

*Кондратьев Александр Сергеевич,
Ляцев Александр Викторович*

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКИ. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Использование информационных технологий в процессе преподавания физики как в школе, так и в вузах стало уже повсеместным. Одной из важных составляющих применения информационных технологий является использование компьютеров для моделирования реальных физических процессов. Подобные учебные задачи разрабатывались уже достаточно давно (см., например, учебные пособия [1–3]). Первые из таких задач были достаточно примитивны и часто сводились к созданию графических иллюстраций задач, решение которых было получено аналитическими методами. Постановка задач, требующих применение достаточно сложных вычислительных методов (вычисление интегралов, решение дифференциальных уравнений и т.д.), была невозможной, во-первых, в силу малой доступности достаточно мощных компьютеров, а во-вторых, потому что требовало изучения учащимися соответствующих вычислительных методов.

В настоящее время ситуация изменилась коренным образом. Во-первых, компьютеры, которыми снабжаются обычные школы, способны справляться даже с достаточно объемными научными расчетами. Во-вторых, появление таких вычислительных систем, как Maple, Mathematica, MATLAB, MatCad и др., позволяет существенно упростить процесс программирования. Учащемуся уже нет необходимости

изучать соответствующие вычислительные методы и, тем более, тратить время на рутинное программирование вычислительных процедур, поскольку практически все необходимые процедуры включены в эти вычислительные системы. Проводя аналогию с натурным экспериментом, можно сказать, что ученикам нет необходимости самим создавать прибор для исследования какого-либо процесса, можно взять готовый прибор и сосредоточиться на исследовании самого процесса.

В такой ситуации, естественно, наибольший интерес представляет постановка задач, которые принципиально не могут быть решены аналитическими методами, что дает возможность показать силу компьютерного моделирования. О постановке одной из таких задач, достаточно простой, чтобы быть понятной школьникам, и достаточно сложной, чтобы ее можно было исследовать без применения компьютера, мы расскажем в данной статье.

Изучение колебаний в школьном курсе физики, как правило, ограничивается моделью гармонического осциллятора. Между тем учет ангармоничности приводит к появлению новых качественных особенностей. Ангармоничность появляется, когда потенциальная энергия системы начинает зависеть от координаты не по квадратичному закону. Одним из примеров могут яв-

ляться колебания математического маятника в случае, когда отклонения от положения равновесия при колебаниях не являются малыми. Другим примером являются колебания некоторого массивного тела на металлическом стержне (рисунок 1а).

В этом случае ангармоничность проявляется уже при малых углах отклонения от положения равновесия. Если изображенный на рисунке 1а стержень перевернуть (рисунок 1b–d), то при достаточно малой жесткости симметричное положение (с) равновесия перестает быть устойчивым, и, в отсутствие колебаний, система может находиться в одном из двух положений равновесия (b) или (d) (мы рассматриваем здесь только случай одномерных колебаний).

Простейшей моделью, позволяющей изучить характерные особенности таких систем, является модель, в которой учитывается лишь линейный и кубический члены в разложении силы в ряд по смещениям. Уравнение, описывающее вынужденные колебания в такой модели, имеет вид:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos(\Omega t) \quad (1)$$

Параметр α может быть положительным (рисунок 1а) или отрицательным (рисунок 1b–d). Параметр β также может принимать положительные (жесткая пружина) и отрицательные (мягкая пружина) значения. Параметр r характеризует затухания системы. В математической модели без потери общности можно считать $m = 1$.

Некоторые качественные особенности колебаний такой системы можно понять, исследуя предельные случаи. В отсутствие затуханий и в гармоническом приближении ($\alpha > 0$) мы приходим к обычным вынужден-

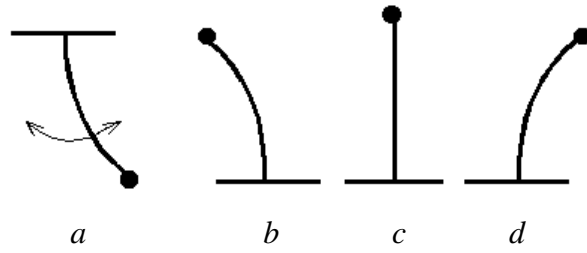


Рисунок 1.

