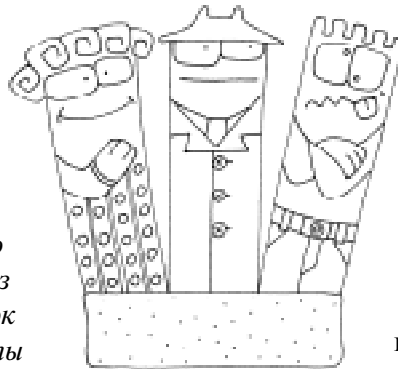


Карнов Юрий Глебович

## ПРОБЛЕМА ТРЕХ ИДОЛОВ

Одна из трудных задач логики, придуманная известным логиком Раймондом Смаллианом, формулируется так. «В некотором порядке стоят три Идола: Идол Правды. Идол Лжи и Идол Дипломатии. Идол Правды всегда говорит правду. Идол Лжи всегда лжет, Идол Дипломатии отвечает случайно: то лжет, то говорит правду. Можно ли тремя вопросами, которые требуют только ответа «Да» или «Нет» и каждый из которых можно задать только одному из Идолов, определить порядок расстановки Идолов? Идолы понимают любые вопросы, но отвечают на них на своем языке «Ха» или «Хо», и никто не знает того, означает «Ха» утвердительный, а «Хо» — отрицательный ответ или наоборот».



Задача является непростой. В работе «The hardest logical puzzle ever», опубликованной в журнале The Harvard Review of Philosophy в 1996 г., профессор Массачусетского Технологического Института George Boolos называет эту проблему одной из труднейших когда-либо формулировавшихся в логике. Работу эту можно найти на сайте [http://people.ucsc.edu/~iburke/three\\_gods.pdf](http://people.ucsc.edu/~iburke/three_gods.pdf).

Любому человеку стоит подумать над ее решением, прежде чем обращаться к ответу. Преподаватель или любой человек, знающий решение, не должен лишать дру-

гого удовольствия самостоятельно решить эту непростую проблему. Вместо того, чтобы сообщать решение затрудняющемуся студенту, преподаватель может высказать ему последовательно одну или несколько из следующих подсказок-указаний для направления его рассуждений в правильное русло. Первые 13 указаний способствуют последовательному, все более глубокому, пониманию проблемы, облегчая нахождение решения; последнее фактически формулирует это окончательное решение.

Заметим, что здесь мы предлагаем значительно более простой путь к решению этой проблемы, чем тот, который представлен в вышеупомянутой работе. По-видимому, приведенное здесь решение снимает с данной проблемы характеристику «самой трудной из когда-либо формулировавшихся», сводя ее решение к простым и прозрачным рассуждениям, доступным студентам младших курсов и интересующимся школьникам, едва освоившим первые понятия логики.

### Указания к решению:

1. Для упрощения решения полезно отбросить условие о собственном языке идолов, считая, что они отвечают «Да» или «Нет». При решении сложной задачи всегда лучше сначала решить более простую задачу, а потом вернуться к первоначальной постановке.

2. Целью задаваемых вопросов является определение порядка расстановки Идолов, и удобно сразу записать все исходное множество неопределенности. Возможный порядок расстановки может быть одним из следующих шести: {ПЛД, ПДЛ, ЛПД, ЛДП, ДПЛ, ДЛП}. Наши вопросы должны быть сформулированы так, чтобы в конце концов была определена только одна из этих шести расстановок, в которой действительно находятся Идолы. Она может быть, конечно, любой из указанных в этом множестве.



Дипломатии, то та расстановка Идолов, при которой Идол Дипломатии находится в позиции, к которой обращен вопрос, попадет в каждое из двух множеств, соответствующих ответам как «Да», так и «Нет» — ведь Идол Дипломатии может отвечать как угодно!

3. Очевидно, что каждый ответ «Да» или «Нет» любого из Идолов на любой вопрос разбивает множество возможных расстановок на два (возможно, пересекающихся!) подмножества — расстановки, при которых спрашиваемый Идол может ответить «Да», и расстановки, при которых спрашиваемый Идол может ответить «Нет». Следующий вопрос снова разобьет каждое множество на два подмножества и т. п.

4. Ясно, что по соображениям симметрии начать задавать вопросы можно любому из Идолов. Например зададим вопрос: «Верно ли, что  $2 \times 2 = 4$ ?» крайнему левому идолу. Его ответ «Да» может быть получен при возможных исходных расстановках Идолов {ПЛД, ПДЛ, ДПЛ, ДЛП}, поскольку на этот вопрос ответить «Да» может либо Идол Правды — он говорит всегда только правду, либо Идол Дипломатии, который говорит все, что угодно. Понятно, что ответ «Нет» от крайнего левого Идола на этот вопрос может быть получен при возможных расстановках {ЛПД, ЛДП, ДПЛ, ДЛП}.

5. Как было видно из первого пробного вопроса, если отвечает Идол



находиться в любой из позиций! Например, пусть на этот вопрос получен ответ «Да», и соответствующее этому ответу множество неопределенности есть {ПЛД, ПДЛ, ДПЛ, ДЛП}. Очевидно, что какому бы идолу (левому, правому или среднему) мы ни задали теперь любой следующий вопрос, в одно из двух множеств неопределенных расстановок, соответствующих двум ответам на него, попадут обязательно не менее трех идолов. Такое множество никаким последним, третьим вопросом с ответами «Да» и «Нет» нельзя разбить на пару одноэлементных множеств. Отсюда вывод: нужно придумать такой первый вопрос, который даст нам разбиение исходной неопределенности на два в некотором смысле хороших множества. Более общее соображение будет звучать так: лучше сначала задаться множествами неопределенности расстановок, которые мы

хотели бы получить после ответа на вопрос, а потом уже выбрать подходящего в исходных расстановках Идола и придумать подходящий вопрос, если это, конечно, возможно.

