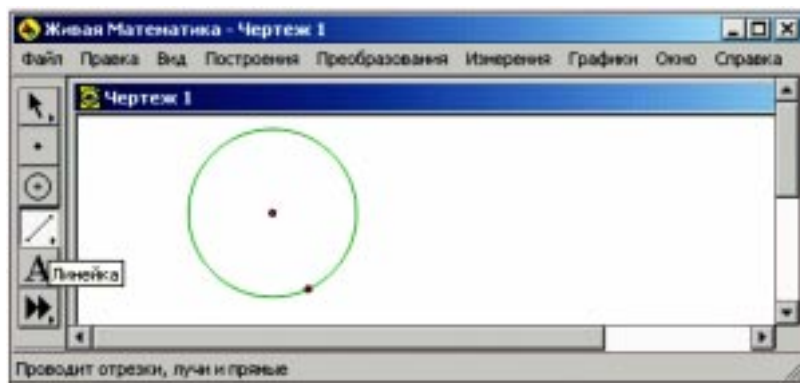


Рис. 3

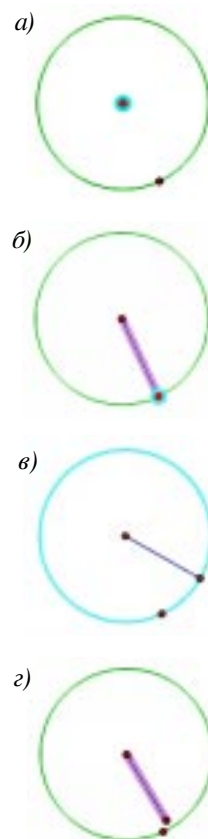


Рис. 4

вольной (свободной) точкой окружности: если «потянуть» за неё мышкой, точка будет перемещаться по окружности, но «сташить» с окружности её не удастся. Попадание точки на окружность индицируется голубой подсветкой окружности (рис. 4 в).

Замечание. Если при построении отрезка Вы «промахнётесь» и поставите точку рядом с окружностью (рис. 4 г), вернитесь назад, отменив построение и повторите его. Операция отмены последнего действия находится в верхней строчке меню «Правка» (рис. 5); также можно использовать стандартную комбинацию клавиш CTRL+Z. Если повторить действие отмены несколько раз, можно вернуться назад на любое число шагов.

Упражнение 2. Постройте окружность и вписанный в неё треугольник.

Упражнение 3. Постройте произвольный правильный треугольник.

Замечание. Упражнение 3 необычно уже по своей постановке. Что значит «произвольный правильный треугольник»? В возможности постановки таких задач проявляются особенности динамической геометрии. Для определённости можно уточнить задачу: «дан произвольный отрезок, достройте его до правильного треугольника» (рис. 6). Придирчивый исполнитель задания может сказать, что достроить можно двумя способами. На это можно ответить, что можно выбрать любой из двух.

Правильный треугольник строится простейшим способом из первого предложения «Начал» Евклида. Построим две окружности так, чтобы центр каждой окружности находился в одном конце отрезка, и чтобы она прошла через второй конец отрезка (рис. 7).

