Посов Илья Александрович

РАЗБОР ЗАДАЧИ «ФЛИПЫ» КОНКУРСА КИО-2008

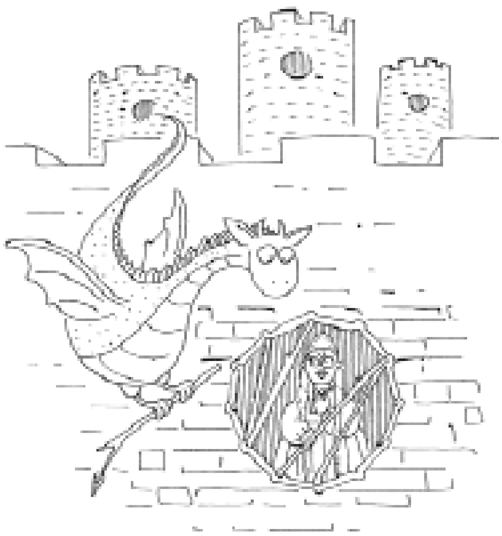
В этой статье мы обсудим задачу «флипы», которая была предложена на ежегодном конкурсе «Конструируй, Исследуй, Оптимизируй 2008». Условие задачи связано с триангуляциями выпуклых *n*-угольников и оптимальными последовательностями преобразований между триангуляциями. Мы узнаем условие задачи и ее решение, посмотрим результаты участников и приведем некоторые связанные с задачей теоретические результаты.

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Возьмем выпуклый *n*-угольник и проведем в нем непересекающиеся диагонали так, чтобы они разбили его на треугольники. Такое разбиение называется триангуляцией, ее пример можно увидеть на рис. 1. Определим операцию «флип», которая преобразует одну триангуляцию в другую: выберем произвольную диагональ, рассмотрим четырехугольник, который образуют два прилегающих к ней треугольника, и заменим диагональ второй диагональю четырехугольника. На рис. 2 можно увидеть пример операции флип в шестиугольнике. Определим также понятие расстояния между двумя триангуляциями. Расстояние – это длина минимальной последовательности преобразований, которая переводит первую триангуляцию во вторую.

Участникам конкурса были предложены два варианта условия задачи. В условии задачи первого уровня требовалось найти расстояние между двумя заданными триангуляциями двенадцатиугольника, точнее, требовалось построить как можно более короткую последовательность преобразований, переводящую первую триангуляцию во вторую. На рис. 3 изображено условие задачи Флипы первого уровня.

Участники второго уровня должны были придумать две триангуляции тринадцатиугольника с возможно *большим* расстоянием между ними. Для этого требовалось нарисовать первую триангуляцию и потом с помощью последовательностей флипов прийти ко второй. Программа подсказывала, если последовательность флипов оказывалась неоптимальной, то есть если два построенных многоугольника могли быть получены друг из друга более коротким способом.



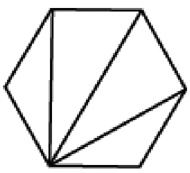


Рис. 1

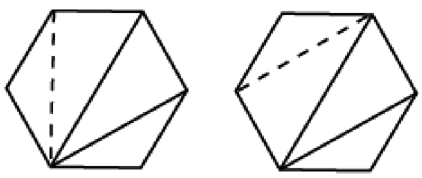


Рис. 2

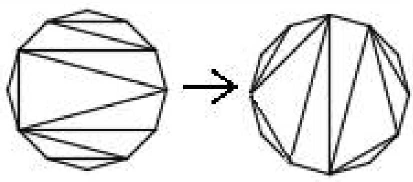


Рис. 3

На рис. 4 изображен интерфейс программы, которой пользовались участники для решения задачи. Основное место на экране занимает триангулированный многоугольник, с которым можно производить флипы, если нажимать на ребра. Снизу экрана выводится история уже совершенных преобразований. Интерфейсы программы для задачи первого и второго уровня практически не различаются.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

С обеими задачами справилось достаточное количество участников. В задаче первого уровня 71 участник из 244 получили правильный результат – расстояние между двумя триангуляциями равно 14. Остальные результаты выглядят так: 81 человек преобразовали триангуляции за 15 операций, 28 – за 16, и всем остальным потребовалось 17 и более операций. На рис. 5 изображена одна из возможных минимальных последовательностей преобразований.

Результаты задачи второго уровня таковы: 74 участника из 139 нашли две триангуляции на расстоянии 16, это решение действительно оптимально и не может быть улучшено. 26 человек нашли триангуляции на расстоянии 15, и 14 человек – на расстоянии 14. На рис. 6 изображены две триангуляции на расстоянии 16. Конечно, это решение не единственное.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Несмотря на то, что задача в своей постановке для конкурса КИО не оказалась сложной, она основана на содержательной математической проблеме, решение которой до сих пор не найдено. Требуется придумать алгоритм, который для двух заданных триангуляций эффективно определит оптимальную последовательность преобразований между ними. Это означает, что задачу первого уровня в общем случае для произвольных триангуляций решить сложно.

