Хайнц Шуман

ВВЕДЕНИЕ В ИЗУЧЕНИЕ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ CABRI 3D

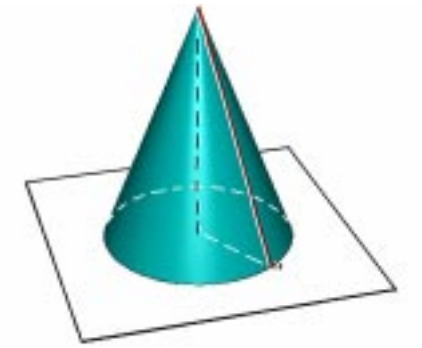

Рисунок 1. Круговой конус.

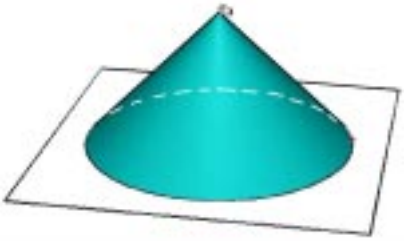

Рисунок 2. Варьируем конус.

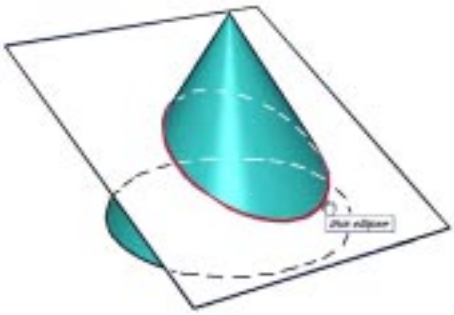

Рисунок 3. Эллиптическое сечение.

1. ВВЕДЕНИЕ

История преподавания этого раздела – кривых 2-го порядка, то есть конических сечений (коник) – имеет свои подъемы и спады (Schupp, 1988). Последний пример пренебрежения этим разделом – перенос центра тяжести математического обучения на другие темы, несмотря на то, что конические сечения – прекрасный пример взаимосвязи геометрии и алгебры. Другие аргументы в пользу коник – их применения в практических задачах (орбиты спутников и др.), применения в самой математике, богатство задач и т. д.

Новые программные среды, в частности, системы динамической геометрии, предлагают новые методы изучения коник. В то время как хорошо известная монография Schupp (1988) посвящена в основном методам программирования для визуализации коник, Schumann (1991) был первым, кто указал на интересные применения динамической геометрии при изучении коник. До сих пор при изучении этой темы ограничивались двумерным случаем, что противоречит самой природе сечений и даже их названию. Причина этого – в том, что до недавнего времени для трехмерного случая не было подходящих средств. Cabri 3D является первой эффективной системой трехмерной динамической геометрии.

2. КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Для адекватного представления коник как плоских сечений конуса небходимы адекватные программные средства. Cabri Géomètre 3D (Laborde, J. M.; Bainville, E., Cabri Géomètre 3D, 2004) – первая си-

стема трехмерной геометрии, которая даже в версии 1.0 удовлетворяет многим требованиям, предъявляемым к инструментам трехмерной динамической геометрии, подобным тем, которые реализованы в системах планиметрии.

Нижеследующие примеры дают только неполное представление о динамических возможностях Cabri 3D.

Построим конус с помощью Cabri 3D, используя окружность на плоскости и точку на нормали к плоскости (рисунок 1). Его форму можно менять, перемещая вершину (рисунок 2).

Теперь мы можем рассматривать конус с разных сторон с помощью так называемой виртуальной сферы, встроенной в Cabri 3D.

Далее построим плоскость, пересекающую конус, и кривую, которая получается в этом сечении. При этом Cabri 3D указывает, что кривая – эллипс (рисунок 3). Мы можем также посмотреть на это сечение снизу (рисунок 4).

Повернем теперь изображение так, чтобы плоскость выглядела как прямая линия. Становится видно, что угол между базовой и секущей плоскостями меньше, чем между базовой плоскостью и боковой поверхностью (рисунок 5).

