Кондратьев Александр Сергеевич,
Ляпцев Александр Викторович

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКИ. КАК ОПТИМАЛЬНО ОБОГРЕТЬ ДАЧУ

Вопросам моделирования реальных процессов при изучении курса физики как в школе, так и в вузе посвящено большое количество работ (см., например [1]). В последние годы активно развивается моделирование с привлечением компьютерных средств обучения. В статье [2] говорилось о том, что в связи с доступностью достаточно мощных компьютеров и распространенностью вычислительных сред, включающих в себя стандартные вычислительные процедуры, возможность компьютерного моделирования реальных физических процессов в учебном процессе многократно возрастает. Это, в свою очередь, требует постановки учебных задач, отвечающих новым требованиям, о которых уже упоминалось в статье [2]. Во-первых, желательно, чтобы поставленная задача демонстрировала возможности численного метода решения, то есть ее решение без использования компьютера было бы невозможно или весьма затруднено. Во-вторых, решение задачи должно приводить не только к количественному результату, но и к некоторому качественному выводу. Наконец, желательно, чтобы задача выглядела как практически полезная, что, несомненно, может мотивировать учащихся к ее решению. Отметим еще одно важное, на наш взгляд, качество – поставленная задача должна давать простор для дальнейшего развития, чем мог бы воспользоваться как учащийся, так и преподаватель. Пример одной из задач, которая, на наш взгляд, удовлетворяет этим требованиям, мы приводим в данной статье.

Цель задачи – исследовать зависимость изменения температуры внутри помещения (например, дачного домика) в зависимости от суточных колебаний температуры и использования отопительных приборов и попытаться предложить разумную и достаточно оптимальную систему отопления.

Процесс теплопередачи – это инерционное явление, требующее определенного времени для своего осуществления. Оно приводит к сдвигу фаз между осцилляциями температур внутри и вне помещения и меньшему амплитудному значению осцил-

Как оптимально обогреть дачу.

...в отсутствие отопления всем процессом управляют колебания наружного воздуха.

ляций температуры внутреннего воздуха. Действительно, в отсутствие отопления всем процессом управляют колебания наружного воздуха. Пусть в какой-то момент времени его температура выше температуры внутреннего воздуха. При этом внутренний воздух будет нагреваться. И так будет происходить все время, пока температура наружного воздуха выше, в том числе и тогда, когда он уже начнет охлаждаться. Таким образом, существует промежуток времени, когда наружный воздух охлаждается, а внутренний – нагревается. Далее, внутренний воздух перестает нагреваться, когда его температура сравнивается с температурой охлаждающего наружного воздуха. Поэтому он не достигает тех температур, которые имел до этого охлаждающий наружный воздух, а значит, и амплитуда колебаний его температуры будет меньше.

За основу модели можно взять дифференциальное уравнение:

$$\dot{U} = W_{in}(t) - W_{ex}(t),$$

где U – внутренняя энергия помещения, пропорциональная температуре, W_{in} – тепловая мощность некоторого обогревателя, находящегося в помещении, W_{ex} – тепловая мощность, уходящая из помещения наружу, когда температура внутри помещения выше, чем температура снаружи, или приходящая извне при обратном соотношении температур. Изменение внутренней энергии можно выразить через изменение температуры и теплоемкость помещения: $\dot{U} = C\dot{T}$. Уход тепла из помещения обусловлен, вообще говоря, различными процессами, одним из которых является теплопроводность. Будем считать, что именно она дает наиболее существенный вклад, тогда:

$$W_{ex} = \Lambda(T(t) - T_{ex}(t)),$$

где L – коэффициент, связанный с теплопроводностью стен, окон и т.д., T и T_{ex} – температура внутри и вне помещения. В результате исходное дифференциальное уравнение приводится к виду:

$$\dot{T} = -k(T(t) - T_{ex}(t)) + W_{in}(t)/C \quad (1),$$

где $k = L/C$ – коэффициент температуропроводности.

