Васильев Николай Николаевич

КАК КОМПЬЮТЕР ПОМОГАЕТ УПРОЩАТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, или НЕМНОГО О БАЗИСАХ ГРЁБНЕРА

КАК МЫ УПРОЩАЕМ УРАВНЕНИЯ. ПОНИЖАЕМ СТЕПЕНИ

Начиная уже с младших классов школы, мы постоянно имеем дело с уравнениями от одной или нескольких переменных. Некоторые из них, например уравнения первой степени или квадратные уравнения, легко решаются. Наверняка многие из вас знают, что точные формулы для решения уравнений третьей или четвертой степени от одной переменной довольно сложны. Они были выведены итальянскими математиками Кардано и Тартальей. А вот уже решения уравнений пятой и более высоких степеней не могут быть выражены через радикалы никакой степени. Это было доказано норвежским математиком Н. Абелем и французским математиком Э. Галуа. На первый взгляд, может показаться, что раз уж простых формул нет даже для решений уравнений, то браться за решение произвольных систем алгебраических уравнений – дело безнадежное. К счастью, это только первое впечатление. На самом деле, в случае одной переменной мы знаем о корнях произвольного алгебраического уравнения довольно много. На практике часто нам и не нужно выражать решения при помощи радикалов. Иногда нам нужно знать только количество решений. Иногда нужно уметь находить эти решения с произвольной точностью. Так вот эти задачи для произвольного уравнения вида $p(x) = 0$ решаются довольно успешно. Согласно основной теореме алгебры, полином (многочлен) степени n имеет ровно n комплексных корней, если мы учитываем их кратности. Если мы интересуемся только вещественными решениями, то существуют эффективные методы нахождения всех вещественных корней с произвольной сколь угодно высокой точностью. Существуют даже точные формулы для всех корней одного уравнения произвольной степени от одной переменной, правда, они выражают корни не через радикалы, а используют более сложные неэлементарные функции – так называемые θ-функции Вейерштрасса.

А теперь постараемся выяснить, как обращаться с произвольными системами полиномиальных уравнений от нескольких переменных, но для начала научимся их упрощать.

ДЕЛИМ ПОЛИНОМ НА ПОЛИНОМ

Мы будем рассматривать произвольные системы полиномиальных уравнений вида

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ P_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}.$$

Сразу оговоримся, что количество уравнений у нас может быть любым и никак не связано с количеством неизвестных. В принципе, мы даже будем допускать и системы, содержащие бесконечное (!) число уравнений. Сначала вернемся к случаю одной переменной и посмотрим, упростится ли наша задача, если мы будем рассматривать системы уравнений только от одной переменной. Начнем с примера.

Пусть у нас задано два уравнения

$$\begin{cases} P = x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x + 10 = 0 \\ Q = x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0 \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что в этом примере мы сразу можем упростить первое уравнение, вычитая из него второе, домноженное на x^2

$$P - x^2 Q = -x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 10.$$

Полученное уравнение четвертой степени поддается упрощению тем же самым приемом – вычитаем из него второе, умноженное на x. В третий раз применив этот прием, получим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0\,.$$

Теперь процесс можно продолжить, поменяв уравнения ролями – мы упрощаем второе уравнение с помощью первого. Неожиданно мы получаем в качестве такого упрощения 0 = 0.

Таким образом, наше второе уравнение исчезло, и у нас осталось одно квадратное уравнение, которое легко решается. Посмотрев более внимательно, вы увидите, что мы просто дважды произвели деление полинома на полином. Первый раз мы разделили $P(x)$ на $Q(x)$, получив в остатке $x^2 - 2x + 5$.

Затем мы разделили $Q(x)$ на $x^2 - 2x + 5$, причем в остатке получился 0.