Построив сечение, параллельное образующей конуса, получаем в сечении параболу (рисунки 6, 7).

Меняя положение секущей плоскости так, чтобы ее угол с основанием конуса был больше, чем угол с боковой поверхностью, получаем гиперболу. Вторая ветвь гиперболы расположена на конусе, симметричном исходному относительно вершины (рисунки 8, 9). Как и раньше, мы можем рассматривать изображение со всех сторон (рисунок 10).

Если сечение проходит через вершину, получаем пару прямых (рисунок 11) и т. д.

Рисунок 4.
Эллиптическое сечение, вид снизу.

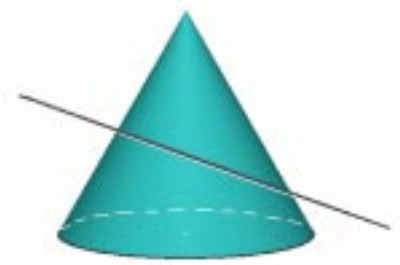

Рисунок 5.
Положение секущей плоскости при эллиптическом сечении.

Рисунок 6. Положение секущей плоскости при параболическом сечении.

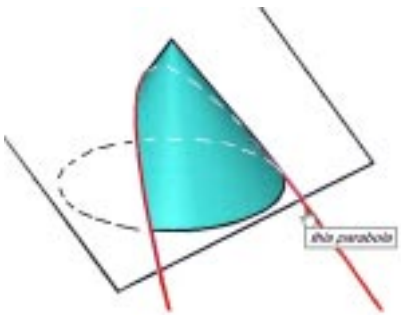

Рисунок 7.
Параболическое сечение.

Рисунок 8. Положение секущей плоскости при гиперболическом сечении.

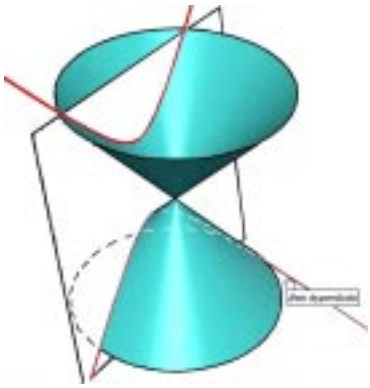

Рисунок 9.
Гиперболическое сечение.

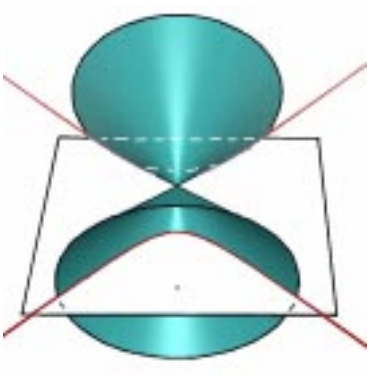

Рисунок 10.
Гиперболическое сечение, вид снизу.

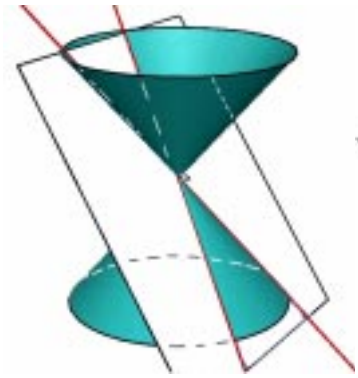

Рисунок 11.
Пограничный случай.

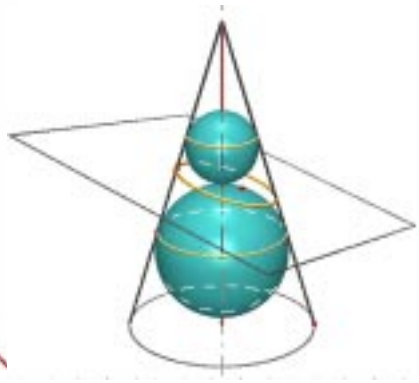

Рисунок 12.
Конус и вписанные сферы, касающиеся секущей плоскости.