Если нас интересует исследование колебаний температуры на протяжении нескольких дней, то T_{ex} можно считать периодической, а в простейшей модели гармонической функцией времени с периодом 24 часа. Будем, для определенности считать, что максимума температура достигает в 4 часа дня, а минимума – в 4 часа ночи, тогда:

$$T_{ex}(t) = T_m + T_a\cos(\omega t + \varphi),$$

где $\omega = \pi/12$ час$^{-1}$ $\approx 7.3\cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, $\varphi = -4\pi/3$, T_m – средняя темпертура вне помещения, T_a – амплитуда колебаний внешней температуры.

Исследуем прежде всего решение, когда внутренний обогрев отсутствует или выключен в начальный момент времени, то есть решим уравнение:

$$\dot{T} = -k(T - T_m - T_a\cos(\omega t + \varphi)) \quad (2)$$

при некотором начальном условии $T(t_0) = T_0$. Решение этого уравнения может быть получено как аналитическими, так и численными методами. При использовании вычислительных сред (например, Matlab) численное решение даже проще, поскольку не требует знаний теории дифференциальных уравнений. Однако, как это обычно имеет место, аналитическое решение дает большую возможность для качественных выводов. Кроме того, в данном случае аналитическое решение во многом повторяет метод, используемый при расчете цепей переменного тока, и может быть полезно для закрепления этого метода.

Дифференциальное уравнение (2) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. В соответствии со стандартными методами его решение ищется в виде суммы общего решения $X(t)$ однородного уравнения:

$$\dot{X} + kX = 0$$

и некоторого частного решения $Y(t)$ неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $X(t) = A\exp(-kt)$, где константа A находится из начальных условий. Частное решение неоднородного уравнения также находится стандартными методами. Сдвигом функции убирается отличное от нуля среднее значение:

$$Y(t) = T_m + Z(t),$$

так что функция $Z(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\dot{Z} + kZ = kT_a \cos(\omega t + \varphi)\,. \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) проще всего искать, «выйдя» в комплексную плоскость, то есть решать уравнение:

$$\dot{V} + kV = kT_a \exp(i(\omega t + \varphi))\,. \qquad (4)$$

Далее, можно найти функцию $Z(t)$ как вещественную часть функции $V(t)$:

$$Z(t) = \mathrm{Re}(V(t)).$$

Решение уравнения (4) ищется в виде: $V(t) = V_0\exp(i\omega t)$. Подстановка этой функции в уравнение (4) дает комплексную амплитуду:

$$V_0 = \frac{kT_a \exp(i\varphi)}{i\omega + k} \qquad (5).$$

Функция $Z(t)$ имеет вид:

$$Z(t) = Z_0 \cos(\omega t + y),$$

где Z_0 – амплитуда колебаний температуры внутри помещения определяется как модуль комплексной амплитуды V_0, а фаза – y как фаза этой комплексной амплитуды.

Полученное аналитическое выражение удобно для качественного анализа. В предельном случае $k >> \omega$ время установления стационарного периодического решения, имеющее порядок k^{-1}, много меньше периода колебаний внешней температуры, а после установления – колебания температуры внутри помещения по амплитуде и фазе совпадают с колебаниями наружной температуры (по русской поговорке: «Наша горница с богом не спорница»). В другом предельном случае $k << \omega$ установление колебаний происходит в течение многих суток, а амплитуда колебаний внутри помещения мала по сравнению с амплитудой колебаний внешней температуры. Графики функций при значении $k = 0.2$ час$^{-1}$ (сравнимо с частотой ω), значениях $T_m = 10$ и $T_a = 20$ (в градусах Цельсия) и различных начальных условиях приведены на рисунке 1. Там же для сравнения приведен график колебаний внешней температуры.

...максимума температура достигает в 4 часа дня...

