Хайнц Шуман

ИНТЕРАКТИВНОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ В ВИРТУАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ CABRI 3D
Часть 1

Овладение аналоговыми и дискретными устройствами, предназначенными для геометрических построений является, наряду с обычными алгоритмами алгебры и арифметики, составной частью общеобразовательного курса математики.

В преподавании геометрии построения являются как частью самого предмета, так и предпосылкой к решению задач. Применение систем динамической геометрии заметно усилило методы конструирования в планиметрии. Но адекватные пространственные построения до сих пор были выполнимы лишь в воображении. Приходилось сводить их методами наглядной геометрии к плоским конструкциям. Программа Cabri 3D позволяет совершать пространственные построения в виртуальном пространстве. Благодаря этой программе открывается новый подход к пространственному конструированию. В данной статье развиваются элементы дидактики интерактивного геометрического конструирования в виртуальном пространстве. Произведен обзор вариантов такого конструирования в Cabri 3D, приведены многочисленные примеры их применения и предварительная дидактическая оценка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Каждая задача, требующая пространственного построения, обычно сводилась к некоторому построению на плоскости (рисунок 1).

Поэтому пространственные задачи были трудны для школьников просто в силу проблем, связанных с трудностями изображения в трехмерном пространстве, и им уделялось мало внимания в школьном курсе. Использование физических трехмерных моделей при решении пространственных задач ограничивалось самыми простыми примерами. Правда, их достоинством было то, что они давали целостное восприятие задачи.

Решение проблемы состоит в возможности конструирования в специально созданном для этого виртуальном пространстве с помощью удобного программного инструмента, поддерживающего пространственное воображение (рисунок 2). Уже некоторое время такой подход общепринят в разнообразных 3D-CAD-системах. Школьники,

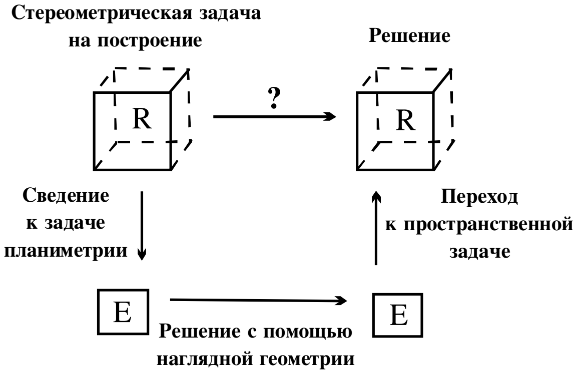

Рисунок 1. Традиционная схема решения пространственной задачи.

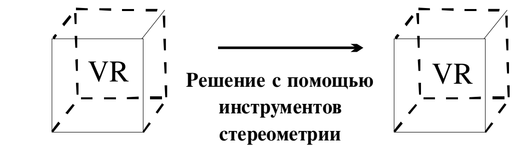

Рисунок 2. Пространственные задачи на построение в виртуальном пространстве.

привыкшие к компьютерным играм в виртуальном пространстве, имеют предварительный опыт и не испытывают страха перед такими системами. Конечно, для успешного применения таких систем нужны некоторые первичные навыки и знания в области стереометрии.

Под виртуальным постранством мы понимаем результат параллельного или центрального проектирования трехмерного евклидова пространства или его части на плоскость экрана. Это пространство воспринимается как трехмерное. Система Cabri 3D версия 1.0 является инструментом, который, среди прочего, может

– производить пространственные построения в «глубине» экрана,

– визуализировать пространственные конфигурации, задавая их атрибуты и вписывая в виртуальную сферу, вращая которую, можно рассматривать объект со всех сторон,

– деформировать пространственные объекты, как это обычно делается в системах динамической двумерной геометрии.

В следующем параграфе мы объясняем, что понимается под пространственными построениями. В параграфе 3 мы продемонстрируем основные возможности пространственных построений в Cabri 3D и примеры решения задач на построение.