ным колебаниям гармонического осциллятора. Зависимость амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы изображена на рисунке 2.

Будем далее считать параметр β малым, но отличным от нуля. Колебания в этом случае уже не будут гармоническими и, помимо отклика на основной частоте, будут содержать гармоники более высоких частот, кратных Ω . При малых частотах вклад кратных гармоник можно считать малым и для $x(t)$ ограничиться гармоническим приближением: $x(t) \approx A \cos(\Omega t)$. Подставляя эту функцию в уравнение (1) и отбрасывая слагаемые с кратными гармониками, получим уравнение:

$$\Omega^2 = \alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 - \frac{F}{A}.$$

Резонансные кривые для случая $\beta > 0$ также изображены на рисунке 2, они наклонены в сторону увеличения Ω . При отрицательном β наклон кривых меняет направление.

Как изменяется вид резонансных кривых при учете затухания, можно понять, обращаясь к пределу гармонического осциллятора. Кривые «перестают уходить на бесконечность», поскольку с ростом амплитуды колебаний возрастают диссипативные потери, компенсирующие работу внешней силы (рисунок 3).

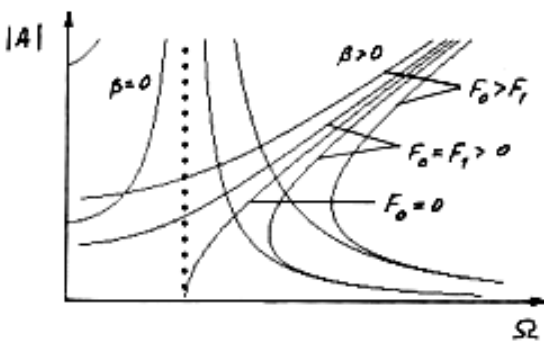


Рисунок 2.

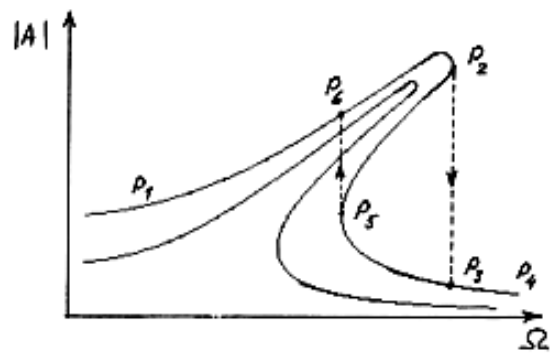


Рисунок 3.

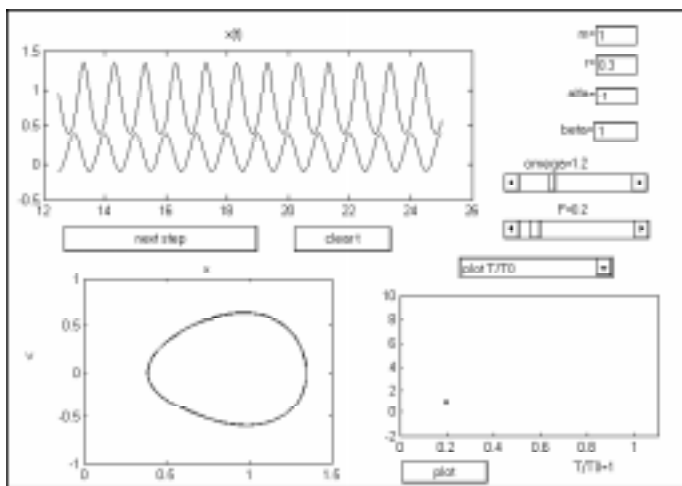


Рисунок 4.