7. «Хорошими» множествами неопределенности после ответа левого Идола

на первый вопрос будут те, в которых Идол Дипломатии отсутствует хотя бы в одной позиции во всех результирующих расстановках. Например, {ПЛД, ЛПД, ДПЛ, ДЛП} и {ПДЛ, ЛДП, ДПЛ, ДЛП} – хорошие множества, потому что в первом из них Идол Дипломатии не находится в средней позиции, а во втором его точно не будет справа.

8. Можно ли сконструировать такой вопрос левому Идолу, ответ на который обеспечит нам разбиение исходного множества расстановок Идолов на эти два множества {ПЛД, ЛПД, ДПЛ, ДЛП} и {ПДЛ, ЛДП, ДПЛ, ДЛП}? Задача состоит в том, чтобы придумать вопрос, ответ «Да» на который дадут Идол Правды при расстановке ПЛД и Идол Лжи при расстановке ЛПД, и на этот же вопрос должны ответить «Нет» Идол Правды при расстановке ПДЛ и Идол Лжи при расстановке ЛДП (идолов Дипломатии не будем учитывать – они все равно отвечают произвольно!).

9. Этот первый вопрос левому Идолу очевиден: «Верно ли, что ваша расстановка ПЛД или ЛДП?» или же эквивалентный ему.

10. Очевидно, что следующие задаваемые вопросы и позиция Идола, которому они будут задаваться, должны выбираться в зависимости от того конкретного множества неопределенных расстановок, которое мы хотим уменьшить, или, что то же, от ответов, полученных на предыдущие вопросы.

11. Теперь понятно, как двигаться дальше. Пусть мы получили ответ «Да» от левого Идола на первый вопрос, что возможно только при расстановках Идолов {ПЛД, ЛПД, ДПЛ, ДЛП}. Вторым вопросом следует разбить это множество неопределенности на два, например, таких: {ПЛД, ЛПД} и {ДПЛ, ДЛП} Искомый воп-

рос, конечно, следует задавать только среднему Идолу – в середине не может стоять идол Дипломатии, и он должен быть таким: «Верно ли, что ваша расстановка ЛПД или ДЛП?» или эквивалентным ему. (Очевидно, что здесь возможны и другие «хорошие» разбиения на желаемые множества расстановок, например, {ПЛД, ДЛП} и {ДПЛ, ЛПД}, и для этого тоже можно сформулировать второй вопрос).

12. Пусть на второй вопрос был получен ответ «Да» от среднего Идола, что возможно только при расстановках Идолов {ПЛД, ЛПД}. Третий вопрос, очевидно, следует задать снова среднему Идолу, и он совершенно очевиден: ведь Идол Лжи и Идол Правды, которые могли бы стоять в средней позиции, должны ответить на него по-разному. Вопрос может быть такой: «Верно ли, что  $2 \times 2 = 4$ ?». Если ответ будет «Да», то отвечал Идол Правды и расстановка Идолов ЛПД. Если ответ будет «Нет», то отвечал Идол Лжи и расстановка Идолов ПЛД.

13. Отбросим теперь упрощение, связанное с собственным языком Идолов. Рассмотрим первый вопрос. Пусть мы хотим, чтобы на вопрос левому Идолу при начальном множестве неопределенности расстановок Идолов мы бы получили ответ «Хо» при расстановках {ПЛД, ЛПД, ДПЛ, ДЛП} при любых значениях слова «Хо». Если «Хо» означает «Да», то вопрос должен быть «Верно ли, что ваша расстановка ПЛД или ЛДП?» Если «Хо» означает «Нет», то вопрос должен быть противоположным. Поэтому в вопросе следует связать значение слова «Хо» (то есть «Да» либо «Нет») с вопросом о расстановке Идолов.

14. Мы можем теперь окончательно сформулировать решение проблемы. Очевидно, что первый вопрос левому Идолу может быть таков: «Верно ли, что «Хо» означает «Да» и ваша расстановка ПЛД или



ЛДП, или же «Хо» означает «Нет» и ваша расстановка ни ПЛД, ни ЛДП?», или, что то же самое: «Верно ли, что «Хо» означает «Да» тогда и только тогда, когда ваша расстановка ПЛД или ЛДП?». Ответ «Хо» на него будет получен при любом значении «Хо» – «Да» или «Нет» при расстановках

{ПЛД, ЛПД, ДПЛ, ДЛП}. Очевидно, что ответ «Ха» от левого Идола на этот вопрос также будет получен при возможных расстановках Идолов {ПДЛ, ЛДП, ДПЛ, ДЛП} при любых значениях «Ха». Аналогично следует изменить второй и третий вопросы.



*Пользуясь случаем, редакция представляет новую книгу Ю.Г. Карпова «Теория автоматов». В этой книге читатель найдет много интересного не только о теории автоматов, но и о логике, теории алгоритмов, языках программирования. Книга будет полезна студентам технических вузов, изучающих курс «Математическая логика и теория алгоритмов». Разнообразные примеры и задачи, отобранные со вкусом, позволяют по-новому взглянуть на этот классический, и в то же время очень современный раздел математики.*

*Книга будет полезна и школьным учителям информатики, желающим узнать, как развивается в курсе технических университетов тема «Логика», ставшая неотъемлемой частью курса школьной информатики.*



Наши авторы, 2004.  
Our authors, 2004.

*Карпов Юрий Глебович,  
профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой  
Распределительных вычислений и  
компьютерных сетей Санкт-Петербургского Политехнического  
Университета.*