2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

В противоположность построениям в планиметрии, которые достаточно освещены в литературе («Theorie der geometrischen Konstruktionen», Bieberbach 1952; «Handbuch der Schulmathe-matik», Wolff et al., 1966; «Geometrie für die Sekundarstufe», Holland 1996; «Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer», Schumann, 1991), систематическое изложение построений в пространстве дано только в «Geometrie in Ebene und Raum», Quaisser/Sprengel, 1989, по крайней мере, в немецкоязычной литературе.

Далее мы рассмотрим большое число элементарных построений. При этом мы не затрагиваем лежащих в их основе теорем существования и единственности и не обсуждаем особые случаи. Cabri 3D будет использоваться для иллюстрации методов компьютерной графики и как инструмент для построений.

Мы используем «Конструктивное Пространство» как модель реального евклидова пространства. В Cabri 3D это куб, на границе которого вырезают след различные объекты, внешние по отношению к кубу (например, плоскость может выглядеть как шестиугольник, пятиугольник, трапеция, параллелограм или треугольник). В этом пространстве мы можем выбирать или создавать множество точек, с помощью которых реализуются следующие построения:

(1) Построение прямой, проходящей через две точки (рисунок 3).

(2) Построение плоскости через три не лежащие на одной прямой точки (рисунок 4).

(3) Построение сферы с заданным центром и проходящей через данную точку (рисунок 5).

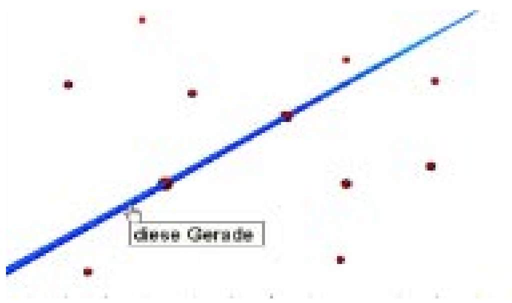

Рисунок 3. Прямая через две точки.

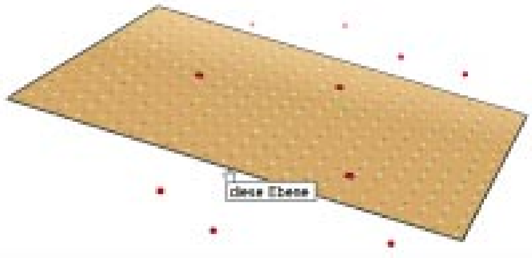

Рисунок 4. Плоскость через три точки.

Рисунок 5. Сфера через точку с данным центром.

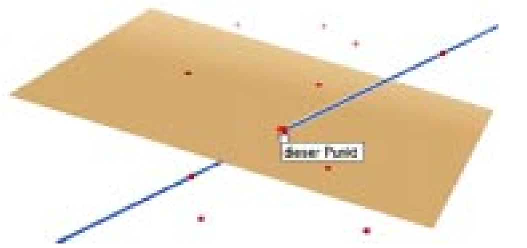

Рисунок 6. Пересечение прямой и плоскости.

Далее строятся точки пересечения:

(4) Пересечение прямой и плоскости (рисунок 6).

(5) Пересечение прямой и сферы (рисунок 7).

(6) Пересечение двух плоскостей (рисунок 8).

(7) Сечение сферы плоскостью (рисунок 9).

(8) Пересечение двух сфер (рисунок 10).

На создаваемых объектах можно строить многочисленные вспомогательные точки для дальнейших построений.

На каждой построенной в пространстве плоскости можно строить точки для реализации следующих плоских построений на этой плоскости:

(9) Прямой через две различные точки.

(10) Окружности с данным центром, проходящей через данную точку.

(11) Пересечения двух прямых.

(12) Пересечения прямой с окружностью.

(13) Пересечения двух окружностей (рисунок 11).

Решение задач на построение с помощью «Циркуля» (кругового или сферического) и «Линейки» (одномерной или двумерной) состоит в применении указанных

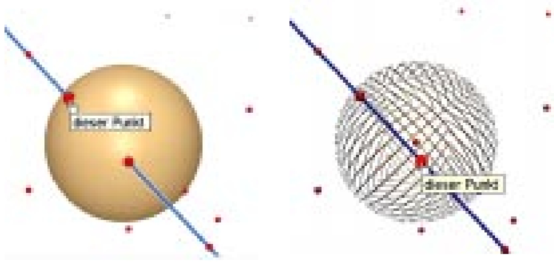

Рисунок 7. Пересечение прямой и сферы.

