Школа современного программирования

Есипов Александр Сергеевич

РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При решении логических задач наиболее интересен и важен этап формализации высказываний. На этом этапе желательно по возможности не вводить лишних переменных, которые будут увеличивать длину наборов значений аргументов и усложнять формулы функций. Например, каждую пару высказываний: тепло и холодно, большой и маленький остров, острый и тупой угол и тому подобных – можно закодировать одной переменной и ее инверсией.

В условии задачи может быть задано или получено в процессе решения несколько простых или сложных высказываний $f_1, f_2, ..., f_n$, истинность которых известна. В этом случае достаточно взять конъюнкцию этих высказываний $F = f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n$ и определить набор простых высказываний, на котором эта конъюнкция принимает значение «истина». Этот набор и будет решением задачи. Возможно, что такой набор будет не один, что укажет на наличие нескольких решений. Возможен также вариант отсутствия решения.

Платон (427–347 гг. до н. э.) и Сократ (ок. 469 – 399 гг. до н. э.)

Создателем логики считают Аристотеля. Но элементы логики просматриваются уже в сочинениях Платона, созданных задолго до Аристотеля. Так главный герой «Диалогов» Платона его учитель Сократ в своих беседах и рассуждениях выстраивает стройные и логически обоснованные последовательности аргументаций, подводя слушателей к желаемому выводу. От этих логических построений до формальной логики оставался один шаг, который и сделал Аристотель.

Может быть задано в постановке задачи или получено при ее решении несколько высказываний, о которых известно, что из них только некоторое количество истинно. В этом случае организуется «перебор вариантов». Например, заданы высказывания a и b, о которых известно, что из них только одно истинно. В этом случае записывают следующую функцию: $F = a \cdot \bar{b} \vee \bar{a} \cdot b$.

Если заданы высказывания a, b, c, d, из которых только одно истинно, то это соответствует следующей формуле:

$$F = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \vee \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \vee$$
$$\vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d .$$

Если сказано, что из этих высказываний истинны лишь какие-то два, то имеем следующую формулу:

$$F = a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \vee a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} \vee a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d \vee$$
$$\vee \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot \bar{d} \vee \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d .$$

При решении логических задач без использования компьютера приходится выполнять тождественные преобразования сложных логических формул. При этом используются законы и правила преобразования формул булевой алгебры. Напомним их.

1. Переместительные законы (коммутативность) $x \cdot y = y \cdot x$,
$$x \vee y = y \vee x.$$

2. Сочетательные законы (ассоциативность) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$$

3. Распределительные законы (дистрибутивность)

$$x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z,$$

$$x \vee y \cdot z = (x \vee y)(x \vee z).$$

4. Законы тавтологии (идемпотентность)

$$x \cdot x = x,$$

$$x \vee x = x.$$

5. Законы доминирования

$$x \cdot 1 = x,$$

$$x \vee 0 = x,$$

$$x \cdot 0 = 0,$$

$$x \vee 1 = 1.$$

6. Законы исключенного третьего

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

$$x \vee \bar{x} = 1.$$

7. Законы де Моргана

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y},$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

8. Законы склеивания

$$x \cdot y \vee x \cdot \bar{y} = x,$$

$$(x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x.$$

9. Законы поглощения

$$x \vee x \cdot y = x,$$

$$x \cdot (x \vee y) = x.$$

10. Закон двойного отрицания

$$\bar{\bar{x}} = x.$$

Задача 1.

Показания свидетелей правонарушения значительно различались. Первый свидетель сказал, что преступник был брюнет с усами. Второй заявил, что это был блондин без усов. Третий свидетель подтвердил, что преступник был блондином, но без портфеля. Четвертый был уверен, что преступник был шатеном с портфелем.

В действительности оказалось, что каждый из свидетелей ошибся в одном из своих показаний. Каким был правонарушитель?

Решение:

Введем обозначения: a = «С усами», b = «Брюнет», c = «Блондин», d = «С портфелем» и e =«Шатен».

Выпишем высказывания свидетелей пока без учета их ошибок.

Первый свидетель: «b И a», $b \cdot a$.

Второй свидетель: «c И НЕ a», $c \cdot \bar{a}$.

Третий свидетель: «c И НЕ d», $c \cdot \bar{d}$.