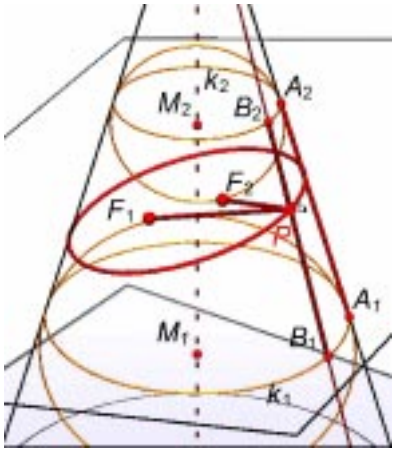

Рисунок 13.
Построение к доказательству.

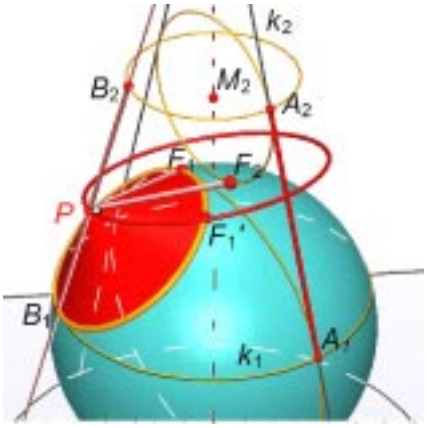

Рисунок 14. Касательный конус.

Теперь покажем, почему сечение на рисунке 13 является эллипсом, то есть почему сумма расстояний до двух данных точек одинакова для всех точек кривой. Для этого применим элегантный метод, впервые описанный Dandelin 1794 –1847 (см. Manual of School Mathematics, Vol. 4, p. 116/117).

Сначала впишем в конус две сферы, касающиеся секущей плоскости. Для наглядности покажем только контуры конуса (рисунок 12). Радиусы сфер получили, опустив перпендикуляры на образующие конуса. Радиусы, перпендикулярные секущей плоскости, проходят через точки касания (как будет доказано – фокусы эллипса). На сечении отмечена текущая точка P (рисунок 13).

Введем обозначения: F_1, F_2 – точки касания; k_1, k_2 – окружности, по которым сферы касаются конуса; B_1, B_2 – точки пересечении образующих, проходящих через P, с окружностями k_1, k_2; A_1, A_2 – концы образующих усеченного конуса, расположенного между k_1, k_2.

Отрезки B_1B_2 и A_1A_2 конгруэнтны относительно перемещения по боковой поверхности усеченного конуса.

Точки B_1, F_1 и, соответственно, B_2, F_2 – точки касания с вписанными сферами; вместе с P они образуют касательные сечения, расположенные на касательном конусе с вершиной в точке P (рисунок 14 для первой сферы; точка F_1' симметрична F_1 относительно плоскости, проходящей через P и ось конуса).

Следовательно, PB_1 и PF_1 имеют ту же длину, что и PB_2, PF_2.

Отсюда $PF_1 + PF_2 = PB_1 + PB_2 = A_1A_2 = \text{const}$.

Это и означает, что кривая в сечении является эллипсом. Заметим также, что образующие усеченно-

го конуса, заключенного между k_1, k_2, имеют ту же длину, что и большая ось эллипса.

Случай параболы или гиперболы рассматривается аналогично.

3. ДРУГАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ: КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ КАК ОБРАЗЫ ОКРУЖНОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

Программа Cabri 3D также удобна для трехмерного конструирования коник как образов окружностей в центральной проекции. Рисунок 15 показывает, как конус, построенный с помощью окружности, лежащей в объектной плоскости, и вершины Z, пересекает плоскость проекции по эллипсу. Если окружность касается плоскости, содержащей вершину конуса (на рисунке 15 она обозначена как *vanishing plane*), то сечение является параболой. Изображение можно рассматривать со всех сторон (рисунок 16, вид снизу, при прозрачной объектной плоскости). На рисунках 17 и 18 изображено гиперболическое сечение.

