Гейнц Шуман

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К «ПРОСТЫМ» АЛГЕБРАИЧЕСКИМ КРИВЫМ

Статья печатается с сокращениями. Перевод и редакция – М.Э. Юдовина.

Алгебраической кривой порядка n называется множество точек (x; y), удовлетворяющих уравнению $\sum_{0\le i+j\le n} a_{ij} x^i y^i = 0$ с целыми коэффициентами, причем при $i + j = n$ хотя бы один из коэффициентов $a_{ij} \ne 0$.

В статье приводятся примеры использования алгебраических кривых в качестве подходящего объекта, при изучении которого с помощью компьютера удается связать алгебраический и геометрический подходы в преподавании.

Другие доводы в пользу алгебраических кривых следующие:

– возможность обобщений;

– различные приложения и удобство моделирования;

– поддержка функционального мышления;

– роль в истории математики;

– эстетическая ценность.

Благодаря компьютеру алгебраические кривые становятся доступными для преподавания.

В статье демонстрируется на нескольких примерах, как можно использовать некоторые из существующих программ для изучения этих кривых.

По словам автора, изучение алгебраических кривых с двух точек зрения – алгебраической и геометрической – реализовано в настоящее время только в программе Cabri Géomètre II+ (www.cabri.com). В ней используется численный алгоритм, с помощью которого по данной кривой подбирается уравнение степени $n\,(n \le 6)$. Визуальную проверку точности результата можно осуществить, построив затем кривую, заданную полученным уравнением. Для этого можно воспользоваться любой программой, умеющей строить график, например, DERIVE.

Простыми алгебраическими кривыми автор называет кривые, удовлетворяющие следующему условию: целочисленными являются как их геометрические параметры, так и коэффициенты соответствующего алгебраического уравнения.

Предлагается следующий план работы с такими кривыми.

1. Построение кривой согласно некоторому сценарию с помощью Cabri Géomètre II+ и ее геометрическое описание.

2. Вариация конструктивных параметров, определяющих положение и форму кривой. Построение анимационной графики, позволяющей следить за изменением кривой при вариации параметров.

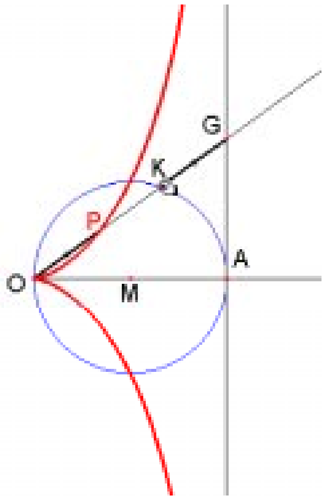
3. Автоматическое определение алгебраического уравнения, задающего эту кривую в выбранной системе координат.

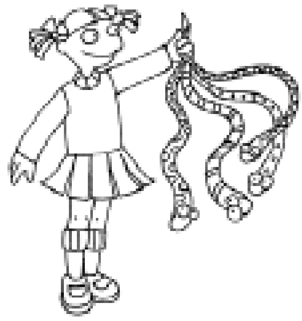
4. Связывание с целочисленной решеткой.

5. Экспериментально-индуктивное определение коэффициентов.

6. Математическая проверка уравнения.

Реализация этого плана продемонстрирована на нескольких примерах. Приведем один из них.





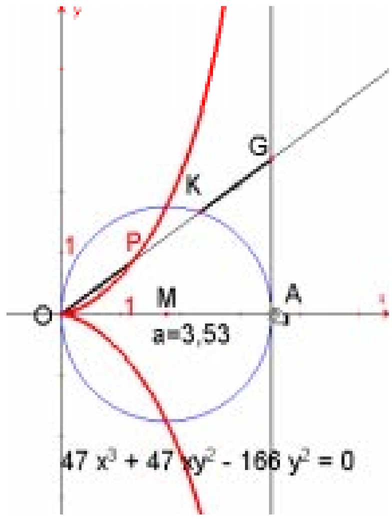


Рисунок 1.

Рисунок 2.