В учебных целях полезно проследить аналогию между различными физическими задачами – данной задачей и колебаниями в цепях переменного тока. Так же, как и в цепях переменного тока, существует время установления колебаний, после чего установившиеся колебания происходят с той же частотой, что и вынуждающее воздействие, но со сдвигом по фазе. Естественно (это видно из выражения (5)), что амплитуда

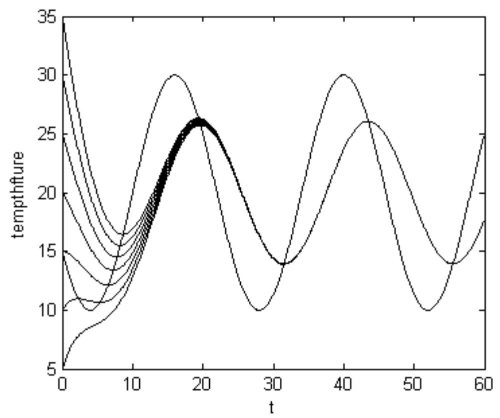

Рисунок 1.

колебаний внутри помещения меньше амплитуды колебаний наружной температуры.

Чему же равно реальное значение коэффициента температуропроводности? Можно попробовать сделать простейшие оценки. Если взять дачный домик с одинарными рамами, то достаточно очевидно, что основной поток тепла идет через стекла. Коэффициент L связан с площадью S и толщиной d стекол соотношением: $L = lS/d$, где l – коэффициент теплопроводности стекла. В самом грубом приближении теплоемкость комнаты может быть оценена как теплоемкость находящегося в ней газа: $C = \frac{5}{2}\frac{\upsilon}{\upsilon_m}R$, где R – газовая постоянная, υ – объем помещения, υ_m – объем одного моля газа (приблизительно 20 л). Что же дают оценки? Коэффициент теплопроводности стекла в системе СИ около единицы. Допустим, что дачный домик имеет объем 50 м^3 с площадью окон 2 м^2. Толщина стекол – 4 мм. Несложный расчет дает значение $k = 0.7$ с$^{-1}$. Очевидно, что это значение существенно превосходит значение ω. При таком коэффициенте температура в комнате должна быть всегда равна наружной температуре (с точностью до погрешности измерений). В чем ошибка?

Конечно же, теплоемкость комнаты определяется не только находящимся в ней воздухом. Однако даже если принять во внимание теплоемкость стен, мебели и т. д. и увеличить значение C на два порядка, значение k все равно будет существенно больше значения ω. По-видимому, основную задержку теплу дает не стекло, а слой

...минимума — в 4 часа ночи...

воздуха вблизи стекла. Действительно, из опыта известно, что температура внутренней поверхности стекла существенно отличается от средней температуры воздуха в помещении. Зимой, например, внутренняя поверхность стекла может покрываться льдом, в то время как внутри помещения сохраняется температура, приемлемая для жизни.

Оценить теплозащитные свойства слоя воздуха значительно сложнее, поскольку необходимо принимать во внимание не только теплопроводность, но и конвекцию. Проще воспользоваться сравнением расчета с опытными данными. Опыт показывает, что в подобных помещениях установление температуры происходит в течение нескольких часов, то есть значение k сравнимо со значением ω.

Вернемся теперь к уравнению (1) и рассмотрим, как влияет действие обогревательных приборов на температуру внутри помещения. Достаточно очевидно, что это влияние зависит от вида функции $W_{in}(t)$. В простейшем случае можно включить обогреватель на постоянную мощность, что соответствует постоянному значению мощности W_0. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\dot{T} = -k(T - T_m - T_a\cos(\omega t + \varphi) - \frac{W_0}{kC}).$$

Анализируя это уравнение, несложно понять, что влияние обогревателя при постоянной мощности эквивалентно эффективному увеличению среднего значения наружной температуры T_m на величину $W_0/(kC)$. То есть амплитуда и фаза колебаний температуры в помещении в установившемся режиме будет та же, что и без обогревателя, однако среднее значение температуры увеличится. Нельзя ли, однако, более эффективно обогревать комнату?