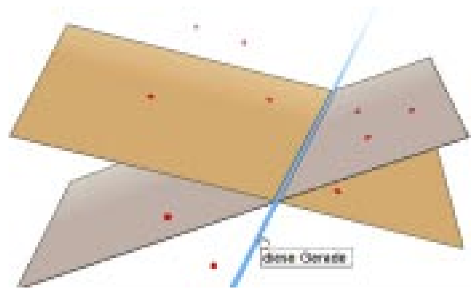

Рисунок 8. Пересечение двух плоскостей.

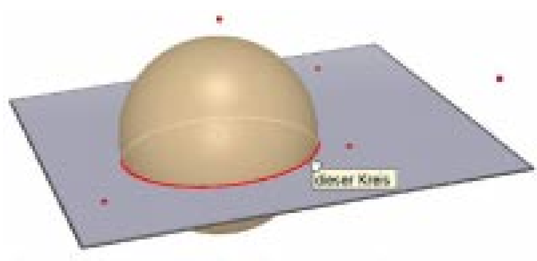

Рисунок 9. Сечение сферы плоскостью.

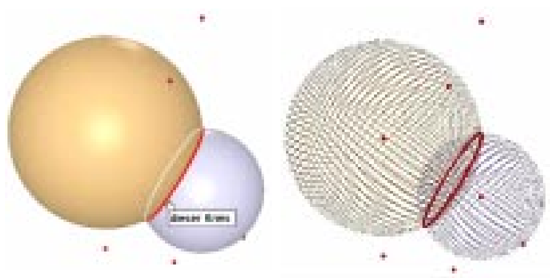

Рисунок 10. Пересечение двух сфер.

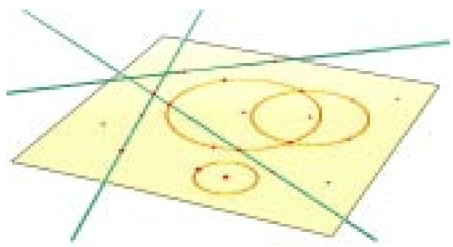

Рисунок 11. Элементарные плоские построения.

выше действий (1)–(13) к заданным объектам. При этом искомые точки строятся как пересечения геометрических мест (прямых, плоскостей, сфер). Этот метод можно назвать «Методом геометрических мест».

Замечание. Наряду с эвристическим раcсуждением относительно способа решения определенной задачи конструирования с помощью заданных инструментов, возникает проблема описания тех задач, которые, хотя бы теоретически, могут быть решены с применением этих инструментов. Применяя методы аналитической геометрии, можно получить аналитическую зависимость между координатами искомых и заданных точек. Поскольку используются сечения объектов кругами и сферами, то выражения, описывающие такую зависимость, представляют собой квадратные корни из координат данных точек. Отсюда следует, что только те задачи, которые имеют такое аналитическое решение, могут быть решены с помощью «Циркуля» (кругового или сферического) и «Линейки» (одномерной или двумерной).

Для упрощения решения задач на построение служат так называемые *базовые конструкции*. Они сводятся к элементарным конструкциям.

На построенной плоскости можно с помощью конструкций (9)–(13) и других базовых конструкций создать следующие модули:

• Перпендикуляр через середину данного отрезка.

• Середина отрезка.

• Опустить перпендикуляр из точки на прямую.

• Восставить перпендикуляр из данной точки на прямой.

Рисунок 12. Плоскость через точку и прямую.

• Прямая, параллельная данной.

• Биссектриса.

• Окружность через три точки.

...

С помощью элементарных построений (1)–(8) реализуемы следующие базовые конструкции:

• Плоскость через точку и прямую.

• Плоскость через две нескрещивающиеся прямые.

• Пересечение трех плоскостей.

• Плоскость через середину отрезка и перпендикулярная ему.

• Середина отрезка.

• Перпендикуляр из точки, лежащей в плоскости.

• Перпендикуляр из точки вне плоскости на плоскость.

• Плоскость через точку параллельно другой плоскости.