Деление полиномов удобно записывать по схеме, аналогичной той, которую мы используем при делении чисел, то есть «уголком»:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 4x + 10 & x^3 - x^2 + 3x + 5 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^5 - x^4 + 3x^3 + 5x^2} & x^2 - x + 1 \\
\qquad - x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x & \\
-\quad \underline{- x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x} & \\
\qquad\qquad x^3 \qquad - x + 10 & \\
\qquad -\underline{x^3 - 2x^2 - 3x + 5} & \\
\qquad\qquad\qquad x^2 - 2x + 5 &
\end{array}$$

...любые два уравнения мы можем заменить одним.

В определенном смысле деление полиномов даже проще деления чисел – здесь мы всегда делим старший член первого полинома на старший член второго. В результате получается одночлен, который умножается на весь делитель, а затем вычитается из делимого. Далее процесс продолжается до тех пор, пока мы не получим в остатке многочлен, степень которого меньше степени делителя.

Мы видим, что для одной переменной любые два уравнения мы можем заменить одним. Отсюда нетрудно вывести, что такой процесс упрощения, примененный к системе полиномов от одной переменной, в результате всегда приводит систему к одному уравнению.

Описанный процесс деления полиномов носит название алгоритма Евклида.

Мы показали, что система уравнений от одной переменной всегда эквивалентна одному уравнению. Заменив всю систему одним уравнением, мы уже можем найти все его решения. В частности, мы определили точное количество комплексных корней – оно равно степени получившегося в результате одного уравнения. Вполне возможен и такой случай, когда в качестве наибольшего общего делителя полиномов мы получаем 1, то есть ненулевую константу. Тогда наша система эквивалентна одному уравнению 1 = 0, то есть не имеет решений. В этом случае говорят, что система несовместна.

ЧТО БУДЕТ ДЛЯ ДВУХ И БОЛЕЕ ПЕРЕМЕННЫХ. ПОЧЕМУ РЕЗУЛЬТАТ НЕ ОДНОЗНАЧЕН

Теперь перейдем к общему случаю систем уравнений от многих переменных. Оказывается, мы можем применять практически те же самые методы упрощения таких систем, хотя некоторые сложности нам встретятся. Опять проиллюстрируем на примере.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} P = x^3 y + y^2 - 1 = 0 \\ Q = x^3 + 3y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Мы видим, что мы можем исключить член x^3y,

$$P - yQ = -2y^2 + y - 1 = 0.$$

В итоге мы привели нашу систему к довольно простому виду, в результате чего она уже поддается решению, так как мы получили квадратное уравнение относительно переменной y.

В случае одной переменной мы, упрощая уравнение, всегда понижали его степень. Здесь дело обстоит сложнее. Понижая степень по переменной x, мы можем увеличить степень по y, и наоборот. Выход был бы найден, если бы, как и в случае одной переменной, мы знали, какой из членов уравнения является старшим. Его-то мы и старались бы исключить, используя старший член другого уравнения. Давайте упорядочим все одночлены – мы их далее будем называть *мономами*. Сначала упорядочим все переменные, расположив их по «старшинству». В нашем примере переменную y мы будем считать более старшей, чем переменную x. Сравнивая два монома, мы сначала сравниваем степени при старшей переменной. Если у первого монома степень при старшей переменной больше, то он считается старшим. Если же степени при старших переменных совпадают, то сравниваем степени при следующей по старшинству переменной. Такой порядок называется лексикографическим. Именно так упорядочены слова в словарях. Буквы располагаются в алфавитном порядке, а слова упорядочены сначала по первой букве, затем по второй и так далее. Что же нам дает упорядочение мономов? В каждом полиноме теперь выделен старший член, и мы можем проверить, не делится ли один из старших членов остальных полиномов на этот старший член. Если да, то соответствующее уравнение можно упростить. Нетрудно видеть, что при таком упрощении происходит уменьшение старшего члена упрощаемого уравнения. Таким образом, мы придем в конце концов к системе уравнений, старшие члены которых уже не делятся взаимно друг на друга. Может быть, в этом случае система уравнений не может быть далее упрощена? Простые примеры показывают, что это не так. Например, для системы уравнений