Замечание. Обратите внимание, что если вторая точка будет выбрана на сво-

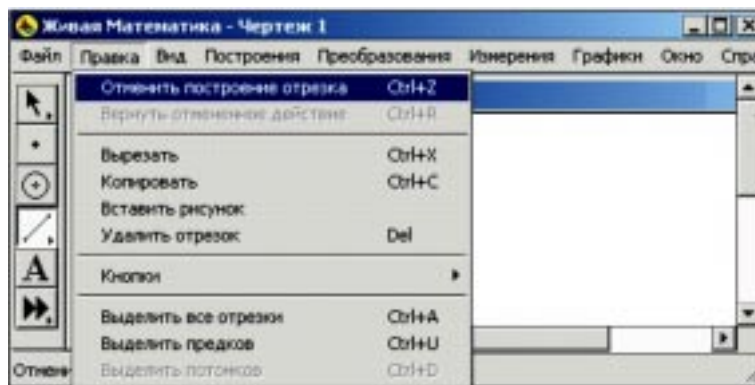


Рис. 5

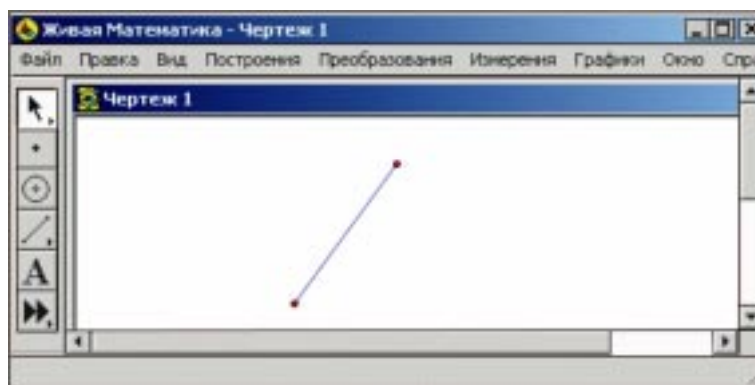


Рис. 6

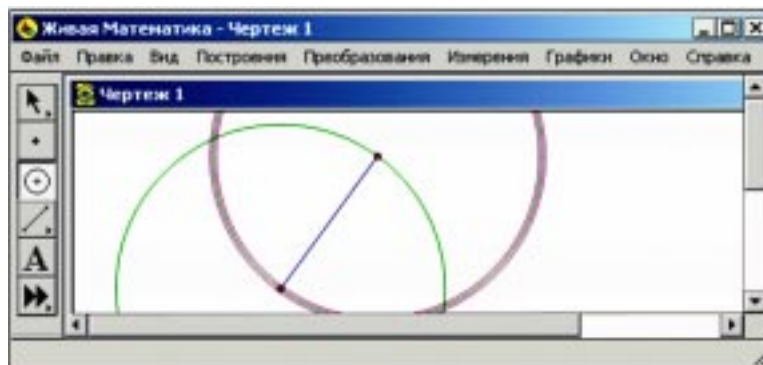


Рис. 7

бодном месте экрана, то даже если окружность в момент построения пройдёт через конец отрезка, построенная окружность будет иметь не заданный, а произвольный радиус (рис. 8 а). В дальнейшем неправильно построенную конструкцию легко проверить, если «потянуть» за один из концов отрезка: радиусы окружностей перестанут быть равными (рис. 8 б), а построенный треугольник правильным.

Теперь остаётся отметить (построить) точку пересечения. Здесь опять же можно наблюдать удобство интерфейса. Как бы вы стали отмечать точку?

Например, подвели курсор-стрелочку и нажали кнопку мыши. И это окажется верным! При подведении курсора к пересечению стрелка курсора станет горизонтальной, а в левом нижнем углу окна появится подсказка (рис. 9).

Однако этот путь не единственный. Положим, что вы хотите не ОТМЕТИТЬ, а ПОСТАВИТЬ точку на пересечение. И этот путь тоже окажется верным! Нужно выбрать инструмент «точка», подвести курсор к нужному месту и нажать кнопку мыши.

Замечание. Обратите внимание, что когда вы ставите точку на пересечение, курсор «видит»

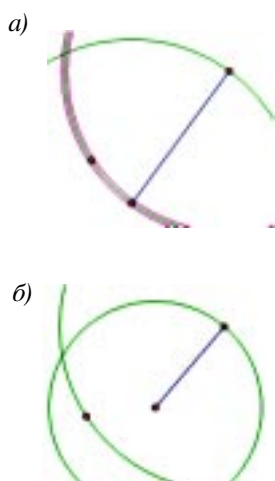


Рис. 8

обе окружности и они подсвечиваются голубым цветом (рис. 10).

Теперь нужно построить две стороны правильного треугольника, соединив концы исходного отрезка с построенной точкой. Это делается так же, как строился радиус окружности в первом упражнении.

Обратим внимание, что стороны треугольника можно было строить и до построения точки пересечения окружностей! Для этого надо выбрать инструмент отрезок, начать построение с одного из концов отрезка и, не отпуская кнопку мыши, двигать курсор к пересечению, пока обе окружности не подсвечиваются голубым цветом (рис. 11). В этот момент кнопку мыши надо отпустить.

Итак, любой естественный характер действий воспринимается программой как правильный!