ИССЛЕДОВАНИЕ КИССОИДЫ

Киссоида – название целого класса алгебраических кривых. В частности, эти кривые используются в геометрическом решении Делийской задачи.

1. Сценарий:

– строим окружность диаметра OA (конструктивный параметр);

– строим в точке A перпендикуляр к диаметру;

– отмечаем на окружности произвольную точку K;

– строим луч OK, пересекающий перпендикуляр в точке G;

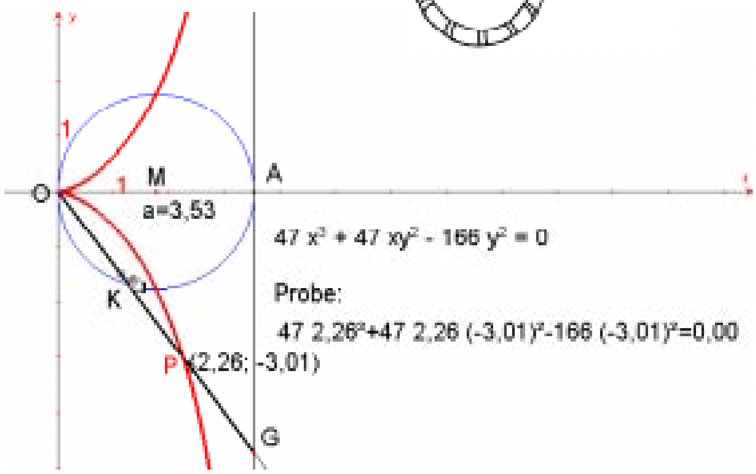


Рисунок 3.

– откладываем на луче отрезок OP, равный KG.

Какую кривую опишет точка P, если перемещать точку K вдоль окружности?

2. Получаем (в системе Cabri Géomètre II+) киссоиду, симметричную относительно OA, имеющую заострение в точке O и перпендикуляр к OA в качестве асимптоты (рисунок 1).

3. Вводим прямоугольные координаты с началом в точке O и осью абсцисс, направленной вдоль OA. Получаем с помощью той же программы Cabri Géomètre II+ алгебраическое уравнение 3-й степени (рисунок 2). Для проверки этого уравнения выбираем на кривой произвольную пробную точку P (рисунок 3).

4. Если точку A перемещать по узлам целочисленной координатной сетки, то можно заметить связь между конструктивным параметром OA и коэффициентами уравнения. Оказывается, только коэффициент a при y^2 зависит от A и он равен OA (рисунок 4).

Получаем уравнение

$$x^3 + xy^2 - ay^2 = 0 \qquad (1)$$

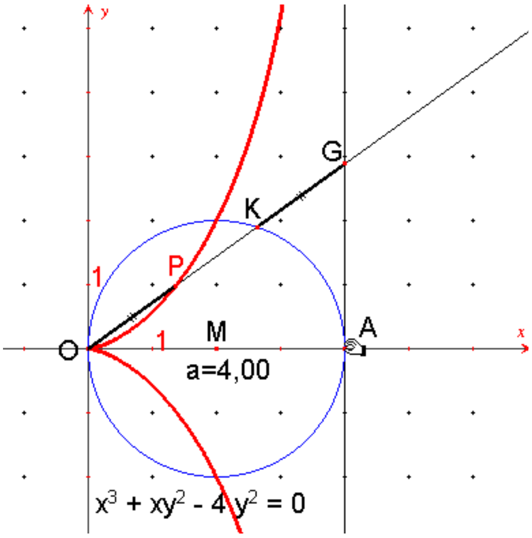


Рисунок 4.

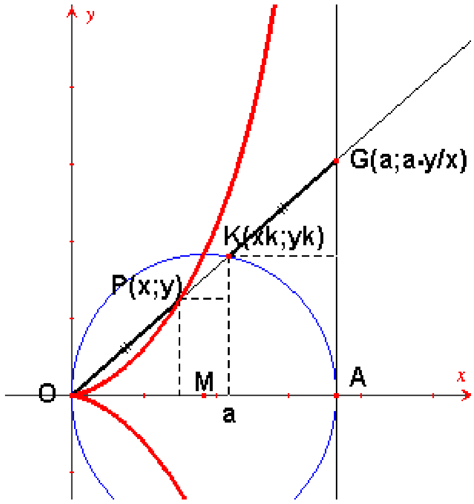


Рисунок 5.