Характерной особенностью таких колебаний является гистерезис при медленном изменении частоты колебаний. При медленном увеличении частоты от нуля амплитуда изменяется от точки P_1 до точки P_2 , где происходит срыв на точку P_3 . При дальнейшем увеличении частоты амплитуда проходит точку P_4 и далее уменьшается. Если теперь уменьшать частоту, то скачка в точке P_3 не происходит, и амплитуда медленно увеличивается до значения P_5 , где происходит скачок в точку P_6 . При дальнейшем уменьшении частоты амплитуда плавно уменьшается до значения P_1 .

Таким образом, одной частоте вынуждающей силы соответствуют две возможные амплитуды колебаний. Какая из этих возможностей реализуется, если воздействие на систему сразу же начать с частоты, лежащей в области частот между P_2 и P_5 , зависит от начальных условий. Однако и натуральный эксперимент (см., например, [4]) и вычислительный эксперимент однозначно приводят к тому, что состояния с амплитудой, лежащей на участке кривой между P_2 и P_5 , не реализуются никогда.

Другой качественной особенностью вынужденных колебаний в такой системе является скачкообразное изменение периода колебаний при изменении амплитуды вынуждающей силы, причем при некоторых значениях амплитуды периодические колебания не устанавливаются при сколь угодно

но длительном воздействии внешней силы на систему. В последнем случае движение имеет хаотический характер (соответствующие данные натурального эксперимента также имеются в статье [4]). Наличие подобных скачков и хаоса для моделей, описываемых уравнениями нелинейной динамики, имеет общий характер, однако конкретные данные для каждой системы могут быть получены только путем численных расчетов.

Процедуры численного решения дифференциальных уравнений (систем дифференциальных уравнений), как уже упоминалось,

включены в состав многих вычислительных систем, поэтому программирование данной задачи не представляет большой сложности. В системе MATLAB существует возможность создания программ с графическим интерфейсом пользователя (GUI). В процессе разработки программы пользователь создаст графическое окно, содержащее типичные элементы (ввод и вывод текста и значений, кнопки, полосы прокрутки, меню, области вывода графиков), и вся дальнейшая работа программы происходит в этом графическом окне (см., например, [5]). Работа с подобным приложением действительно напоминает эксперимент, сам же процесс создания GUI унифицирован (имеется специальная среда GUIDE) и может быть освоен учащимися, знакомыми с программированием.

Пример такого окна для исследования задачи, рассматриваемой в данной статье, изображен на рисунке 4. Данные вводятся непосредственно в графическое окно. На верхнем графике изображена зависимость $x(t)$ и $F\cos(\Omega t)$ (в произвольном масштабе). Левый нижний график – фазовая диаграмма колебаний. На правом нижнем графике строится период колебаний в периодах вынуждающей силы (при исследовании зависимости от амплитуды вынуждающей силы) или график зависимости амплитуды от частоты вынуждающей силы (при исследовании гистерезисных явлений).

На этом и следующих рисунках приведены результаты численного эксперимента, соответствующего неустойчивому положению равновесия при $x = 0$ (Модель системы, изображенной на рисунке 1 b–d).

При незначительном внешнем воздействии ($F = 0.2$) колебания происходят вблизи одного из двух положений равновесия. Положения равновесия определяются обращением в ноль упругой силы $f = \alpha x + \beta x^2$ и при данных значениях параметров равны ± 1 . При увеличении амплитуды вынуждающей силы подобный режим продолжается до значения $F = 0.27$. На интервале между $F = 0.27$ и $F = 0.28$ происходит скачкообразное удвоение периода, и фазовая диаграмма приобретает вид двойной петли (рисунк 5). Пересечение фазовой траектории не противоречит теореме о существовании и единственности решений системы дифференциальных уравнений, поскольку уравнение (1) не автономное. Приведенный график показывает проекцию непересекающейся фазовой траектории в трехмерном пространстве (x, v, t) на плоскость (x, v) .