На рисунке 19 изображена конфигурация, полученная построением эллипса, для которого окружность является прообразом при центральной проекции (k: прообраз, k': образ; основание перпендикуляра, опущенного из Z на плоскость проекции – точка H, а плоскость, параллельная объектной плоскости и проходящая через Z, пересекается с плоскостью проекции на высоте h). Чтобы построить образ k' окружности k, опустим перпендикуляр из точки P, лежащей на окружности, на ось a, A – основание перпендикуляра, ... ; $ZHAV$ – прямоугольник по построению. Точка пересечения проектирующего луча ZP с прямой AH есть образ P' точки P.

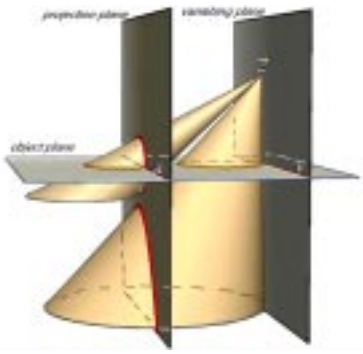

Рисунок 15. Эллипс и парабола как образы окружности в центральной проекции.

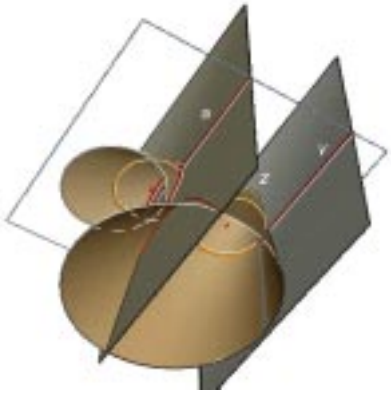

Рисунок 16. То же, вид снизу.

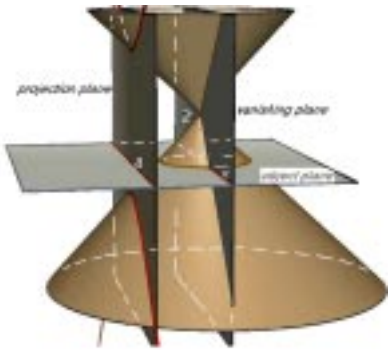

Рисунок 17. Гипербола как образ окружности в центральной проекции.

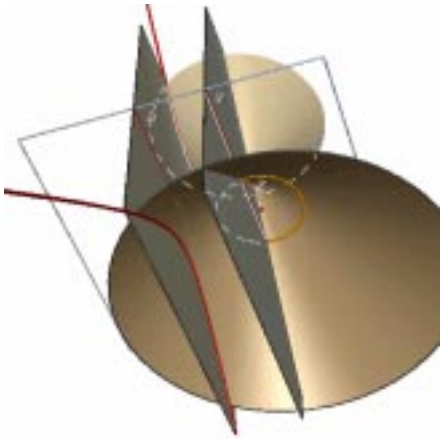

Рисунок 18. Вид снизу для рисунка 17.

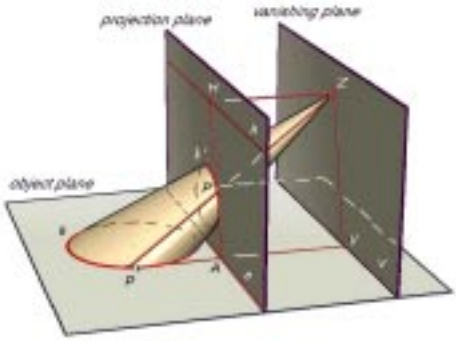

Рисунок 19. Элипс как образ окружности в центральной проекции

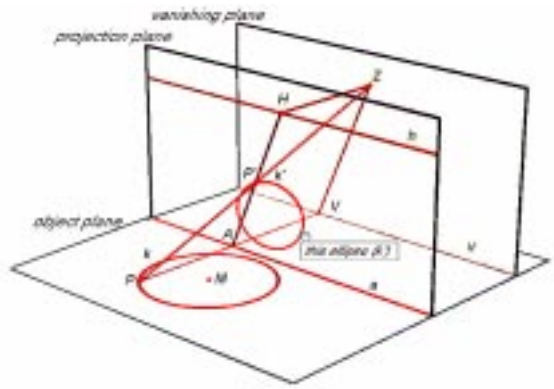

Рисунок 20. Рисунок 19 с прозрачной плоскостью проекции.