5. Из рисунка 5 можно вывести уравнение киссоиды аналитико-геометрическим методом.

Действительно, угловой коэффициент луча OG равен $\frac{y}{x}$, и координаты точки G равны $(a;\ a\frac{y}{x})$. Координаты точек P и K равны, соответственно, $(a - x_k;\ a - y_k)$ и $(a - x;\ a\frac{y}{x} - y)$. Подставляя координаты точки K в уравнение окружности $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, получаем после обычных алгебраических преобразований уравнение (1).

Дополнение. Обобщением киссоиды является гипокиссоида, которая строится по аналогичному сценарию, но при этом прямая AG смещена вдоль оси OX (рисунки 6, 7).

Аналогично выводится уравнение гипокиссоиды $x^3 + xy^2 + (d - a)x^2 - ay^2 = 0$, содержащее два параметра a и d.

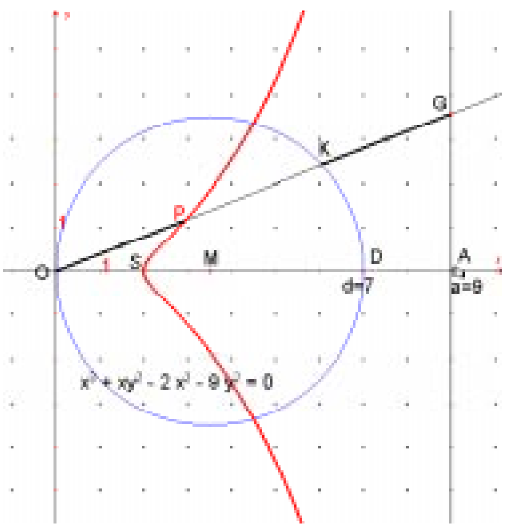


Рисунок 6.

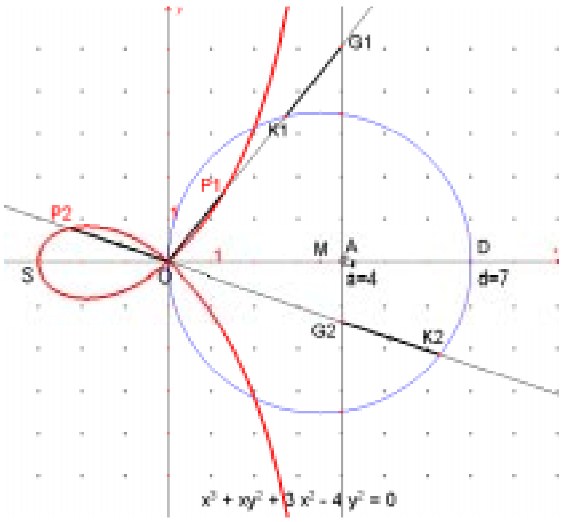


Рисунок 7.

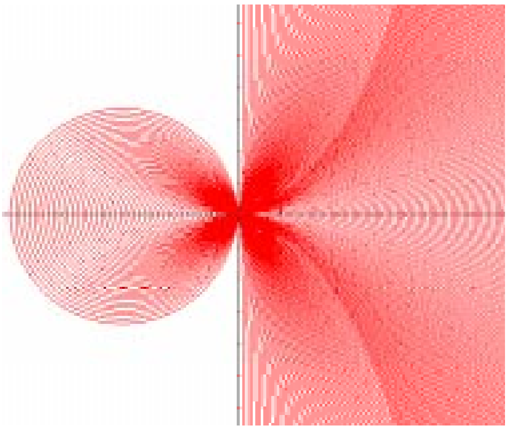


Рисунок 8.