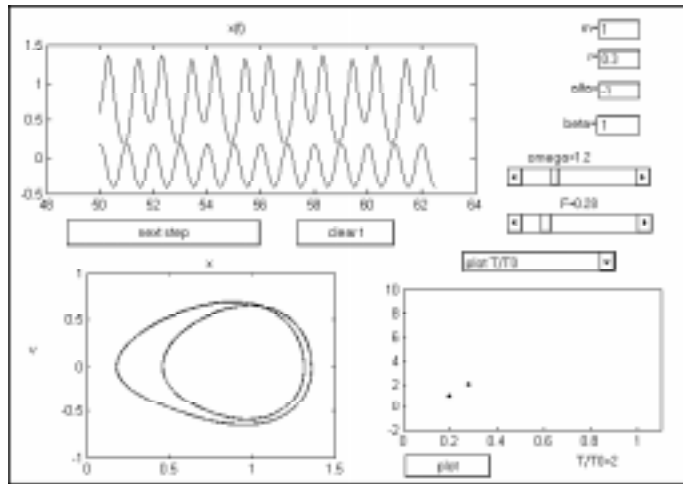


Рисунок 5.

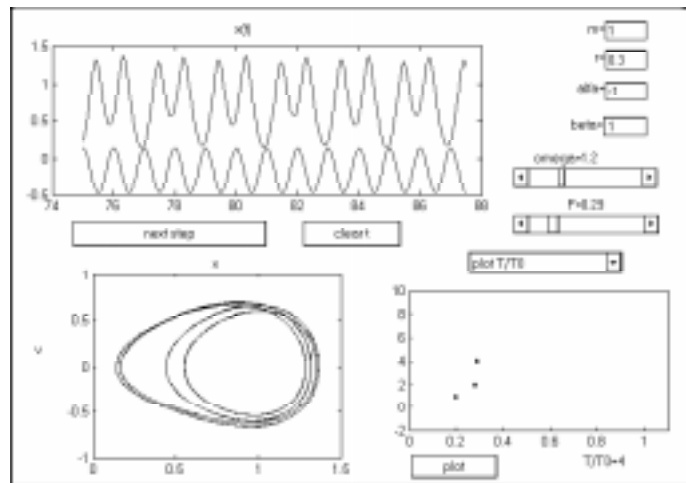


Рисунок 6

Следующее удвоение периода происходит при $F \approx 0.29$ (рисунк 6). Период колебаний становится равным 4 периодам вынуждающей силы.

Однако эта сила еще не достаточно велика, чтобы вывести систему из правой потенциальной ямы. Это происходит лишь при $F > 0.3$ (рисунк 7).

Период колебаний становится равным 5 периодам вынуждающей силы. Колебания уже не происходят в одной потенциальной яме, а захватывают область вблизи обоих положений равновесия.

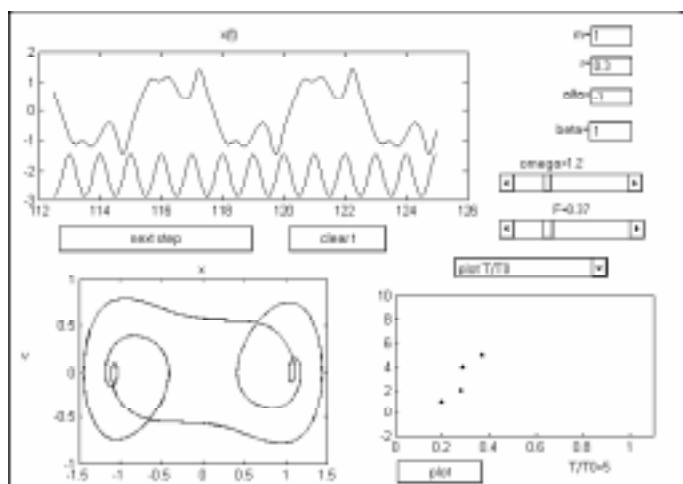


Рисунок 7.