После того как треугольник будет построен, хочется избавиться от лишних построений. Первая мысль – стереть, выре-

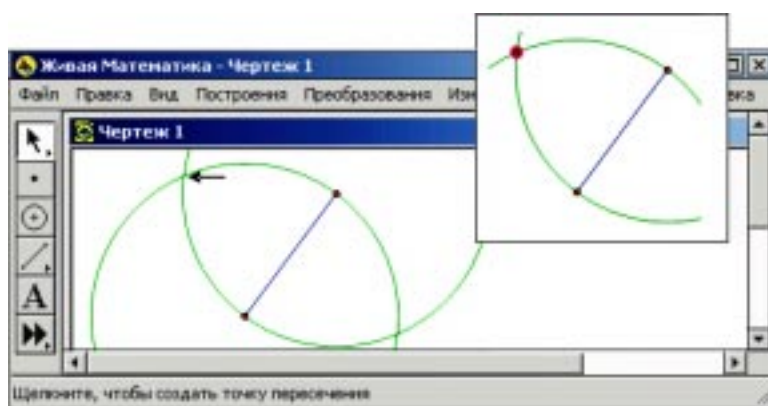


Рис. 9

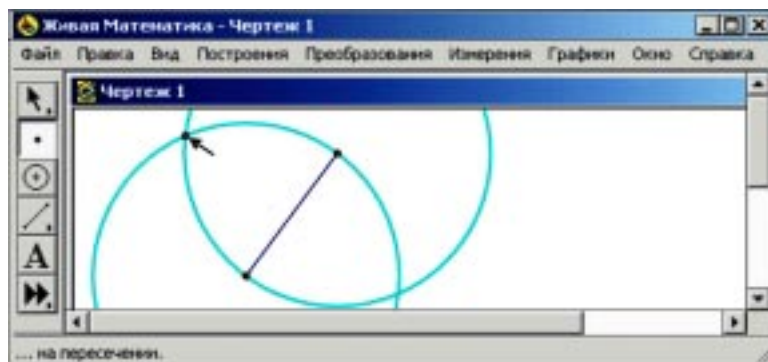


Рис. 10

зать ненужные элементы рисунка. Однако, если мы так сделаем, чертёж исчезнет! Почему? При построении чертежа программа запоминает АЛГОРИТМ построений, а не сам рисунок. Это позволяет сделать чертёж динамическим: изменение исходных объектов (в нашем примере это отрезок и его концы) приводит к изменению всех построений, и мы видим другой чертёж (другую картинку) к той же задаче.

Для того, чтобы промежуточных построений не было видно, в меню «вид» введена операция «скрыть».

Скрывать объекты можно по очереди или все вместе. Для этого нужно отметить курсором-стрелочкой все скрываемые объекты (в нашем случае – окружности) и выбрать операцию «скрыть окружности» (рис. 12).

Замечание. Для того чтобы не скрыть случайно нужные объекты, перед тем как выделять нужные для скрывания объекты,

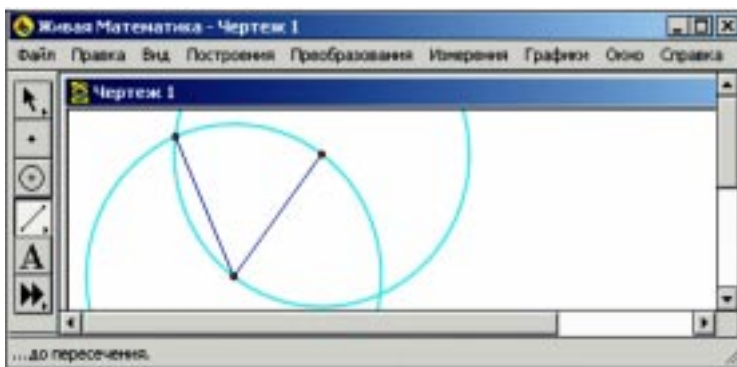


Рис. 11

щёлкните на свободной области окна, и все выделения пропадут.

Обратите внимание, что если вы случайно выделите, например, кроме окружностей точку, то наименование команды скрывания изменится на «скрыть объекты» (рис. 13) – это дополнительный сигнал о том, что выделено что-то лишнее.

Для того чтобы убедиться, что треугольник построен правильно, «потяните» мышкой за его вершины: он будет менять свою форму и положение, но свойство «быть правильным» должно сохраняться (рис. 14).