На рисунке 8 изображено семейство гипокиссоид, получаемое при изменении параметра a от значений, меньших d, до значений, больших d. При этом киссоида ($a = d$) отделяет кривые, для которых $a < d$, от кривых, для которых $a > d$.

В заключение статьи автор делает несколько замечаний.

1. Для кривых, задаваемых уравнением выше 6-й степени, численный алгоритм, использованный в Cabri Géomètre II+, становится неэффективным. Также метод не работает, если зависимость коэффициентов уравнения от конструктивных параметров кривой иррациональна.

2. Рассмотрим кривые, которые можно построить с помощью циркуля и линейки или даже с помощью конических сечений. Как охарактеризовать те из них, у которых коэффициенты уравнения – рациональные функции конструктивных параметров?

3. Среди классических алгебраических кривых нет ни одной 5-й или 7-й степени. Не связано ли это с тем, что многочлены, степень которых – простое число, большее 3, неприводимы? Не поэтому ли такие кривые нельзя построить с помощью конических сечений?

4. О дальнейшем развитии компьютерных инструментов.

В Oliver Labs (2002) создана программа «SPICY» под Linux для работы с алгебраическими кривыми и поверхностями. Reinhard Oldenburg (2003) создана программа «Feli-X» (экспериментальная версия), содержащая компоненты динамической геометрии, которые работают совместно с компонентами компьютерной алгебры системы MATEMATICA.

С помощью «Feli-X» можно для конструируемой алгебраической кривой вычислить точно ее уравнение. Обратная задача – по заданному уравнению построить кривую как объект динамической геометрии (а не просто картинку на экране) – связана с принципиальной проблемой двусторонней связи между системами динамической геометрии и компьютерной алгебры. Eugenio Roanes-Lozano и др. (2003) создали аналогичную программу, базирующуюся на Maple и Derive.

Литература

1. *Gawlick, Th.* (2001): Exploration reell algebraischer Kurven mit DGS und CAS. In: Elschenbroich, H.-J. et al.: Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte dynamischer Geometrie. Hildesheim: Franzbecker, S. 69–76.

2. *Gawlick, Th.* (2003): Über die Mächtigkeit dynamischer Konstruktionen mit verschiedenen Werkzeugen. Bielefeld: IDM, Occasional Paper 185 / www.uni-bielefeld.de/idm/publikationen/occpap.html

3. *Labs, O.* (2002): SPICY – Mehr als dynamische Geometrie mit Hilfe von Computeralgebra. Vortrag auf der Fachtagung «Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung III», 2–5. April 2002, Kloster Schöntal / www.oliverlabs.net/spicy

4. *Oldenburg, R.* (2003): Feli-X: Ein Prototyp zur Integration von CAS und DGS. Erscheint in: Bender, P. et al.: Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunter-richt. Berichte über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises «Mathematikunterricht und Informatik» in der GDM vom 27. bis zum 29. September 2002 in Soest.

5. *Roanes-Lozano, E. and Roanes-Мажias, E., Villar-Mena, M.* (2003): A Bridge Between Dynamic Geometry and Computer Algebra. In: Mathematical and Computer Modelling 37/9–10, p. 1005–1088.

6. *Schumann, H.* (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer.
Stuttgart: Metzler und Teubner (auch im Archiv von www.math-schumann.de).

7. *Schumann, H.* (2001): Die Behandlung von Funktionen einer reellen Variablen mit Methoden der dynamischen Geometrie. In: Elschenbroich, H.-J. et al.: Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie. Hildesheim: Franzbecker, S. 173–182.

8. *Schupp, H. / Dabrock, H.* (1995): Höhere Kurven – Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

9. *Weth, Th.* (1993): Zum Verständnis des Kurvenbegriffs im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Heinz Schumann,
Prof. Dr. habil, Fakultat III,
Mathematik/Informatik,
Institur fur Bildungsinformatik
University of Education (PH),
Weingarten, Germany.

Юдовин Марк Эльявич,
доцент кафедр высшей
математики СПбГЭТУ и
СПбГУ растительных полимеров.