• Перпендикуляр из точки на прямую.

• Окружность через данную точку с центром на прямой, перпендикулярной плоскости окружности.

• Плоскость, делящая пополам двугранный угол.

• Сфера через четыре точки.

• Точки пересечения двух окружностей в пространстве.

• Точки пересечения трех сфер.

Далее следуют иллюстрации и комментарии к некоторым из указанных конструкций.

Построение «Плоскость через точку и прямую» (рисунок 12): Отмечаем на прямой две точки. В соответствии с (2) через три точки проводим плоскость.

Построение «Плоскость через нескрещивающиеся прямые» (рисунок 13): нескрещивающиеся прямые лежат в одной плоскости. Выбирая на прямых вспомогательные точки, строим согласно (2) плоскость.

Построение «Пересечение трех плоскостей» (рисунок 14): Строим согласно (6) линию пересечения двух плоскостей. Согласно (11) строим точку пересечения с третьей плоскостью.

На основе следующих базовых конструкций можно построить пространственные аналоги циркуля и линейки.

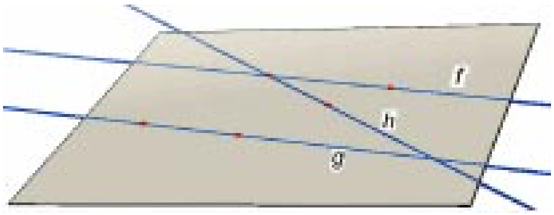

Рисунок 13. Плоскость через нескрещивающиеся прямые.

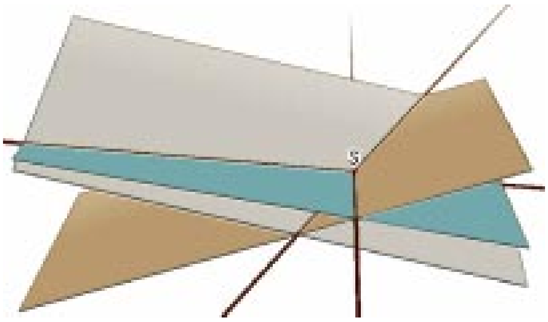

Рисунок 14. Пересечение трех плоскостей.

Построение «Плоскость, перпендикулярная отрезку и делящая его пополам» (рисунок 15): Даны две точки. строим согласно (3) две сферы с центром в одной из точек и содержащие другую точку. Затем по (8) строим их пересечение и согласно (2) – искомую плоскость.

Построение «Перпендикуляр к плоскости» (рисунок 16): Строим по (3) произвольную сферу с центром в данной точке плоскости. Пересечение сферы с плоскостью получим по (7). Пересечение двух перпедикулярных плоскостей согласно (6) дает искомый прпендикуляр.

Построение «Перпендикуляр из точки на плоскость» (рисунок 17): Строим согласно (3) сферу с центром в данной точке через любую точку плоскости. Далее по точкам на окружности строим по (7) две перпендикулярные плоскости, пересечение которых и есть искомый перпендикуляр.

Построение «Плоскость, делящая пополам двугранный угол» (рисунок 18): Сначала строим ребро двугранного угла по (6). Вокруг ребра строим окружность через любую точку одной из данных плоскостей.

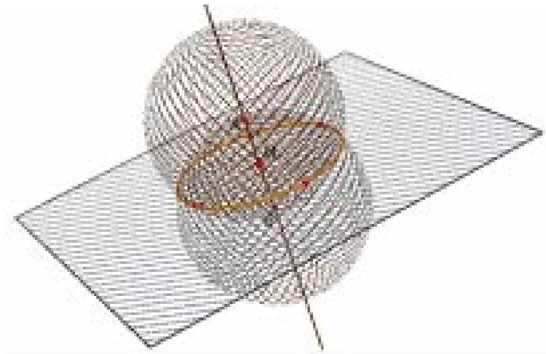

Рисунок 15. Плоскость, перпендикулярная отрезку и делящая его пополам.