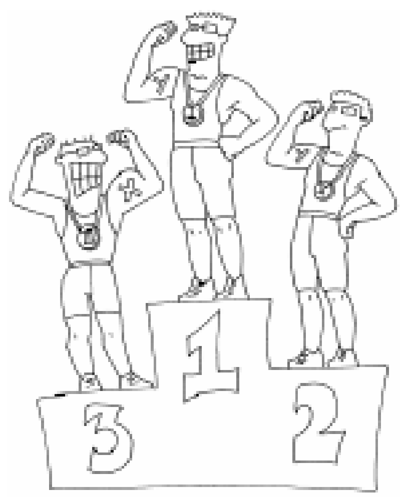
$$\begin{cases} y^5 + 5x^3y^3 + 2 = 0 \\ x^2y + 3x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

старшими членами являются мономы y^5 и x^2y, которые не делятся друг на друга, но в первом уравнении есть член $5x^3y^3$, который мы могли бы легко исключить, так как он, хоть и не является старшим членом своего уравнения, но делится на старший член второго уравнения. Вычитая из первого уравнения второе, умноженное на xy^2, приводим систему к виду, которая уже не упрощается подобным образом.

Теперь введем новую терминологию.

Если у нас зафиксирован порядок мономов, то мы будем говорить, что полином P *редуцируется* при помощи набора полиномов $Q_1, ..., Q_n$, если старший член полинома P делится на один из старших членов полиномов Q_i. Упрощение полиномов с помощью описанной процедуры уничтожения старшего члена мы будем называть *редукцией*. Если в результате редукции полинома P относительно системы полиномов $Q_1, ..., Q_n$ получается полином P_1, то мы говорим, что полином P редуцируется к P_1 при помощи системы полиномов $Q_1, ..., Q_n$.

Легко понять, что, так как процесс понижения старших членов не может быть бесконечным, в результате процесса редук-



...переменную y мы будем считать более старшей, чем переменную x.

ции мы сможем привести любую систему уравнений к такой, в которой старшие члены попарно не делятся друг на друга. Весь этот процесс можно считать обобщением алгоритма Евклида деления полиномов от одной переменной. Только делим мы теперь полином P не на один полином, а сразу на набор полиномов Q_1, ..., Q_n.

Процесс деления-редукции можно даже записывать точно так же – «уголком». Справа мы записываем полиномы-делители через запятую. Каждое вычитание в этой схеме будет соответствовать одной редукции. Правда, у нас появилась некоторая свобода – ведь мы разрешаем редуцировать полином с помощью любого из старших членов полиномов Q_i. Мы можем оказаться перед возможностью выбора в том случае, если для редукции будет подходить старший член не одного полинома Q_i, а сразу нескольких. В этом случае мы оставляем себе свободу производить любую из возможных редукций. Правда, результат таких редукций может зависеть от выбираемых для них старших членов. Единственное, что нам гарантировано, это то, что в результате мы получаем полином, уже не редуцируемый с помощью полиномов Q_1, ..., Q_n. По аналогии со случаем одной переменной результат естественно было бы назвать остатком от деления полинома P на набор полиномов Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n.

Теперь попробуем исследовать вопрос: а почему результат, то есть такой остаток, может быть не однозначен?

ЧТО ТАКОЕ ИДЕАЛ. КАК СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СВЯЗАНЫ С ИДЕАЛАМИ

В предыдущем пункте нам удалось произвольную систему уравнений вида

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ P_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ P_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

привести к такой, в которой никакие редукции старших членов невозможны. Может быть, это и есть простейший вид для произвольной системы? К великому сожалению, опять дело обстоит несколько сложнее.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y - xy + 1 = 0 \\ x^3 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}.$$

Мы легко можем увидеть, что в этом примере невозможно провести ни одной редукции.