Давайте докажем, что две триангуляции n-угольника T_1 и T_2 всегда можно перевести друг в друга последовательностью флипов, и, более того, для перевода достаточно меньше, чем $2n - 6$, преобразова-

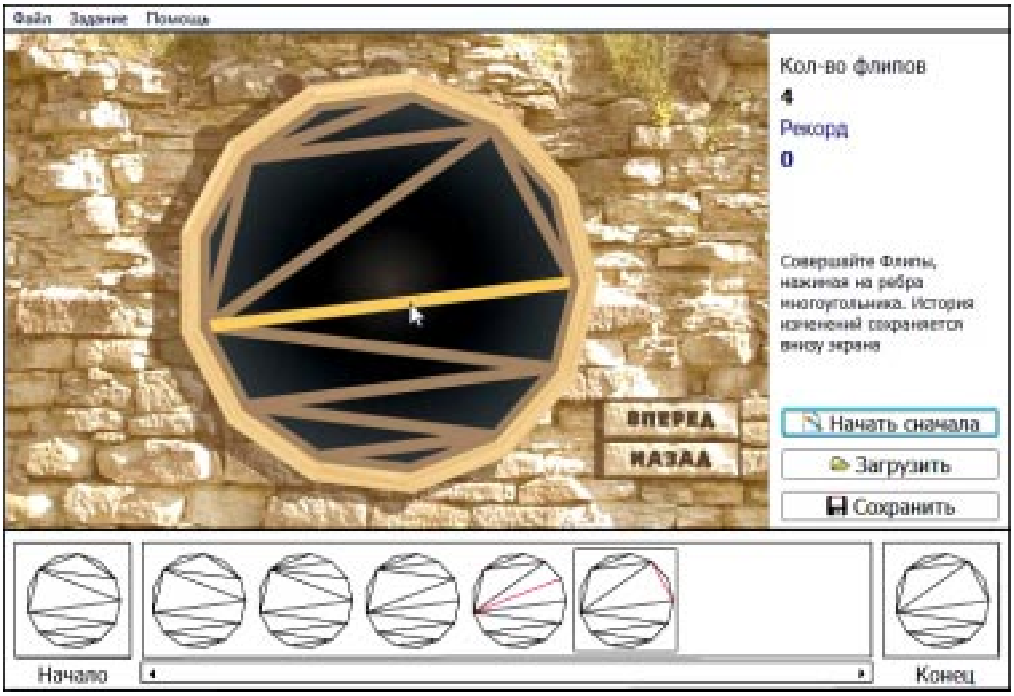


Рис. 4

ний. Выберем первую триангуляцию T_1, и за n – 3 флипа преобразуем ее в триангуляцию T', где все ребра выходят из одной вершины. Для этого заметим, что триангуляция всегда состоит из n –3 ребер, и если из вершины выходит меньше ребер, то можно сделать преобразование, которые увеличит количество выходящих из нее ребер. Далее, преобразуем триангуляцию T_2 тоже в T', воспользовавшись опять не более чем n – 3 флипами. Так как последовательность флипов обратима, мы можем перевести T_1 в T' и далее T' обратно в T_2, при этом количество операций будет не больше чем $2n$ – 6. Попробуйте улучшить эту оценку и показать, что если $n > 12$, то для преобразования достаточно $2n$ – 10 операций. Оценка $2n$ – 10 является точной. Но знание оценки не помогает привести пример двух триангуляций с таким или хотя бы близким расстоянием. Это говорит о том, что решать задачу второго уровня в общем случае сложно.

Про оптимальную последовательность преобразований двух триангуляций известно не так много. Только что мы получили оценку для ее длины. Можно проверить еще один факт. Оказывается, что если в триангуляции T_1 существует флип, который создает ребро, совпадающее с ребром из T_2, то этот флип является первым в одной из оптимальных последовательностей преобразований T_1 в T_2. То есть при поиске оптимальной последовательности всегда можно смело делать флип, увеличивающий количество совпадающих в T_1 и T_2 ребер. Доказательство этого и других приведенных здесь фактов можно найти в статьях, вынесенных в список литературы.

Давайте приведем другую оценку на расстояние между триангуляциями. Чтобы оценить расстояние между двумя триангуляциями, надо нарисовать их на одном n-угольнике и посчитать количество пересечений их ребер. Количество пересечений не меньше расстояния между триангуляциями. Для доказательства этого утверждения приведем алгоритм, который получает на вход две триангуляции T_1 и T_2 и ищет последовательность флипов для перевода первой триангуляции во вторую. При этом за каждый шаг алгоритм находит такое ребро, что если совершить с ним флип, то количество пересечений между ребрами уменьшится. В какой-то момент пересечений между ребрами не останется, это будет означать, что триангуляции совпали, и искомая последовательность флипов найдена. Этот алгоритм можно использовать для того чтобы оценить расстояние между двумя триангуляциями. Оптимальное решение он получает не всегда [2].

1. $T_1' := T_1$ и $T_2' := T_2$. Будем преобразовывать триангуляции T_1' и T_2' навстречу друг другу, то есть иногда находить ребро для флипа в первой триангуляции, а иногда во второй.