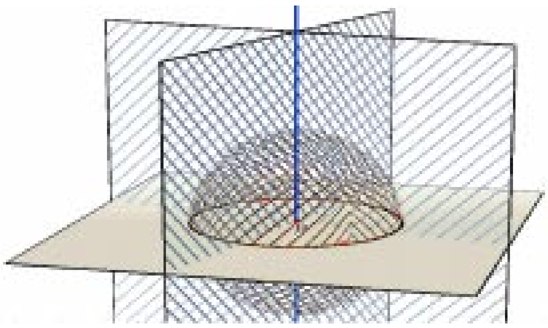

Рисунок 16. Перпендикуляр к плоскости.

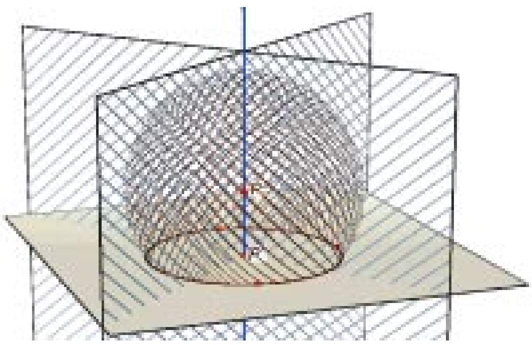

Рисунок 17. Перпендикуляр из точки на полуплоскость.

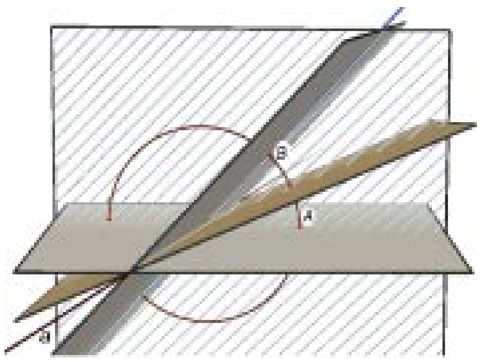

Рисунок 18. Плоскость, делящая пополам двугранный угол.

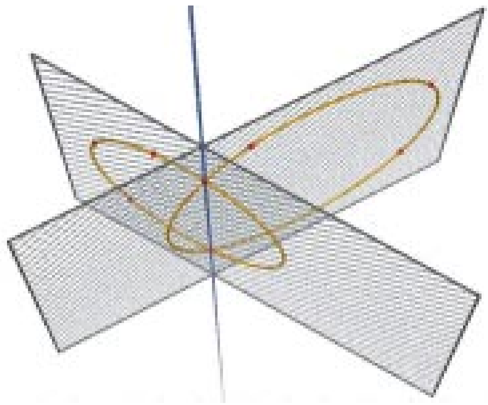

Рисунок 19. Пересечение двух окружностей в пространстве.

Окружность пересекает вторую плоскость в точке. Искомая плоскость перпендикулярна отрезку и проходит через его середину.

Построение «Пересечение двух окружностей в пространстве» (рисунок 19): Каждая из окружностей определяет плоскость. Пересечение плоскостей определяет прямую, которая, по условию, пересекается с окружностями.

3. ПОСТРОЕНИЯ В CABRI 3D

Далее мы показываем, какими возможностями для построений обладает Cabri 3D. Некоторые из них мы демонстрируем на конкретных примерах, из которых будет видно, насколько возможности Cabri 3D превосходят обычные построения вручную.

От редакции: эта часть статьи вынесена в отдельную статью и будет опубликована в следующем номере.

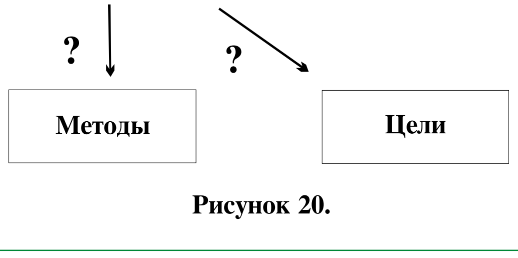

Рисунок 20.

4. ДИДАКТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ИНТЕРАКТИВНОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ

Какое влияние оказывают компьютерные методы на преподавание математики, его темы, методы и цели (рисунок 20)?

В нашем случае вопрос ставится так: какое влияние может иметь такой иструмент, как Cabri 3D, на преподавание геометрии?