Здесь набором старших членов является набор x^2y и x^3, и мы видим, что ни один из них не делится на другой. Упрощения простыми редукциями невозможны. Однако это не означает, что нельзя в принципе, сделав какие-то другие преобразования, упростить эту систему. Действительно, умножив первое уравнение на x, а второе на y и вычитая их друг из друга, мы получим в качестве левой части полином $-x^2y + x + y^3 - y$.

Это уравнение уже может быть редуцировано с помощью первого.

Применив к нему наш алгоритм редукции, мы получим в качестве результата уравнение $x + y^3 - y - xy + 1$, которое также может быть легко выведено из исходной системы уравнений. Причем старший член его y^3 делится на старший член второго уравнения y^2, и мы снова можем редуцировать получившееся уравнение.

Продолжая этот процесс, мы, в конце концов, получим полином $x^5 + x^2 + y - x^4 - x$.

Его старший член равен y и не может быть далее редуцирован.

В чем же здесь дело? Мы имели первоначально систему, не поддающуюся упрощению с помощью взаимных редукций уравнений, но нашлось уравнение $-x^2y + x + y^3 - y$, которое может быть выведено из исходной системы и которое все же может быть упрощено с помощью исходных уравнений до уравнения $x^5 + x^2 + y - x^4 - x = 0$.

Здесь мы приходим к необходимости рассматривать вместе с некоторой исходной системой уравнений

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ P_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ P_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

все возможные уравнения, которые могли бы быть из нее выведены. Так, любое уравнение $P(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ можно умножить на произвольный полином $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ и получить уравнение $Q \cdot P = 0$ в качестве следствия. Аналогично, складывая любые два уравнения, мы получаем уравнение, которое является следствием уравнений, которые мы складываем. Рассмотрим теперь все возможные уравнения, которые могут быть выведены из некоторой системы уравнений вида (1).

Если мы обозначим через J множество всех возможных полиномов P, порожденных системой уравнений (1), то легко видеть что множество J вместе с каждыми двумя полиномами P_1 и P_2 содержит также и их сумму, а вместе с каждым полиномом P содержит все кратные ему полиномы PQ.

Такие множества называются полиномиальными идеалами. Таким образом, каждая система уравнений порождает некоторый полиномиальный идеал. Сам полиномиальный идеал можно также считать системой уравнений, но только количество уравнений в такой системе бесконечно. Оказывается, с такими системами нетрудно научиться работать, и все они эквивалентны самым обычным конечным системам уравнений. Правда, этот факт составляет содержание довольно глубокой теоремы Гильберта.

Теперь мы уже вплотную подошли к основной идее полиномиального упрощения, которая лежит в основе теории базисов Грёбнера.

ПРИВЕДЕНИЕ К ПРОСТЕЙШЕЙ ИЛИ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим опять произвольную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ P_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ P_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}.$$

Вместе с ней мы будем рассматривать также весь идеал J полиномов, которые порождены полиномами $P_1, P_2, ..., P_m$.

Пусть нам каким-то образом удалось привести исходную систему уравнений к виду

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ g_r(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases},$$

который мы хотели бы считать наиболее простым. Все, что мы потребуем от такого вида уравнений – это то, чтобы любое уравнение, выводимое из исходной системы, то есть любой полином P, принадлежащий идеалу J, мог бы быть упрощен с помощью редукций относительно множества полиномов $g_1, g_2, ..., g_r$.