2. Повторяй пока $T_1' \neq T_2'$

а) Если T_1' содержит ребро e', такое что оно пересекается ровно с одним ребром e из T_2', тогда совершить флип $e \to e'$ в T_2'. То, что этот флип возможен, требует отдельного доказательства. Повторять этот шаг надодо тех пор, пока удается находить ребра e' с одним пересечением. При этом роль T_1' и T_2' можно менять местами.

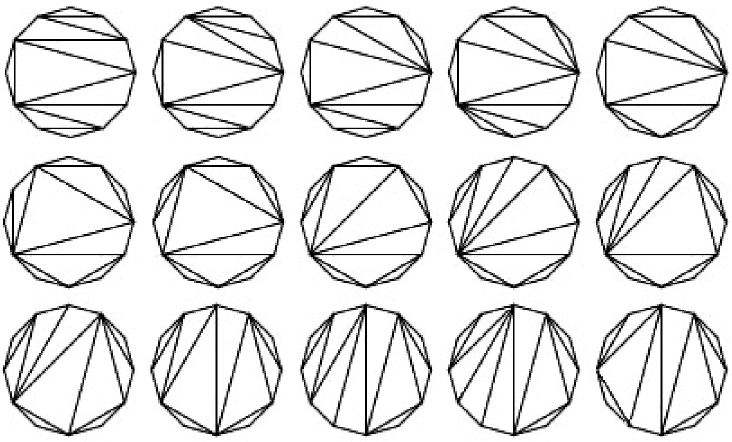


Рис. 5

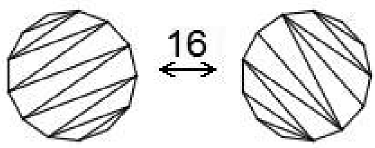


Рис. 6

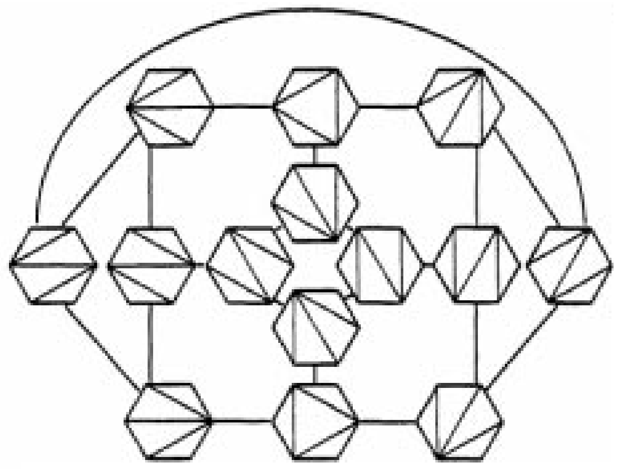


Рис. 7

b) Если $T_1' \neq T_2'$, то надо найти ребро в T_1' или T_2', такое что если совершить с ним флип, то количество пересечений между ребрами максимально уменьшится. Такое ребро обязательно существует. Условие про максимальность – это всего лишь эвристика, то есть попытка сравнять T_1' и T_2' как можно быстрее.

Несмотря на то, что эффективно определить правильное расстояние между триангуляциями не получается, программе конкурса второго уровня делать это необходимо. Иначе она не сможет узнать, на каком расстоянии находятся две найденные участником триангуляции, а задача участника состоит в том, чтобы сделать это расстояние как можно больше.

Реализованный в программе алгоритм ищет расстояние между триангуляциями так же, как ищут расстояние в графе между вершинами. Определим граф триангуляций как граф, вершинам которого соответствуют все возможные триангуляции n-угольника, а ребрами вершины соединены, если соответствующие триангуляции получаются друг из друга за один флип. На рис. 7 изображен граф триангуляций шестиугольника. Степень каждый вершины графа триангуляций равна $n - 3$.

Чтобы найти расстояние между двумя триангуляциями T_1 и T_2, можно запустить поиск в ширину по графу, начинающийся в T_1. На первом шаге поиска будет обнаружено множество триангуляций, получающихся из исходной за один шаг. На втором шаге будет обнаружено множество триангуляций, получающихся за два шага, и т. п., пока на очередном шаге в множество триангуляций, получающихся за k шагов, не попадет триангуляция T_2. Такой перебор неэффективен, требует много памяти, так как возможных триангуляций очень много. Но для n-угольников при небольших n он вполне работает, и именно его использовала программа задачник КИО-2008.

В заключение приведем таблицу максимальных расстояний $d(n)$ между триангуляциями n-угольников, она построена для нескольких начальных значений n [1].

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$d(n)$	0	1	2	4	5	7	9	11	12	15	16	18	20	22	24	26

Литература

1. Rotation Distance, Triangulations and Hyperbolic Geometry. *Daniel D. Sleator, Robert E. Tarjan, and William P.* Thurston, Journal of the American Society, vol. 1, num 3, July 1988.

2. The Edge-flipping Distance of Triangulations, *Sabine Hanke, Thomas Ottmann, Sven Schuierer*.

Посов Илья Александрович,
аспирант математико-механического факультета СПбГУ.