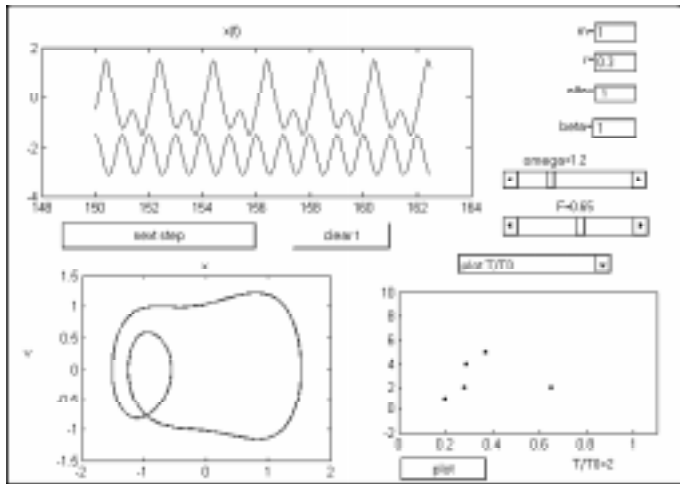


Рисунок 8.

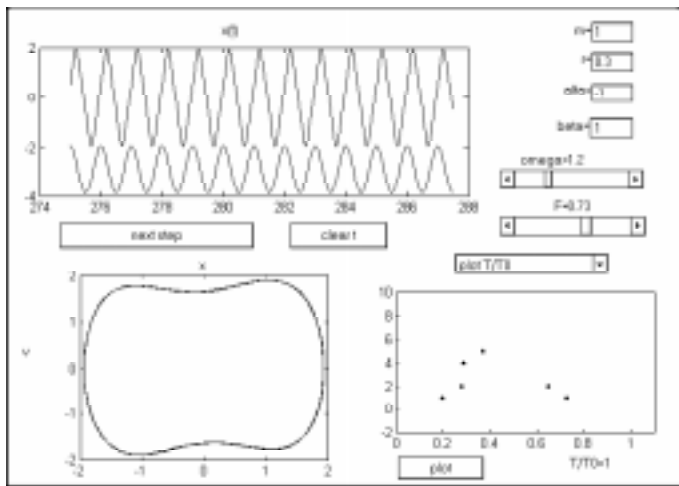


Рисунок 9.

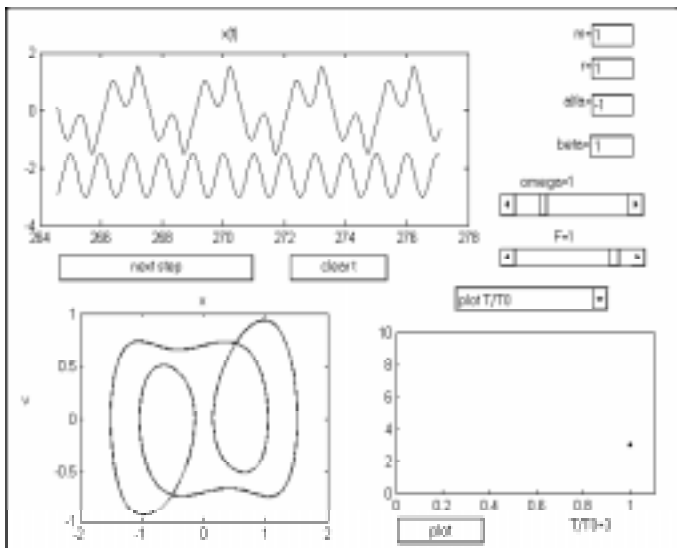


Рисунок 10.

В диапазоне амплитуды вынуждающей силы $0.37 < F < 0.65$ режим колебаний оказывается хаотическим. Фазовая траектория является незамкнутой кривой при сколь угодно длительном промежутке колебаний. Подобное движение можно считать периодическим, но с бесконечно большим периодом. Естественно ожидать, что дальнейшее увеличение F должно сопровождаться «увеличением» хаоса. Однако оказывается, что при $F = 0.65$ снова получается периодическое решение, но с меньшим периодом, равным удвоенному периоду вынуждающей силы (рисунок 8).

Стоит обратить внимание на то, что колебание не является симметричным. Система проводит в области вблизи положения равновесия $x = -1$ больше времени, чем в области вблизи $x = 1$. Естественно, что правая и левая ямы являются эквивалентными, и выбор одного из асимметричных состояний происходит случайным образом. В данном случае возникает известный эффект спонтанного нарушения симметрии, происходящий при фазовых переходах. Подобные переходы в динамических нелинейных системах называют динамическими фазовыми переходами.