Рис. 12



а)



Рис. 13



б)



Рис. 14

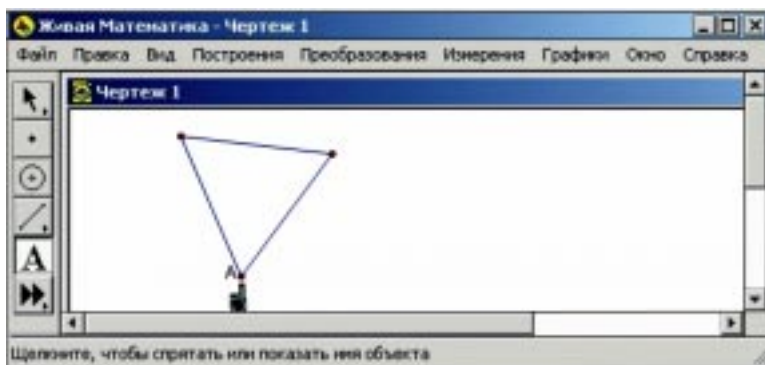


Рис. 15

Для построенного треугольника хочется ввести обозначения – назвать вершины большими латинскими буквами. Для этого нужно выбрать кнопку «А» в вертикальном меню, которая отвечает за ввод обо-

значений и набор текста. Сигналом того, что выбран текстовый инструмент, является изменение формы курсора на «указующий перст». Если теперь «щёлкнуть» этим курсором по нужному геометрическому объекту – точке, отрезку, окружности, – появится его имя (рис 15). Имена автоматически генерируются по алфавиту. Точки

обозначаются большими латинскими буквами, отрезки – малыми, окружности – буквой «с» с числовым индексом.

Замечание. Повторный «щелчок» на объекте спрячет его имя.

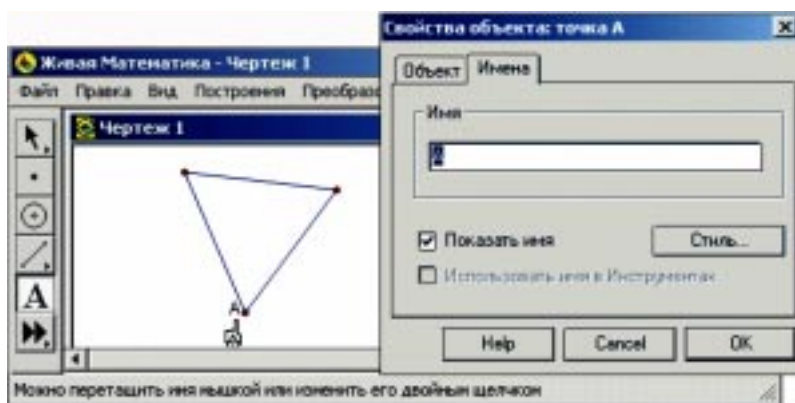


Рис. 16

Но что делать, если нас не устраивают генерируемые автоматически имена?

Для этого надо подвести курсор-палец к имени точки, при этом на нём появится буква «А», и сделать на букве «двойной щелчок» мышью. При этом появится окно, в котором можно изменить название объекта и даже поменять стиль обозначения: размер, цвет, шрифт (рис. 16).