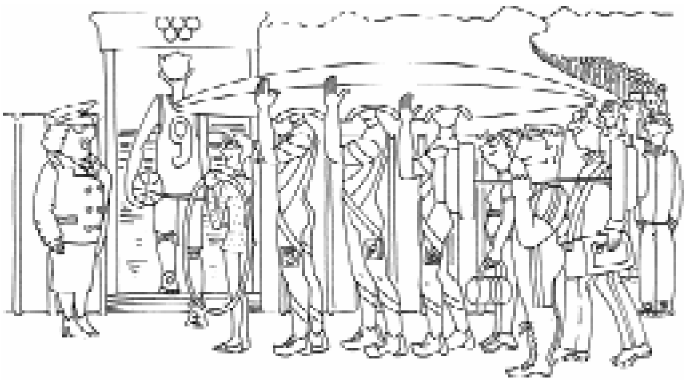
Определение. Множество полиномов g_i является *базисом Грёбнера* для полиномиального идеала J, если старший член любого из полиномов идеала J делится на один из старших членов полиномов g_i.

Наше определение абсолютно неконструктивно. Мы никогда не сможем проверить это условие для бесконечного множества полиномов из J. Тем не менее почти сразу же удается доказать совершенно удивительные свойства таких базисов. Они вполне достойным образом представляют произвольные системы уравнений, в чем мы сейчас и убедимся.

СВОЙСТВА БАЗИСОВ ГРЁБНЕРА

Допустим, что у нас есть набор полиномов g_i, который является базисом Грёб-

...множество всех возможных полиномов P, порожденных системой...



Мы никогда не сможем проверить это условие для бесконечного множества полиномов...

нера полиномиального идеала J. Покажем, что теперь мы легко можем про любой полином P узнать, принадлежит он идеалу J или нет. На языке уравнений это означает решить задачу, является ли какое-то уравнение следствием заданной системы уравнений. Такая задача называется проблемой принадлежности к идеалу.

У нас есть алгоритм деления произвольного полинома на набор полиномов, который сводится к последовательным редукциям.

Применим этот алгоритм к полиному P и набору полиномов g_i.

В результате мы получим какой-то полином R, который уже относительно g_i не редуцируется. Заметим также, что R может оказаться и равным нулю. Предположим, что P принадлежал идеалу J. В результате каждой отдельной редукции мы получали снова элемент идеала, так как вычитали полином, кратный g_i. Следовательно, в итоге мы должны были бы также получить элемент идеала. Но так как, по определению базиса Грёбнера, старший член любого полинома из идеала делится на один из старших членов полиномов g_i, то полином R не может быть не редуцируемым. Следовательно, он должен быть равен нулю. Мы получили следующее утверждение:

Теорема. Полином P тогда и только тогда принадлежит идеалу J, если остаток от деления P на множество полиномов из базиса Грёбнера идеала J равен нулю.

Заметим, что хотя определение базиса и было неконструктивным, этот алгоритм вполне конструктивен, если нам точно известно, что полиномы g_i образуют базис Грёбнера идеала J.

Алгоритм деления полинома на набор полиномов немногим сложнее обычного алгоритма Евклида.

Другим удивительным свойством множества полиномов, образующих базис Грёбнера, является то, что остаток от деления любого полинома на набор полиномов базиса определен однозначно, хотя редукции в процессе деления мы можем производить в любом порядке.

Действительно, допустим, что некоторый полином P редуцируется двумя различными способами к полиномам R_1 и R_2. Так как в процессе редукций из полинома P вычитаются только полиномы, кратные полиномам g_i, то $P - R_1 = \sum_{i=1}^{r} f_i \cdot g_i$ и $P - R_2 = \sum_{i=1}^{r} h_i \cdot g_i$.

Следовательно, разность $R_1 - R_2$ принадлежит идеалу J, но старший член этой разности – моном, присутствующий либо в R_1, либо в R_2. Если он может быть редуцирован с помощью набора $g_1, g_2, ..., g_r$, то один из полиномов R_1 или R_2 не может быть не редуцируемым. Следовательно, $R_1 - R_2 = 0$.

Заметим теперь, что мы вовсе не требовали того, чтобы сама система $g_1, g_2, ..., g_r$ не могла быть упрощена.

Такое более сильное требование приводит к понятию редуцированного базиса Грёбнера.