Четвертый свидетель: «e И d», $e \cdot d$.

С учетом того, что каждый из свидетелей ошибся в одном из своих показаний, запишем их показания следующими формулами:

$$f_1 = a \cdot \bar{b} \vee \bar{a} \cdot b = a \text{ Xor } b.$$

$$f_2 = \bar{c} \cdot \bar{a} \vee c \cdot a = c \text{ Xor Not } a.$$

$$f_3 = \bar{c} \cdot \bar{d} \vee c \cdot d = c \text{ Xor Not } d.$$

$$f_4 = e \cdot \bar{d} \vee \bar{e} \cdot d = e \text{ Xor } d.$$

Ограничение на то, что правонарушитель может быть одновременно только или блондином, или брюнетом, или шатеном записывается следующей формулой:

$$f_5 = b \cdot \bar{c} \cdot \bar{e} \vee \bar{b} \cdot c \cdot \bar{e} \vee \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot e.$$

Логическое произведение всех пяти функций и упрощение полученной формулы приводят к решению задачи:

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5 = a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d \cdot \bar{e}.$$

Функция f принимает значение 1 (истина) на наборе 10110, то есть правонарушитель блондин с усами и с портфелем (листинг 1, рисунок 1).

Аристотель (384–322 гг. до н. э.)

Величайший мудрец древности, ученик Платона и учитель Александра Македонского Аристотель обобщил все сделанное до него в построении суждений и умозаключений, систематизировал правила рассуждений и описал их в своем знаменитом труде, который назвал «Органон» (метод). Важнейшая составляющая «Органона» – это «Первая аналитика», в которой была изложена силлогистика (от греч. – выводящий умозаключение) – учение о логической дедукции.

Листинг 1. Приметы правонарушителя

```
Private Sub Form_Load()
  Show
  Print "a  "; "b  "; "c  "; "d  "; " e", " f"
  For a = 0 To 1: For b = 0 To 1: For c = 0 To 1
  For d = 0 To 1: For e = 0 To 1
   f1 = a Xor b
   f2 = Not a Xor c
   f3 = Not d Xor c
   f4 = d Xor e
   f5 = (b And Not c And Not e) Or (Not b And c And Not e) Or (Not b And Not c And e)
   f = f1 And f2 And f3 And f4 And f5
   If f <> 0 Then Print a; b; c; d; e, f
  Next e, d, c, b, a
End Sub
```

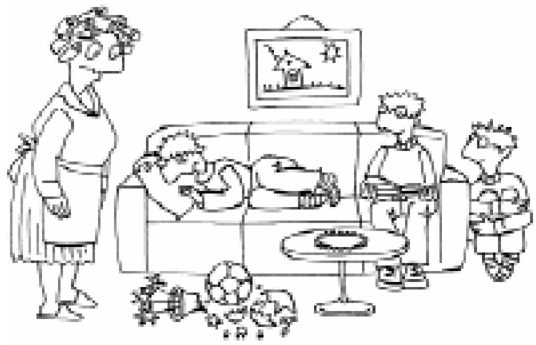
Рисунок 1.

Напомним, что некоторые задачи могут иметь неоднозначное решение. В этом случае итоговая функция может быть истинна не на одном наборе значений аргументов, код функции содержит несколько единиц. Возможен вариант, когда решения задачи нет – в коде функции нет единиц.

Постановка следующих двух задач взята из демонстрационных задач ЕГЭ. Обе задачи легко формализуются, имеют по одному решению. Но вторая задача связана с громоздкими формулами, большими затратами времени на их преобразования, и при дефиците времени необходимо применение компьютера.

> ***Готфрид Лейбниц (1646–1716)***
>
> *Испанец Раймунд Луллий (1235–1315) создал машину, которая перебирала и комбинировала различные понятия, оставляя анализ их сочетаний и вывод заключения за человеком.*
>
> *Следующая попытка использовать логические построения в решении гениальной по замыслу и грандиозной по масштабу задачи была предпринята Готфридом Лейбницем, человеком энциклопедических знаний, с большим диапазоном интересов. Главной своей задачей Лейбниц считал придание Аристотелевой логике алгебраической формы. Он хотел создать искусственный язык науки, который должен был стать средством выражения любых мыслей, средством анализа и решения любых проблем. Попутно Лейбниц интересовался созданием вычислительных машин, использованием для вычислений двоичной системы счисления.*

Задача 2.