Попытаемся дать лишь предварительный ответ:

Конструирование в виртуальном пространстве порождает новое отношение к следующим традиционным темам в преподавании стереометрии [*Schumann, H.* (2005a)]:

– геометрия многогранников (например, платоновых тел и их производных);

– определение и взаимное расположение геометрических объектов (точка, прямая, плоскость);

– пространственные аналоги планиметрии (например, аналогия между треугольником и тетраэдром);

– конические сечения с пространственной точки зрения;

– наглядная геометрия;

– сферическая геометрия.

Кроме того, интерактивное конструирование в виртуальном пространстве может использоваться в качестве «служанки», обеспечивающей наглядное представление внутриматематических связей (например, как подготовка к пространственной аналитической геометрии).

Как сами построения в пространстве, так и их приложения могут наполнить конкретным содержанием идею «пространства и формы» (KMK 2003, http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/bildungsstandards.htm) и помочь развитию пространственных представлений.

Применяя Cabri 3D для интерактивного конструирования в виртуальном пространстве, мы преследуем следующие цели обучения:

– развить геометрическое видение и приучить к виртуальному пространству как к рабочему пространству;

– оценить полезность стереометрии;

– обеспечить учащегося знаниями в области стереометрии (понятия, утверждения и процессы);

– анализировать явления стереометрии эвристическими методами;

– приучить к свободному владению методами и инструментами трехмерной графики.

Работа с Cabri 3D полезна и с общепознавательной точки зрения. В частности, можно отметить:

– визуализация пространственной информации;

– индуктивный метод (открытие закономерностей путем варьирования исходного тела);

– метод аналогий (например, между планиметрией и стереометрией);

– *соединение* планиметрии и стереометрии (например, в доказательствах);

– возможность эксперимента (als eine propдdeutische Arbeitsweise in der Geometrie – Vive le bricoleur!);

– выделение составных частей сложного объекта (например, их высвечивание на экране);

– работа с модулями;

– работа в прямом и обратном направлении (используя Undo- и Redo-функции).

Распространение на стереометрию методов построений, развитых в планиметрии, необходимо для преподавания математики на современном уровне.

По нашему мнению, конструирование в виртуальном пространстве является важной вехой в изучении и преподавании стереометрии с использованием компьютеров.

Литература

Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004): Cabri 3D 1.0. (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version (Bearbeitung von H. Schumann) zu beziehen von www.cotec.de

Bieberbach, L. (1952): Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel: Birkhдuser

Graf, U. (1964): Darstellende Geometrie. Bearbeitet von M. Barner. Heidelberg: Quelle & Meyer

Götze, H. (1991): Die Baugeometrie von Castel del Monte. Mьnchen: Prestel

Holland, G. (1996): Geometrie in der Sekundarstufe. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum

Quaisser, E. ; Sprengel, H.-J. (1989): Geometrie in Плоскость und Raum. Berlin: DVW

Wolff, G. (Hrsg.) (1966): Handbuch der Schulmathematik. 2. Auflage. Hannover: Schroedel

Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler-Teubner

Schumann, H. (2001): Raumgeometrie-Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen

Schumann, H. (2004a): Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Пример «Dreieck – Тетраэдр». In: math. did. 27, Bd. 1, S. 82–99

Schumann, H. (2004b): Konstruktion von Polyedermodellen mit Cabri 3D im Umfeld der platonischen Kцrper. In: Beitrдge zum Computereinsatz in der Schule. Jg. 18, Heft 2, S. 3-48

Schumann, H. (2005a): Dynamische Raumgeometrie. In: Beitrдge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim: Franzbecker

Schumann, H. (2005b): Interaktives geometrisches Modellieren im virtuellen Raum mit Cabri 3D. In: LOG IN – Informatische Bildung und Computer in der Schule, Heft 133, S. 55–61

Schumann, H. (2005c): Eine dynamische Behandlung der Kegelschnitte mit Cabri 3D. Erscheint in: MNU Jhg. 58, Heft 6

Thaer, C. (Hg.) (1980): Euklid. Die Elemente. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft

Prof. Dr. Heinz Schumann
Faculty III, Mathematics/Informatics,
University of Education Weingarten
D-88250 Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

Перевод М. Юдовина.