Определение. Базис Грёбнера g_i идеала J называется *редуцированным*, если все их старшие члены попарно не делят друг друга.

Определение. Базис Грёбнера g_i идеала J называется *вполне редуцированным*, если каждый моном полинома g_i не делится ни на один из старших членов базиса.

Оказывается, что для любого полиномиального идеала существует единственный вполне редуцированный базис Грёбнера. То есть каждая система уравнений, даже бесконечная, может быть приведена к единственному каноническому виду.

Оговоримся здесь, что такая единственность появляется лишь после того, как мы зафиксировали упорядочение мономов. Даже ограничившись лексикографическими порядками, мы могли бы изменить старшинство переменных, например, считая переменную x старшей по отношению к y. Кроме этого, мы могли бы рассматривать и другие порядки, например, сравнивая сначала не степень старшей переменной, а суммарную степень. При этом базис Грёбнера, вообще говоря, может измениться.

Можно ответить и на множество других вопросов...

Базис Грёбнера для системы уравнений позволяет ответить на большинство вопросов, которые возникают при исследовании систем уравнений. Например, для того чтобы определить, будет ли система уравнений совместна (а это эквивалентно наличию комплексных решений), достаточно вычислить любой базис Грёбнера и проверить, не содержит ли он ненулевую константу. Если в базисе Грёбнера есть константа 1, то вся система эквивалентна уравнению $1 = 0$, то есть несовместна. Можно ответить и на множество других вопросов, например, в случае конечного количества комплексных решений определить точное их количество. В случае, если система допускает бесконечное число решений, можно определить, лежат ли решения на кривых, поверхностях, или же образуют множества более высокой размерности. Можно также эффективно исключать переменные из уравнений. Например, из приведенной выше системы уравнений

$$\begin{cases} x^2y - xy + 1 = 0 \\ x^3 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

можно вывести, что

$$x^7 + x^4 - 2x^6 - 2x^3 + x^5 + x^2 - 1 = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение скажем, что базисы Грёбнера можно эффективно строить по системам уравнений. Вы легко можете преобразовать любую систему уравнений к виду базиса Грёбнера, если у вас есть под рукой одна из систем компьютерной алгебры, например MAPLE или MATHEMATICA.

Соответствующий алгоритм и само название «базисы Грёбнера» были придуманы австрийским математиком Б. Бухбергером (и названы им в честь его учителя). Он же разработал и довольно простые условия, которые позволяют проверять за конечное число шагов, является ли некоторое множество полиномов базисом Грёбнера. Такие условия носят название критериев Бухбергера. Об этих условиях и алгоритме Бухбергера мы расскажем в следующий раз.

ЗАДАЧИ

Задача 1

Уровень 1. Докажите, что левая часть получившегося уравнения есть наибольший общий делитель всех полиномов из левых частей системы (1).

Задача 2

Уровень 1. Найдите остаток от деления полинома $f(x, y, z) = xy^2z^3$ на набор полиномов $\{x - y^2, y - z^2, z - x^2\}$.

Измените теперь порядок, в котором записаны делители, и повторите вычисления снова.

Указание. В процессе деления всегда используйте первый из делителей, подходящий для редукции.

Задача 3.

Уровень 3. Пусть вам известно, что из системы уравнений

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ P_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ P_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

можно каким-то образом исключить все переменные, кроме x_1, то есть вывести уравнение вида $Q(x_1) = 0$.

Докажите, что такое уравнение обязательно присутствует в базисе Грёбнера, соответствующем такому лексикографическому упорядочению мономов, в котором x_1 самая младшая переменная.

Задача 4.

Уровень 2. Попробуйте исключить переменную y из системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^4 + xy - y^4 = 0 \end{cases}.$$

Задача 5.

С упорядочениями мономов связана функция на множестве полиномов, которая дает нам по каждому полиному его старший моном. Обозначим старший моном полинома P как $lterm(P)$.