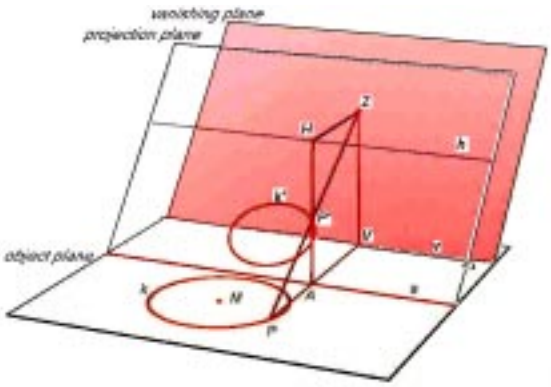

Рисунок 21. Конфигурация рисунка 20 в случае наклонной плоскости проекции.

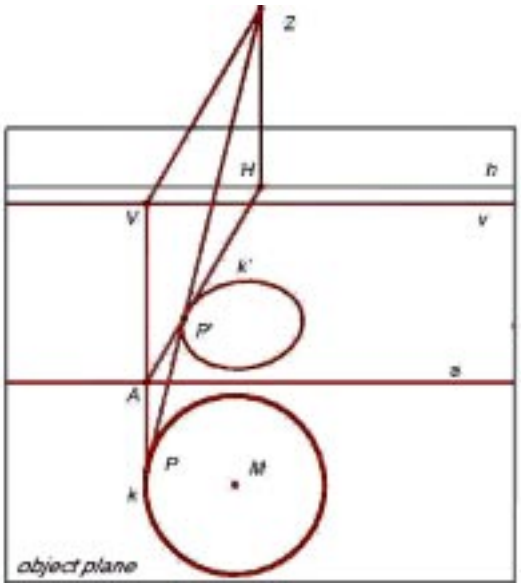

Рисунок 22. Осевая проекция на объектную плоскость.

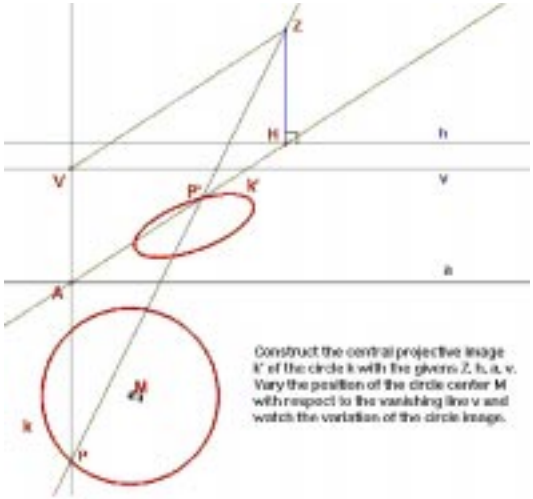

Рисунок 23. Построение эллипса как образа окружности при осевой проекции.

При движении точки P по окружности точка P' заполняет образ окружности. Проектирующий луч ZP является образующей конуса, порожденного окружностью k и точкой Z . Убрав плоскость проекции и конус, получаем сценарий построения (рисунок 20).

Совместив плоскость проекции с объектной плоскостью (рисунок 21), получим двумерный вариант построения образа окружности с помощью центральной проекции как частный случай осевой проекции (рисунок 22). Теперь применим Cabri II Plus к этой двумерной конструкции для построения коник на основе окружности. Рассмотрим три случая: окружность не пересекает и не касается прямой v (эллипс: рисунок 23), касается ее (парабола: рисунок 24), пересекает ее (гипербола: рисунок 25).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы можем подобным образом рассматривать коники с помощью Cabri 3D, используя различные физические явления, в которых естественным образом возникают коники.

