

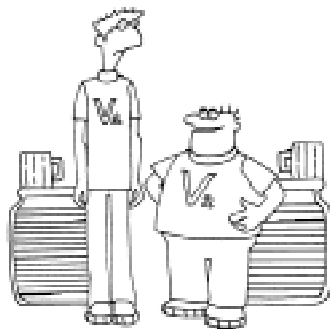
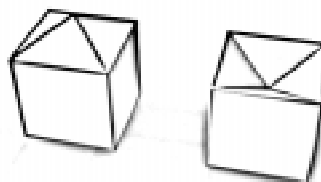
**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ФИЛЬМЫ О ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ  
И НЕРЕШЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ МАТЕМАТИКИ  
ФИЛЬМ ТРЕТИЙ.  
УДИВИТЕЛЬНЫЕ ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ**

*Кадр 1–2. Заголовок.*

**ВЫПУСК 3.  
УДИВИТЕЛЬНЫЕ ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ**

*Кадр 3. Постановка задачи.*

Можно ли из одинаковых граней сложить выпуклый и невыпуклый многогранники? Конечно можно, скажете Вы.



Пусть из одинаковых наборов граней Вам удалось сложить выпуклый и невыпуклый многогранник. У какого из них объем будет больше?

Ответ – «всегда у выпуклого» оказывается неверным.

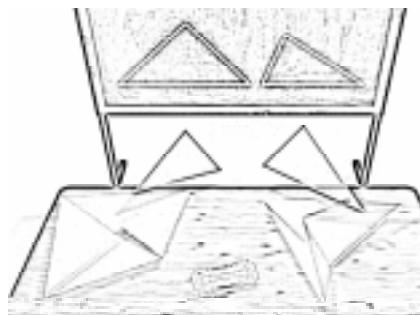
*Кадр 4.*

Оказывается можно так подобрать грани, что объем невыпуклого многогранника будет больше объема выпуклого, составленного из тех же граней.

В фильме рассмотрены примеры многогранников, построенных С.Н. Михалевым в 2002 году, в то время аспирантом механико-математического факультета МГУ. Это лучший из известных примеров (с максимальным отношением объемов многогранников).

**Кадр 5.**

Рассмотрим два треугольника (точные длины сторон будут указаны в конце фильма), которые и будут гранями будущих многогранников. Как мы видим, каждый треугольник одновременно становится гранью и в одном и в другом многограннике. Тот многогранник, который строится слева, будет выпуклым, тот, что справа, – невыпуклым.



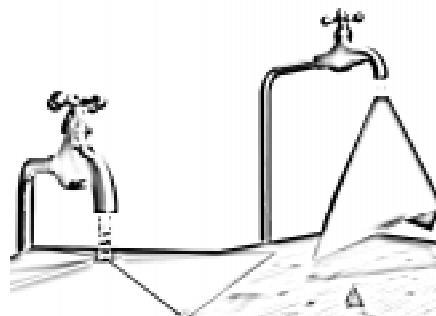
**Кадр 6–7.**

Посмотрим на эти многогранники. Оба они – октаэдры (хотя и неправильные), то есть имеют по 6 вершин и по 8 граней.



**Кадр 8.**

Что мы понимаем под объемом тела, в частности, многогранника? Например, это объем жидкости, которая может быть налита внутрь этого многогранника. Отрежем вершинки и нальем внутрь каждого многогранника воду.

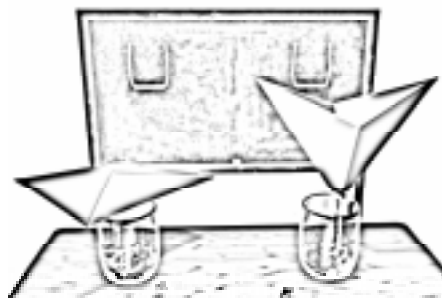


**Кадр 9.**

Видите, выпуклый многогранник уже наполнился, а невыпуклый еще нет.