Здесь нужно определиться, что значит «более эффективно»? Очевидно, это означает меньшие затраты электроэнергии, но какой ценой по отношению к нашему самочувствию? Один из возможных вариантов – установить минимальную температуру, ниже которой температура в помещении не должна опускаться. При постоянной мощности обогревателя $W_{in}(t) = W_0$ такое минимальное значение температуры равно:

$$T_{\min} = T_m + \frac{W_0}{kC} - \frac{kT_a}{\sqrt{\omega^2 + k^2}}.$$

Оказывается, что найти наиболее эффективную функцию $W_{in}(t)$ при таком критерии эффективности не так сложно. Покажем, что эта функция имеет вид:

$$W_{in}(t) = kC(T_{\min} - T_m + T_a \cos(\omega t + \varphi)). \quad (6)$$

Действительно, при подстановке этого выражения в уравнение (1) получим уравнение: $\dot{T} = -k(T - T_{\min})$. Имеется единственное стационарное (периодическое с периодом $t = 2\pi/\omega$) решение этого уравнения: $T = T_{min}$. Легко проверить, что при таком выборе функции $W_{in}(t)$ мы выигрываем в энергии по сравнению с обогревом при постоянной мощности. Действительно, работа электрического поля за период (потребление электроэнергии за сутки) во втором случае равно:

$$A_2 = \int_t^{t+\tau} W_{in}(t')dt' = kC\tau(T_{\min} - T_m).$$

В случае же обогрева с постоянной мощностью мы получаем:

$$A_1 = kC\tau(T_{\min} - T_m + \frac{kT_a}{\sqrt{\omega^2 + k^2}}).$$

Очевидно, что при любых параметрах $A_1 > A_2$.

Можно доказать, что функция вида (6) является наиболее эффективной. Действительно, при любой другой функции времени существует временной интервал, при котором разность наружной и внутренней температур больше, чем для функции (6). Это означает, что на этом интервале наружу уходит больше энергии. В то же время временных интервалов, на которых наружу уходит меньше тепла, не существует. Следовательно, в целом за период наружу будет уходить больше энергии. Но эта энергия может быть взята только от обогревателя, который будет потреблять соответственно больше энергии от сети.

Сконструировать обогреватель, мощность которого изменялась бы по гармоническому закону, в настоящее время возможно, но довольно сложно. Следует учесть, к тому же, что реальное изменение наружной

...как влияет действие обогревательных приборов на температуру внутри помещения...

температуры, конечно же, не следует гармоническому закону. Может быть, можно придумать что-нибудь попроще?

Заметим, что при выборе функции $W_{in}(t)$ в виде (6) обогреватель работает в противофазе с изменениями наружной температуры, то есть наибольшая мощность достигается при наименьшей наружной температуре. Из этих соображений возникает идея постановки задачи: включать обогреватель на постоянную мощность на определенном временном интервале (при низкой наружной температуре). При этом можно задать большую рабочую мощность, чем при непрерывном режиме работы, но за счет короткого времени работы в конечном итоге сэкономить на электроэнергии.

При такой постановке функция $W_{in}(t)$ является периодической ступенчатой функцией. Уравнение (1) может быть решено аналитически и при таком виде функции $W_{in}(t)$. Однако, поскольку полученная в результате решения этого уравнения функция $T(t)$ является трансцендентной, исследование ее на экстремальность, то есть на оптимальность обогрева, может быть выполнено только численными методами. В силу этого целесообразно сразу же решать исходное уравнение численными методами. Функцию $W_{in}(t)$ при моделировании можно задавать тремя параметрами: dt – временной интервал работы обогревателя в течение суток, t_0 – время включения обогревателя (dt, t_0 $O[0, 24]$), а также мощность во время работы W_{max}. Эту мощность удобно выражать в градусах, используя соотноше-

...наибольшая мощность достигается при наименьшей наружной температуре.

ние W_{max}(град.) = W_{max}(Вт)/(kC). Вместо задания величины W_{max} можно задать некоторый коэффициент эффективности, который определить как отношение потребления энергии при постоянном включении к потреблению энергии при включении на интервал времени dt.

В среде Matlab для визуализации результатов удобно использовать графический интерфейс пользователя (GUI), работа над которым вполне под силу учащимся старших классов школы. Возможный вариант окна, соответствующего описываемой программе, приведен на рисунке 2.

На этом рисунке приведены результаты численного эксперимента при обогреве помещения постоянно включенным обогревателем (dt = 24). Заданные параметры таковы, что наружная температура колеблется в интервале от 10 до 20 градусов Цельсия (нижняя синусоида на графике). Заданная минимальная температура в помещении 18° С. Заданный коэффициент температуропроводности равен 0.2 час$^{-1}$. Значение W_{max}, равное в данном случае значению W_0, вычисляется, на графике ему соответствует прямая линия.