Например, можно представлять коники как пересечения светового конуса с плоскостью. Эти кривые, полученные с помощью пучка света, исходящего из точечного источника Z (рисунок 26) можно интерпретировать как образы окружности k при центральном проектировании. Плоскость ок-

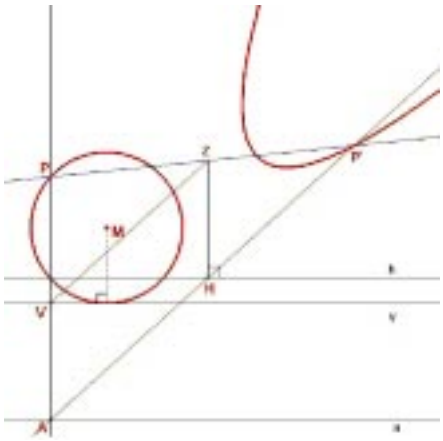

Рисунок 24. Построение параболы как образа окружности при осевой проекции.

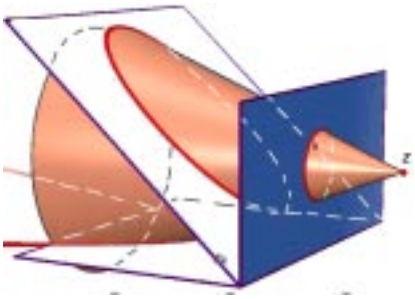

Рисунок 26. Пересечение светового конуса с плоскостью.

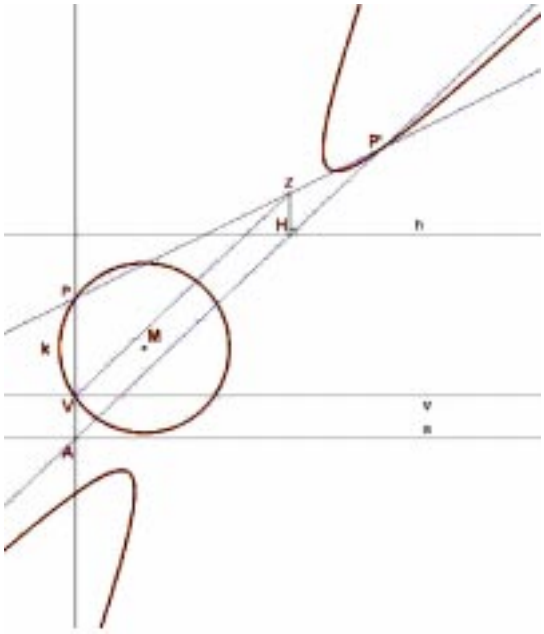

Рисунок 25. Построение гиперболы как образа окружности при осевой проекции.

ружности перпендикулярна оси конуса. Cabri 3D позволяет наблюдать изменение формы кривой от эллипса до гиперболы при вращении плоскости проекции.

References

[1] *Laborde, J. M.* (2004) 20 Years of Cabri! Perspective of Geometry Based Computing Means of Tomorrow. (presentation), Third Cabri Geometry International Conference, Rome 9th-12th September 2004, Universitб «La Sapienza».

[2] *Laborde, J. M.; Bainville, E.* (2004) Cabri Gйomitre 3D (Version 1.0). Grenoble: Cabrilog (www.cabri.com).

[3] *Schumann, H.* (1991) Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer (School geometric construction with a computer). Stuttgart: Metzler und Teubner (available in the archiv of www.math-schumann.de).

[4] *Schumann, H.; Green, D.* (1994) Discovering Geometry with a Computer. Bromley/Kent: Chartwell-Bratt.

[5] *Schupp, H.* (1988) Kegelschnitte (Conics). Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

[6] *Wolff. G. (Ed.)* (1966) Handbuch der Schulmathematik, Band 4 (Manual of School Mathematics, Vol. 4). Hannover: Schroedel.

Prof. Dr. Heinz Schumann
Faculty III, Mathematics/Informatics,
University of Education Weingarten
D-88250 Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

© Наши авторы, 2005.
Our authors, 2005.