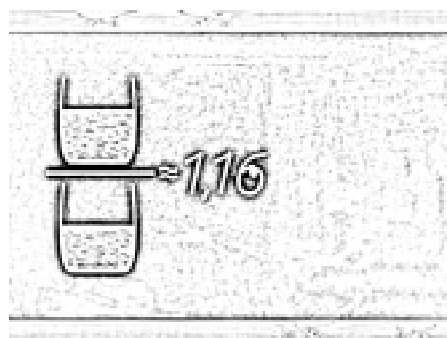
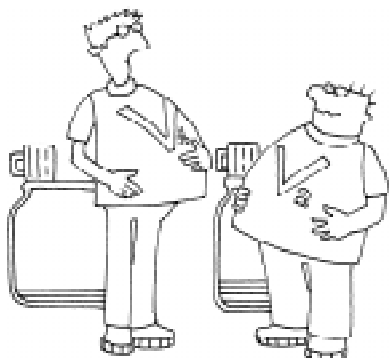
**Кадр 10.**

Но, возможно, вода лилась с разной скоростью... Чтобы правильно сравнить объемы, выльем жидкость из каждого многогранника в одинаковые стаканы. Уровень воды в правом стакане выше, чем в левом, значит объем невыпуклого многогранника действительно больше объема выпуклого.



**Кадр 11.**

Если посчитать аккуратно, то мы увидим, что отношение объема невыпуклого многогранника к объему выпуклого равно 1,163... Здесь действительно правильнее рассматривать отношение объемов, а не разницу, так как отношение не зависит от размеров изначальных треугольников использованных в качестве граней для построения многогранников.



**Кадр 12.**

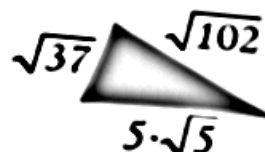
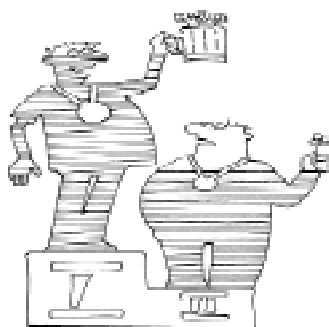
В рассмотренном примере объем построенного невыпуклого многогранника более чем на 16% больше объема выпуклого.

Для построения рассмотренных октаэдров можно использовать треугольники со сторонами:

$$\sqrt{102}, \sqrt{101}, \sqrt{221}$$

и

$$\sqrt{37}, \sqrt{102}, 5 \cdot \sqrt{5}.$$



**Кадр 13.**

При этом если центры октаэдров расположить в начале координат, то координаты вершин будут следующими

Координаты вершин:

$N(0, 0, 1)$	$S(0, 0, -1)$
$A(10, 1, 0)$	$C(-10, 1, 0)$
$B(0, 6, 0)$	$D(0, -10, 0)$
$N(0, 0, \sqrt{\frac{61}{3}})$	$S(0, 0, -\sqrt{\frac{61}{3}})$
$A(\sqrt{71}, 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$	$C(-\sqrt{71}, 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$
$B(0, -5 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$	$D(0, -11 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$



Вычислите объемы и их отношение!

**Кадр 14.**

Насколько большим может быть отношение объема невыпуклого многогранника к объему выпуклого, составленного из тех же граней?  
Этот вопрос ждет своего решения.

**Кадр 15. Литература**

Фильм основан на работе:

*С.Н. Михалев.* Изометрические реализации октаэдров Брикара 1-го и 2-го типов с известными значениями объема // *Фундаментальная математика.* 2002. Т. 8. № 3 С. 755–768.

**Кадр 16. Титры**

*Авторы фильма выражают благодарность:*

Николаю Петровичу Долблину, Игорю Федоровичу Шарыгину.

*Идея фильма:* Николай Андреев.

*Компьютерная графика:* Михаил Калининченко.

*Андреев Николай Николаевич,  
кандидат физ.-мат. наук,  
научный сотрудник  
Математического института  
им. В.А. Стеклова РАН,  
Калининченко Михаил Александрович,  
художник проекта.*



Наши авторы, 2005.  
Our authors, 2005.