Мама, прибежавшая на звон разбившейся вазы, застала всех трех своих сыновей в совершенно невинных позах: Саша, Ваня и Коля делали вид, что происшедшее к ним не относится. Однако футбольный мяч среди осколков явно говорил об обратном.

– Кто это сделал? – спросила мама.

– Коля не бил по мячу, – сказал Саша. – Это сделал Ваня.

Ваня ответил: – Разбил Коля, Саша не играл в футбол дома.

– Так я и знала, что вы друг на дружку сваливать будете, – рассердилась мама. – Ну, а ты что скажешь? – спросила она Колю.

– Не сердись, мамочка! Я знаю, что Ваня не мог этого сделать. А я сегодня еще не сделал уроки, – сказал Коля.

Оказалось, что один из мальчиков оба раза солгал, а двое в каждом из своих заявлений говорили правду. Кто разбил вазу?

Решение:

Выполним формализацию задачи. Введем обозначения:

C = «Саша разбил вазу», $\neg C$ = «Саша не разбивал вазу».

Аналогичное значение будут иметь логические переменные B и K для Вани и Коли.

Два ответа Саши: $F_1 = \neg K \cdot B$. Если он оба раза солгал, то $G_1 = K \cdot \neg B$.

Два ответа Вани: $F_2 = K \cdot \neg C$. Если он также в каждом ответе солгал, то $G_2 = \neg K \cdot$ С.

Одно заявление Коли: $F_3 = \neg B$. $G_3 = B$. Вторым ответом Коли (он не сделал еще уроки) пренебрегаем, уменьшая при этом число логических переменных.

Итоговая функция с учетом того, что только один из мальчиков сказал неправду, записывается следующим образом:

$$F = G_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \vee F_1 \cdot G_2 \cdot F_3 \vee F_1 \cdot F_2 \cdot G_3 .$$

После подстановки в формулу значений функций и преобразований получаем ответ:

$$F = K \cdot \overline{B} \cdot K \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} \vee \overline{K} \cdot B \cdot \overline{K} \cdot C \cdot \overline{B} \vee$$
$$\vee \overline{K} \cdot B \cdot K \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} = K \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

Полученное выражение принимает значение истина только на одном наборе значений своих аргументов: K = истина, B = ложь и C = ложь (100).

Ответ: Вазу разбил Коля.

Задача 3.

Три школьника, Миша (M), Коля (K) и Сергей (C), остававшиеся в классе на перемене, были вызваны к директору по поводу разбитого в это время окна в кабинете. На вопрос директора о том, кто это сделал, мальчики ответили следующее:

Миша: «Я не бил окно, и Коля тоже...»

Коля: «Миша не разбивал окно, это Сергей разбил футбольным мячом!»

Сергей: «Я не делал этого, стекло разбил Миша».

Стало известно, что один из ребят сказал чистую правду, второй в одной части заявления соврал, а другое его высказывание истинно, а третий оба факта исказил. Зная это, директор смог докопаться до истины.

Кто разбил стекло в классе? В ответе запишите только первую букву имени.

Решение:

Формализация высказываний:

M = «Разбил окно Миша»;

Not M = $\overline{M}$ = «Миша не разбивал окно»

K = «Разбил окно Коля»;

Not K = $\overline{K}$ = «Коля не разбивал окно»

C = «Разбил окно Сергей»;

Not C = $\overline{C}$ = «Сергей не разбивал окно»

Обозначение заявлений школьника с номером i: F_i – чистая правда, G_i – в одной части соврал, H_i – оба факта исказил.

Миша – $F_1 = \overline{M} \cdot \overline{K}$, $G_1 = \overline{M} \cdot K$, $H_1 = M \cdot K$.

Коля – $F_2 = \overline{M} \cdot C$, $G_2 = M \cdot C \vee \overline{M} \cdot \overline{C}$, $H_2 = M \cdot \overline{C}$.