Изменяя параметры dt, t_0 и коэффициент эффективности (в окне обозначен через *koef*), можно попытаться подобрать более экономичный режим обогрева. Для данных параметров этому режиму соответствует численный эксперимент, приведенный на рисунке 3. Синусоида, как и на рисунке 2, соответствует колебаниям наружной температуры. Кривая с изломами соответствует температуре помещения. Как видно, размах ее изменения значительно меньше, чем при режиме обогрева с постоянно включенным обогревателем. Численный эксперимент показывает, что для наиболее эффективной работы обогреватель следует включать в 10 часов вечера и выключать в 10 часов утра. Ломаная линия на графике соответствует функции $W_{in}(t)$ в градусах.

Несмотря на то, что значение W_{max} в этом случае превосходит соответствующее значение, приведенное на рисунке 2, потребление электроэнергии составляет лишь 60% от потребления при постоянной работе обогревателя (*koef* = 0.6). Заметим, что «круглые числа» для значений dt, t_0 и *koef* получаются лишь для заданных значений, приведенных в нижнем ряду окна. При других параметрах получаются другие значения, характеризующие наиболее экономичный режим работы. Однако общая идея – включать обогреватель ночью и выключать днем – остается справедливой.

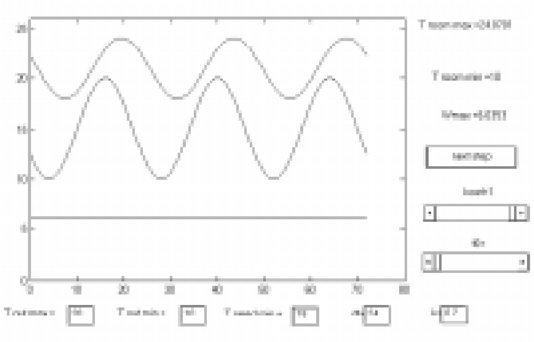

Рисунок 2.

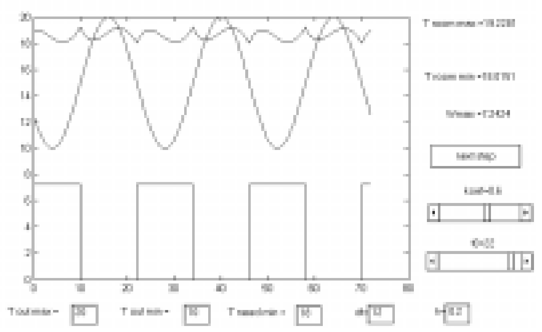

Рисунок 3.

В заключение вернемся к приведенному в начале статьи утверждению, что хорошая задача по моделированию должна давать простор для развития. В данном случае это безусловно выполняется. Во-первых, можно попробовать учесть влияние конвекции и неоднородности прогрева воздуха внутри помещения (слой воздуха у окна имеет более низкую температуру). Во-вторых, можно учесть, что многие дачные домики обогреваются не электронагревателями, а дровами. При этом печка за короткое время накапливает энергию, постепенно затем отдавая ее воздуху. Конечно же, эмпирические знания о том, как правильно топить печки, у россиян есть, однако задача численного моделирования данного процесса может оказаться интересной, а возможно (чем черт не шутит), и заставит взглянуть на этот процесс по-другому.

...многие дачные домики обогреваются не электронагревателями, а дровами.

Литература

1. *Бордовский Г.А., Кондратьев А.С., Чоудери А.Д.* Физические основы математического моделирования. М.: «Академия», 2005.

2. *Кондратев А.С., Ляпцев А.В.* Компьютерное моделирование при изучении физики. Вынужденные колебания нелинейного осциллятора // Компьютерные инструменты в образовании, № 2, 2005. С. 66–71.

Кондратьев Александр Сергеевич, академик РАО, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой методики обучения физике РГПУ им. А.И. Герцена,

Ляпцев Александр Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры методики обучения физике РГПУ им. А.И. Герцена.