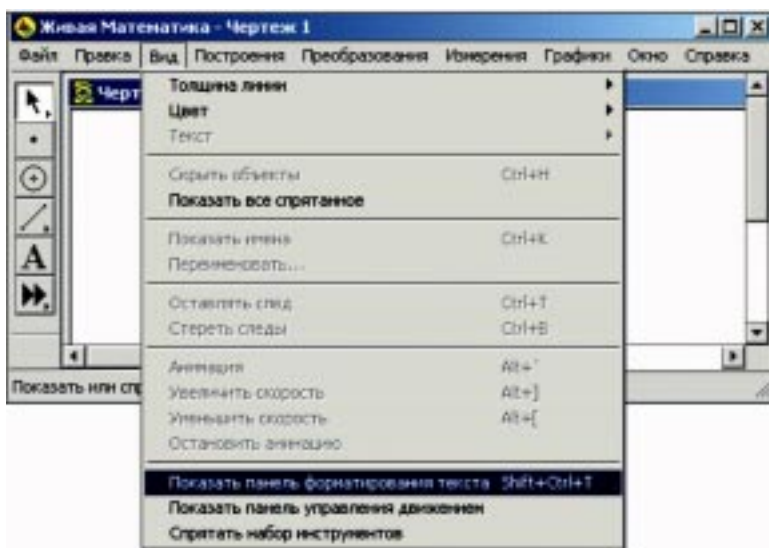


Рис. 17

Однако, как правило, неудобно менять стиль каждого обозначения отдельно. Хочется установить размеры, шрифт, цвет на данное обозначение и на все последующие. Для этого нужно воспользоваться панелью форматирования текста, которая по умолчанию не показывается. Для того чтобы вывести эту панель на экран, нужно в меню «вид» выбрать нужную строчку (рис. 17).

На панели форматирования текста можно выбрать нужный стиль имени. После этого при каждом выполнении операции именованного объекта имя будет появляться в выбранном стиле (рис. 18).

Замечание. Если имена объектов уже генерировались в другом стиле, а потом были спрятаны, данная операция не приведёт автоматически к изменению их стиля. Стиль придётся менять у каждого объекта отдельно.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Постройте «произвольный» ромб с углом 60° .
2. Постройте «произвольный» правильный шестиугольник.
3. Постройте «произвольный ромб». *Указание:* предварительно постройте две его смежных стороны, проведя два радиуса одной окружности, а затем достройте их до ромба.
4. Нажмите кнопку вертикального меню с изображением отрезка и подержите её нажатой несколько секунд. Появится так называемое выкидное меню, в котором можно выбрать объекты «луч» или «прямая». Используя эту возможность, постройте «произвольную» окружность с проведённым в ней диаметром.
5. Подведите инструмент работы с текстом (буква А вертикального меню) к обозначению объекта (например, к имени вершины) и нажмите левую кнопку мыши. Не отпуская её, перемещайте имя объекта в окрестности самого объекта, пока оно не займёт удобное положение.
6. Изучите в меню «вид» команды изменения толщины и цвета. Используя эти

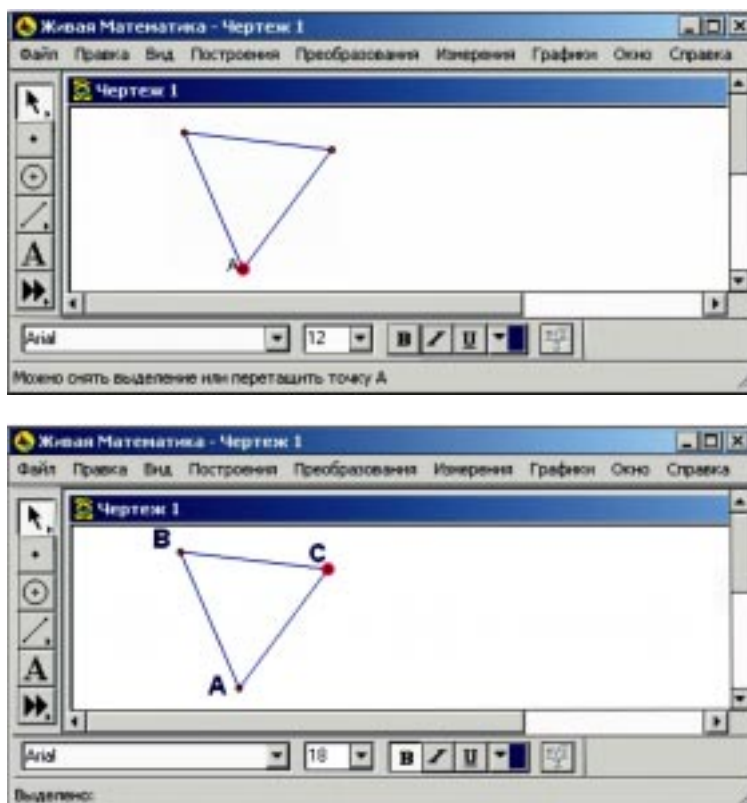


Рис. 18

возможности, сделайте построенные фигуры более выразительными.

ОТЛИЧИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КОНСТРУКТОРА

Инструменты и команды

На рис. 19 показано окно «Математического конструктора». Инструментов на панели больше, чем в «Живой Математике». Однако эта разница кажущаяся. Фактически обе программы предоставляют пользователям почти одинаковый набор операций. Дело в том, что есть два режима выполнения операции – «инструментальный» и «командный». Например, чтобы построить отрезок AB , можно выбрать на панели инструмент «Отрезок» и указать им последовательно две точки A и B (при этом можно щелкнуть на ранее построенной точке или на пустом месте – во втором случае там появляется новая точка). Это инстру-



ментальный режим. Можно поступить иначе: построить точки *A* и *B*, выделить их (для этого в обеих программах используется инструмент «Стрелка»), а затем выбрать в меню «Построения» пункт (команду) «Отрезок». Это командный режим. (Стоит отметить, что команду «Отрезок», как и многие другие, можно применять и к более чем двум точкам, при этом «Живая Математика» построит замкнутую ломаную, проходящую через все точки в порядке их выбора, а «Математический конструктор» построит отрезки, соединяющие все пары данных точек. Впрочем, это отличие сейчас для нас несущественно.) Со-

здатели ЖМ решили вынести на инструментальную панель только самые необходимые операции. В МК, напротив, почти все операции представлены как командами меню, так и инструментами на панели.

Важной особенностью «Математического конструктора» является возможность произвольной настройки панели при создании моделей-апплетов. Можно поместить на панель минимальный набор инструментов, как в ЖМ (см. рис. 20, где простейшие инструменты построений дополнены инструментами оформления (текст, цвет, стиль линии), кнопками показа и скрытия объектов, обычными ко-

мандами редактирования (удалить, отменить последнюю команду, вернуть последнюю отмененную команду)). С помощью настройки можно не только упростить интерфейс, но и создавать задания с ограниченным набором инструментов (например, на построение одним циркулем).

Обратим внимание на нажатую кнопку с замочком (рис. 19). Она включает режим «залипания» инструментов, при котором однажды выбранный инструмент можно использовать многократно, не выбирая его каждый раз снова. При отжатой кнопке после однократного использования инструмента он автоматически меняется на «Стрелку». В апплете для многократного использования инструмента нужно выбирать его двойным щелчком.