На этом, однако, метаморфозы с изменением периодичности не заканчиваются, при увеличении амплитуды вынуждающей силы до 0.73 период решения становится равным периоду внешней силы (рисунок 9). Решение вновь становится симметричным по отношению к замене одной ямы на другую. На фазовой траектории эта симметрия реализуется как симметрия по отношению к инверсии относительно начала координат.

Заметим, что кратности периодов не являются чем-то вполне определенным и зависят от параметров исследуемой системы. Например, при увеличении параметра r до единицы возникают решения с периодом в 3 и в 6 раз превосходящим период колебания вынуждающей силы (рисунки 10, 11).

В данной программе можно также наблюдать гистерезисные явления при достаточно малом значении амплитуды вынуждающей силы и плавном изменении ее частоты. Типичный график приведен на рисунке 12. Расчет соответствует параметрам $m = 1$, $r = 0.1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $F = 0.1$. По вертикальной оси отложена амплитуда колебаний, по горизонтальной – отношение частоты вынуждающей силы к свободной частоте малых колебаний системы. Очевидно, что скачки колебаний происходят вблизи точек P_2 и P_5 , изображенных на рисунке 3. Чтобы подойти ближе к этим точкам, необходимо более медленное изменение частоты и, соответственно, более длительное время проведения численного эксперимента.

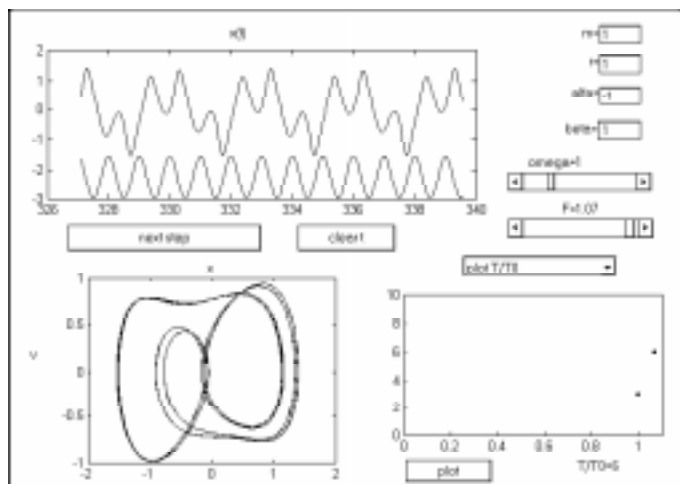


Рисунок 11.

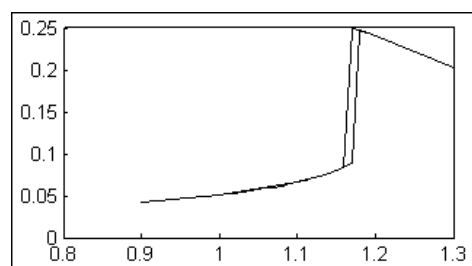


Рисунок 12.

Литература

1. Кондратьев А.С., Латов В.В. Физика и компьютер. СПб: Изд. СПбГУ, 1997.
2. Бурсиан Э.В. Физика. 100 задач для решения на компьютере. СПб, 1997.
3. Бордовский Г.Ф., Горбунова И.Б., Кондратьев А.С. Персональный компьютер на занятиях по физике. СПб.: Изд. РГПУ им. А.И.Герцена, 1999.
4. Weltner K., Andrade R., Espiridiao S. Demonstration of different forms of the bent tuning curve with a simple mechanical oscillator // Hands on-experiments in physics education – Proceedings. P. 391.
5. Ануфриев И. Самоучитель Matlab 5.3/6.x. СПб., 2004.

Кондратьев Александр Сергеевич,
академик РАО, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой методики обучения физике РГПУ им. А.И. Герцена,

Ляпцев Александр Викторович,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры методики обучения физике РГПУ им. А.И. Герцена.



Наши авторы, 2005.
Our authors, 2005.