Джордж Буль (1815–1864)

Дж. Буль родился в бедной семье. Он окончил лишь начальные классы школы для бедных. Самостоятельно изучив латынь и древнегреческий, девятнадцатилетний Буль печатает в местных изданиях свои переводы Горация. После долгих поисков работы, которая оставляла бы время для самообразования, Буль открыл маленькую школу, в которой был единственным преподавателем. К счастью, два влиятельных математика – Д. Грегори, издававший математический журнал, и О. де Морган, профессор Кембриджского университета, оценили глубину первых работ Буля. В 1849 г. он стал профессором математики в колледже г. Корк в Ирландии. В 1854 г. Буль опубликовал работу «Исследования законов мышления». В ней была изложена алгебра логики высказываний, основанная на трех операциях: And (и), Or (или) и Not (не).

С точки зрения современной математики, алгебра Буля служит математической основой для решения задач анализа и синтеза релейных схем и логических схем компьютеров, использующих двоичную систему счисления.

Сергей – $F_3 = \overline{C} \cdot M$, $G_3 = C \cdot M \vee \overline{C} \cdot \overline{M}$, $H_3 = C \cdot \overline{M}$.

Примем естественное ограничение. Будем считать, что стекло в классе разбил один из школьников.

$$F_4 = M \cdot \overline{K} \cdot \overline{C} \vee \overline{M} \cdot K \cdot \overline{C} \vee \overline{M} \cdot \overline{K} \cdot C.$$

Сложность следующих записей в том, что каждый из школьников мог или сказать правду (F), или полуправду (G), или в обеих частях заявления сказать ложь (H). Поэтому итоговая функция должна учитывать все варианты ответов. Таких комбинаций шесть (см. таблицу 1).

Итоговая функция – это дизъюнкция шести конъюнкций функций из таблицы, логически умноженная на F_4.

$$F = (F_1 \cdot G_2 \cdot H_3 \vee F_1 \cdot H_2 \cdot G_3 \vee \vee G_1 \cdot F_2 \cdot H_3 \vee G_1 \cdot H_2 \cdot F_3 \vee \vee H_1 \cdot F_2 \cdot G_3 \vee H_1 \cdot G_2 \cdot F_3) \cdot F_4.$$

На листинге 2 приведена программа решения задачи.

Ответ: $M \cdot \overline{K} \cdot \overline{C} = 100$.

Замечание: Если не вводить ограничение F_4, то получим два ответа. Первый ответ – $M \cdot \overline{K} \cdot \overline{C} = 100$. Второй ответ – $\overline{M} \cdot K \cdot C = 011$, который указывает, что окно разбили вдвоем Коля и Сергей. Заметим, что ответ в задаче 2 получен без введения ограничения. Ввод ограничения только подтверждает полученный ответ.

Листинг 2. Решение задачи о разбитом окне

```
Private Sub Form_Load()
 Show
 Print " M"; "  K"; " C", " F"
 For M = 0 To 1: For K = 0 To 1: For C = 0 To 1
   F1 = Not M And Not K
   G1 = Not M And K Or M And Not K
   H1 = M And K
   F2 = Not M And C
   G2 = M And C Or Not M And Not C
   H2 = M And Not C
   F3 = Not C And M
   G3 = C And M Or Not C And Not M
   H3 = C And Not M
   f4 = M And Not K And Not C Or Not M And K And Not C Or _
     Not M And Not K And C
   F = (F1 And G2 And H3 Or F1 And H2 And G3 Or G1 And F2 And H3 Or _
     G1 And H2 And F3 Or H1 And F2 And G3 Or H1 And G2 And F3) And f4
   If F = 1 Then Print M; K; C, F
  Next C, K, M
End Sub
```

Таблица 1.

Миша	Коля	Сергей
F_1	G_2	H_3
F_1	H_2	G_3
G_1	F_2	H_3
G_1	H_2	F_3
H_1	F_2	G_3
H_1	G_2	F_3

Литература

1. *Есипов А.С.* Логические основы построения и работы компьютеров // Компьютерные инструменты в образовании, № 1, 2000.

2. *Есипов А.С.* Информатика и информационные технологии для учащихся школ и колледжей. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

3. *Есипов А.С., Паньгина Н.Н., Громада М.И.* Информатика. Сборник задач и решений для общеобразовательных учебных заведений. СПб.: Наука и Техника, 2001.

Есипов Александр Сергеевич,
кандидат технических наук,
доцент.