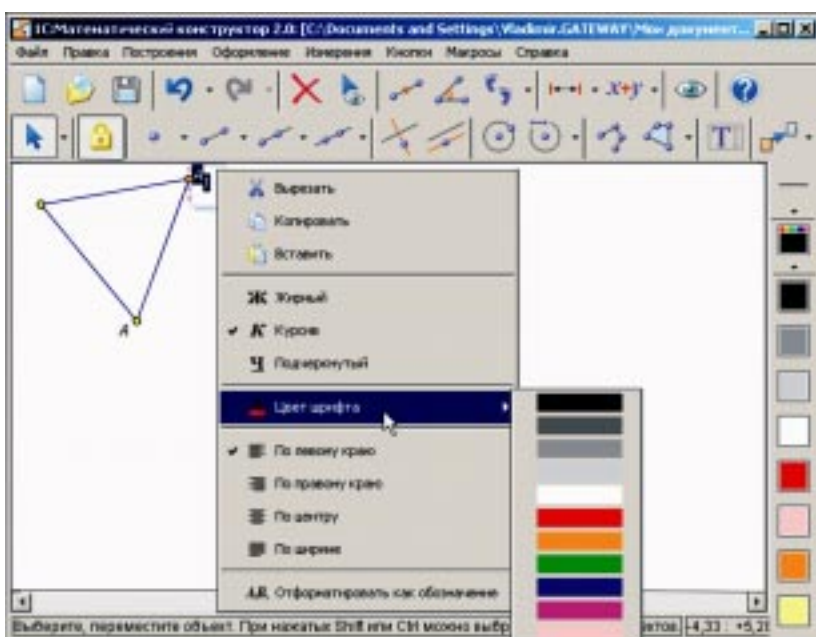


Рис. 19

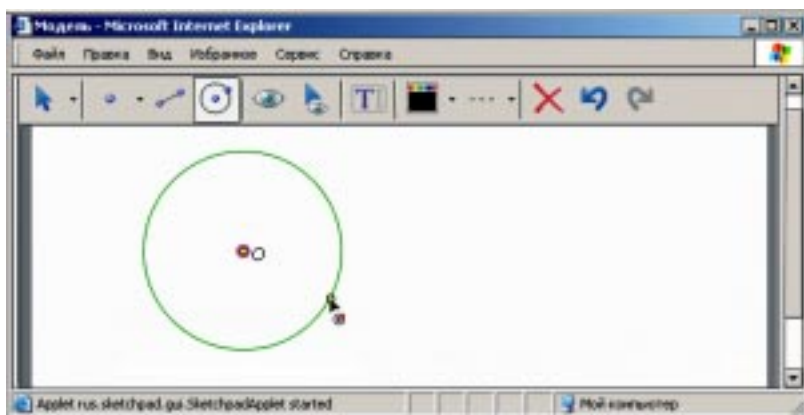


Рис. 20

Подсказки

Как и в ЖМ, инструменты и команды МК имеют всплывающие подсказки, а когда инструмент выбран, в статусной строке внизу экрана появляются инструкции по его применению (см. рис. 19). Кроме этого, вид курсора зависит от выполняемой операции и подсказывает очередной шаг. На рис. 20 показано завершение построения окружности по центру и точке на ней. Курсор состоит из стрелки и маленькой окружности; первоначально центр этой окружности был красным, что указывало на необходимость задания центра. На рисунке 20 центр уже выбран, и красным цветом отмечена точка на окружности: курсор подсказывает, что сейчас мы определяем вторую точку. Как в ЖМ, используется и подсветка объекта, на который в данный момент указывает курсор.

«Украшения»

Кнопка со стрелкой и глазом активизирует инструмент, с помощью которого можно спрятать любой имеющийся на экране объект, не удаляя его из цепочки построений; кнопка с глазом показывает все спрятанные объекты в бледно-сером цвете (рис. 21). В этом режиме можно вернуть спрятанный объект к полноценной видимости с помощью первого инструмента.

Рядом с кнопками «Цвет» и «Стиль линии» (рис. 21) есть маленькие стрелочки,

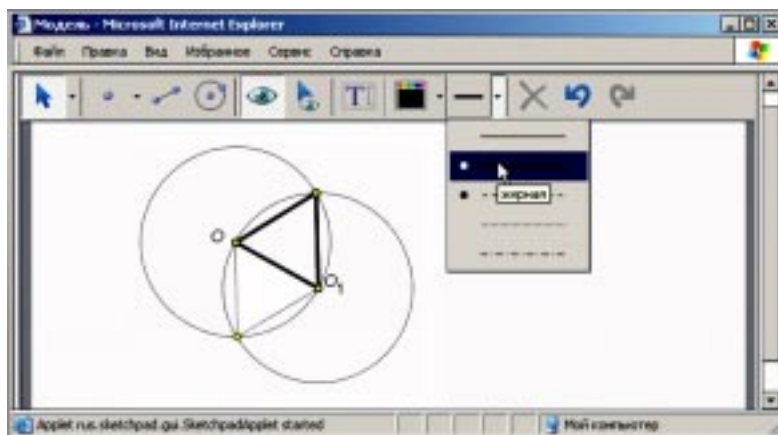


Рис. 21

при нажатии на которые открывается палитра выбора соответствующих атрибутов.

Метки и текст

Кнопка с буквой Т активизирует в «Математическом конструкторе» инструмент, с помощью которого можно присваивать обозначения объектам, а также создавать тексты. Возможности форматирования текста в двух программах примерно одинаковы, но в МК все они распространяются и на форматирование обозначений объектов. Простейшие виды форматирования можно задать с помощью контекстного меню (рис. 19). Для более сложного форматирования, в том числе для набора математических формул имеется встроенный HTML редактор.

Для упрощения ввода обозначений, наряду с их автоматической генерацией по алфавиту, как в ЖМ, в МК они еще и автоматически форматируются: латинские буквы пишутся курсивом, а цифры, стоящие вслед за ними, превращаются в индексы (см. рис. 19).

Дубровский Владимир Натанович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова,
Поздняков Сергей Николаевич,
профессор кафедры ВМ-2 СПбГЭТУ (ЛЭТИ).

© Наши авторы, 2008.
Our authors, 2008.