Например, старшим членом полинома $x^2y - z^3$ относительно лексикографического упорядочения $lex(x, y, z)$ является z^3.

Уровень 1. Докажите, что операция lterm удовлетворяет следующим свойствам:

$$lterm(f+g) \le max(lterm(f), lterm(g)),$$
$$lterm(fg) = lterm(f)lterm(g).$$

Задача 6.

Мы упорядочивали мономы пока только лексикографически. Для любого лексикографического упорядочения можно легко доказать, что

$$m_1 \mid m_2 \Rightarrow m_1 \le m_2, \qquad (1)$$
$$m_1 \le m_2 \Rightarrow \forall m\ (mm_1 \le mm_2). \qquad (2)$$

Такие «правильные» порядки, удовлетворяющие сформулированным выше условиям (1) и (2), называют допустимыми. Каждое допустимое упорядочение мономов подходит для построения базиса Грёбнера. Очень интересен вопрос об описании множества всех допустимых упорядочений.

Уровень 3. Представим себе, что у нас имеется всего две переменных x и y и мы рассматриваем не все мономы, а только такие, для которых сумма степеней при переменных не превосходит 9.

$$T = \{m = x^i y^j \mid i + j < 10\}.$$

Сколькими способами можно правильно упорядочить множество T?

Эта задача тесно связана с другой комбинаторной задачей.

Задача 7.

Представьте себе, что у вас есть картонная коробка, дно которой расчерчено на квадраты. Также у вас есть пронумерованные плашки в виде квадратиков такого же размера. Мы ставим коробку вертикально и поворачиваем на угол 45 градусов (рисунок 1).

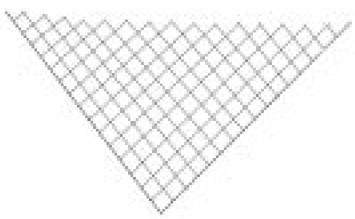


Рисунок 1.

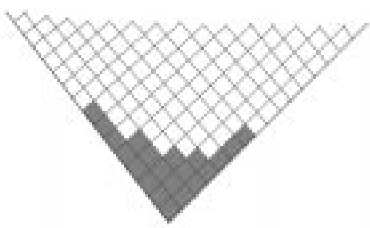


Рисунок 2.

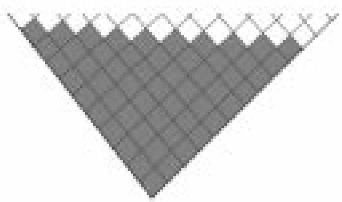


Рисунок 3.

Теперь вам разрешается по очереди класть плашки на дно коробки таким образом, чтобы они не могли быть сдвинуты вниз по линиям сетки. Очевидно, что первый квадратик ставится в угол, второй в одну из двух соседних клеток.

Через несколько шагов вы получите фигуру приблизительно такого вида, как на рисунке 2.

Уровень 2. Сколькими разными способами вы через 55 шагов сможете получить следующую фигуру (рисунок 3)?

Указание. Наиболее естественным путем решения этой задачи является написание программы, перечисляющей все возможные способы укладывания.

Уровень 3. Доказать, что таких способов заполнения ровно столько, сколько существует упорядочений множества T, удовлетворяющих только условию (1).

Замечание. Если вы решите эту задачу, то для получения ответа задачи 6 надо только отбросить упорядочения, не удовлетворяющие условию (2).

Фигуры такого вида называются в математике диаграммами Юнга и связаны со многими другими математическими объектами.

Задача 8.

Уровень 3. Если у вас есть на компьютере какая-нибудь система компьютерной алгебры, например MAPLE или MATHEMATICA, то возьмите произвольную систему уравнений и попробуйте построить базис Грёбнера. Внимательно посмотрите на ответ и проанализируйте, чем полученная система проще исходной.

Поэкспериментируйте затем с изменением порядка мономов.

Васильев Николай Николаевич,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова.