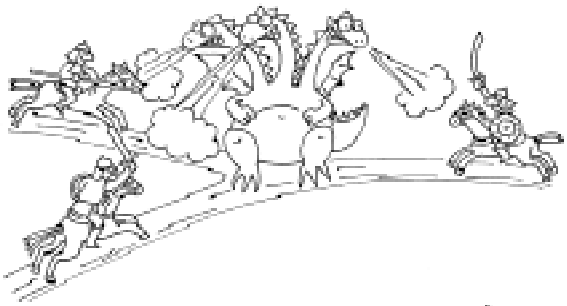
Агафонова Ирина Витальевна,
Дмитриева Оксана Михайловна

ТРОИЧНАЯ СИСТЕМА И РАВНОВЕСИЕ

ЧЕМ ТРИ МОЖЕТ БЫТЬ ЛУЧШЕ ДВУХ?



Учебники информатики рассказывают нам о двоичной системе счисления и о том, почему именно эта система, представляющая данные и команды цифрами 0 и 1, реализована в современных компьютерах.

Известно, однако, что в 60-х годах учеными Московского университета (главный конструктор — Николай Петрович Брусенцов) был спроектирован и успешно работал троичный компьютер, получивший название «Сетунь». Было выпущено несколько десятков машин, размещавшихся по большей части в высших учебных заведениях. Драматическую историю троичного компьютера и его описание можно найти в [1].

Каковы же были причины, побудившие разработчиков выбрать троичное представление данных и использовать триты и трайты вместо битов и байтов?

Чаще всего при обсуждении достоинств троичной системы счисления говорят о ее экономичности.

Действительно, троичная система счисления экономичнее других систем, если показателем экономичности считать количество чисел, которые можно записать с помощью фиксированного количества цифр данной системы. Доказывают это так.

Обозначим $N(m, x)$ — количество чисел, которые можно записать с помощью m разрядов системы с основанием x.

В двоичной системе счисления с помощью m разрядов можно записать 2^m натуральных чисел, в троичной 3^m, и вообще в системе с основанием x будет $N(m, x) = x^m$. На эту запись уйдет mx цифр данной системы.

Зафиксировав количество используемых цифр $n = mx$, получаем число разрядов $m = n/x$ и количество чисел $N(n/x, x) = x^{\frac{n}{x}}$.

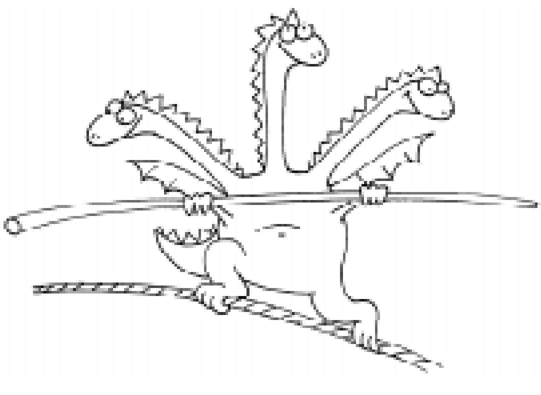
Функция $x^{\frac{n}{x}}$ исследуется средствами математического анализа. Ее график при любом n имеет единственный максимум при $x = e = 2{,}718281828...$ (см. рисунок 1).

Наиболее близким к e является основание $x = 3$, оно и будет самым экономичным. Действительно, два троичных разряда (6 цифр) позволяют записать 9 чисел, в то время как три двоичных разряда (тоже 6 цифр) — только 8.

Однако название «экономичность» еще не означает выгоду во всех отношениях. Сам отец «Сетуни» Н.П. Брусенцов говорил об «иллюзорной экономности троичного кода» и не ее считал главным достоинством троичной записи. Выбор троичной системы он обосновывал прежде всего тем, что с тремя цифрами возможен натуральный код чисел со знаком, а с двумя невозможен. Брусенцов отмечал, что двоичным кодом естественно представимы либо только неотрицательные числа, либо только неположительные. А вот в троичном коде с цифрами +1, 0, −1 (как и во всякой системе с нечетным числом цифр) имеет место естественное представление чисел со знаком. При этом нет необходимости в специальном разряде знака: если старшая значащая цифра числа положительна, то и число положительное, если отрицательна, то число отрицательное.

Привлекательна простота арифметических операций над числами со знаком в троичной симметричной системе. Важно и то, что усечение длины числа в такой системе равносильно правильному округлению, поскольку абсолютная величина отбрасываемой части числа всегда меньше половины единицы последнего сохраняемого разряда.

БАЛАНС –1, 0, 1



Поговорим об упомянутой троичной системе подробнее. Троичная система использует представление числа a в виде суммы степеней числа 3. Для целого a это выражение

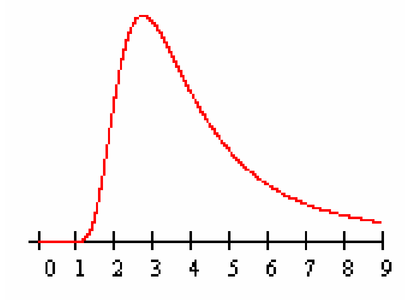


Рисунок 1.

$$a = \alpha_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot 3^{n-2} + \ldots + \alpha_1 \cdot 3^1 + \alpha_0$$

Цифры α_k могут принимать одно из трех базовых значений и обычно берутся из набора {0, 1, 2}. Например,

$$11 = 9 + 2 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2,$$

так что можно записать $11 = (102)_3$. Нижний индекс 3 означает, что число 102 записано в троичной системе. Если в этой системе надо представить отрицательное число, то знак потребуется указывать дополнительно.

Нас будет прежде всего интересовать троичная система, использующая базовый набор из цифр {−1, 0, 1}. Она называется симметричной, уравновешенной или сбалансированной. Чтобы цифра −1 не отличалась от 0 и 1 лишней позицией для знака, выберем для нее обозначение $\bar{1}$. Так как $11 = 9 + 3 - 1 = 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + \bar{1}$, то запишем $11 = (11\bar{1})_{\bar{3}}$, где нижний индекс $\bar{3}$ будет означать запись в уравновешенной троичной системе.

Приведем представление целых чисел от − 6 до 6 в уравновешенной троичной системе (см. таблицу 1).

Как видим, знак числа присутствует в самом его представлении: если первая цифра $\bar{1}$, то число отрицательное, а если 1, то положительное. Чтобы из положительного числа a получить это отрицательное число $(-a)$, надо в уравновешенном троичном представлении числа

Таблица 1.

a	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$(a)_{\bar{3}}$	$\bar{1}10$	$\bar{1}11$	$\bar{1}\bar{1}$	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	0	1	$1\bar{1}$	10	11	$1\bar{1}\bar{1}$	$1\bar{1}0$

Таблица 2.

$(a)_{\bar{3}}$	$(a')_{\bar{3}}$	$(a'')_{\bar{3}}$	a	a'	a''
0 0 1	1 1 $\bar{1}$	$\bar{1}$ $\bar{1}$ 0	1	11	–12
0 1 $\bar{1}$	1 $\bar{1}$ 0	$\bar{1}$ 0 1	2	6	–8
0 1 0	1 $\bar{1}$ 1	$\bar{1}$ 0 $\bar{1}$	3	7	–10
0 1 1	1 $\bar{1}$ $\bar{1}$	$\bar{1}$ 0 0	4	5	–9

произвести одновременную замену всех цифр 1 на $\bar{1}$, а всех $\bar{1}$ на 1. Такую замену назовем инверсией.

Используя n троичных разрядов, можно записать 3^n различных целых чисел, в том числе $\frac{3^n-1}{2}$ положительных, $\frac{3^n-1}{2}$ отрицательных и 0. Это будут числа от

$$(\underbrace{\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\ldots\bar{1}\,\bar{1}}_{n\text{ цифр}})_{\bar{3}} \text{ до } (\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ цифр}})_{\bar{3}},$$

наибольшее из которых обозначим $Q(n) = \frac{3^n-1}{2} =$

$$= (\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ цифр}})_{\bar{3}}.$$

Помимо операции инверсии, отметим еще одну одноместную операцию, возможную в троичной системе — операцию поразрядного циклического сдвига. Циклическим сдвигом вправо числа a, записанного посредством ровно n разрядов троичной симметричной системы (возможно, с добавлением нулей слева) назовем число a', полученное из a поразрядной заменой цифр 0 на 1, 1 на $\bar{1}$ и $\bar{1}$ на 0. Краткая схема замены $0 \to 1 \to \bar{1} \to 0$. Таким же образом от a' можно перейти к a''. Очевидно, что $a''' = a$ и что $a + a' + a'' = 0$. Число a'' получается из a заменой $0 \leftarrow 1 \leftarrow \bar{1} \leftarrow 0$, то есть двукратный циклический сдвиг вправо — это циклический сдвиг влево.

Например, для $a = (1\bar{1}\bar{1}0)_{\bar{3}}$ получим $a' = (\bar{1}001)_{\bar{3}}$, $a'' = (011\bar{1})_{\bar{3}}$. Десятичное представление этих чисел 15, −26 и 11.

Возьмем все $Q(n-1)$ положительных чисел, записываемых $(n-1)$ троичными разрядами. К каждому из них припишем слева 0 и для каждого найдем сдвиг вправо (положительное число) и сдвиг влево (отрицательное число). Чисел станет в 3 раза больше, то есть $3Q(n-1) = Q(n) - 1$, и их абсолютные величины все будут различны и охватят весь набор положительных чисел, записываемых n троичными разрядами, кроме наибольшего числа $Q(n)$, состоящего из n единиц. Это будет очень красивый набор чисел, уравновешенный по всем разрядам. Посмотрим, как он выглядит при $n = 3$. Исходный набор двухразрядных положительных чисел с приписанными слева нулями состоит из четырех чисел:

a	$(a)_{\bar{3}}$
1	0 0 1
2	0 1 $\bar{1}$
3	0 1 0
4	0 1 1

Занесем в таблицу числа a и их циклические сдвиги a' и a'' в троичном и в десятичном представлении и получим 12 чисел (см. таблицу 2).

Обратим внимание на поразрядную симметрию: в каждом троичном разряде поровну цифр 0, 1 и $\bar{1}$ (по 4 цифры).

Этот поразрядно уравновешенный набор из 12 чисел обозначим $D_{12} = \{+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +11, -8, -9, -10, -12\}$. Он будет использован при решении одной из приводимых ниже задач.

Посмотрим, как в троичной уравновешенной системе выглядят основные арифметические операции сложения и умножения.

Таблица сложения в рассматриваемой системе имеет вид

$\bar{1} + \bar{1} = \bar{1}1$	$\bar{1} + 0 = \bar{1}$	$\bar{1} + 1 = 0$
$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 1\bar{1}$

Суммы $\bar{1} + \bar{1}$ и $1 + 1$ образуются переносом соответствующей цифры в следующий разряд и добавлением цифры противоположного знака, а остальные суммы получаются еще проще.

Таблица умножения совсем проста:

$\bar{1}\cdot\bar{1}=1$	$\bar{1}\cdot 0=0$	$\bar{1}\cdot 1=\bar{1}$
$0\cdot 0=0$	$0\cdot 1=0$	$1\cdot 1=1$

Приведем пример умножения «столбиком» (умножаем 39 на 2 в троичной уравновешенной системе):

$$
\begin{array}{r}
\times\, 1\,1\,1\,0 \\
1\,\bar{1} \\
\hline
\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1} \\
1\,1\,1 \\
\hline
1\,0\,0\,\bar{1}\,0
\end{array}
$$

Положительное целое число можно перевести из обычной десятичной формы записи в уравновешенную троичную слегка измененным обычным алгоритмом последовательного деления с остатком [2]. Изменение заключается в том, что деление на 3 с остатком иногда заменяется делением на 3 «с избытком». А именно: данное число a делят на 3 по правилу деления с остатком. Если остаток 0 или 1, запоминают его, а если остаток 2, то вместо него запоминают остаток, равный $\bar{1}$, и в качестве частного принимают $\frac{a+1}{3}$. По этому правилу полученное частное снова делят на 3 и т. д., пока частное не станет равно 1. Записывают это частное, а за ним остатки от деления в обратном порядке.

Например, для числа 15 получается последовательность остатков 0, $\bar{1}$, $\bar{1}$ и последнее частное 1 (см. рисунок 2). Это дает представление $15=(1\,\bar{1}\,\bar{1}\,0)_{\bar{3}}$.

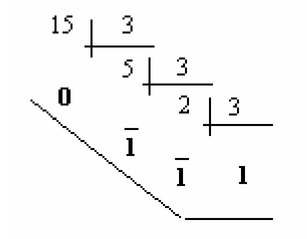


Рисунок 2.

НА РАЗНЫХ ЧАШАХ ВЕСОВ

Рассмотрим две задачи о взвешивании, изящно решаемые с помощью симметричного троичного представления чисел.

I. Задача о выборе системы гирь для взвешивания на рычажных весах.

Эта задача, кратко называемая «задачей о гирях» и предложенная в XIII веке итальянским математиком Леонардо Пизанским (Фибоначчи), формулируется так:

Какой минимальный набор гирь, по одной гире каждого веса, позволяет взвесить на двухчашевых весах всевозможные грузы в 1 кг, 2 кг и т. д. до N кг?

Решение этой задачи известно в двух вариантах:

1) груз находится на одной чаше весов, а все гири должны помещаться на другую;

2) гири разрешается помещать на обе чаши весов, то есть и на ту, где находится груз.

В [3] приведены решения для обоих вариантов, опирающиеся на запись чисел в двоичной и троичной системах счисления, соответственно. Нам представляется интересным показать, как красиво выглядит решение, если прибегнуть к уравновешенной троичной системе. Более того, можно сказать, что эта задача естественно порождает такую систему счисления.

Поместим груз, скажем, на левую чашу весов. Расположение гирь будем отмечать записями из цифр 0, 1 и $\bar{1}$. В этой записи $\bar{1}$ будет означать, что гиря кладется на левую чашу, 1 — что на правую, а 0 — что данная гиря на весы не кладется. Позиция цифры $\bar{1}$ или 1 будет определять вес гири: k-я позиция (при отсчете справа налево) соответствует гире весом 3^{k-1} кг.

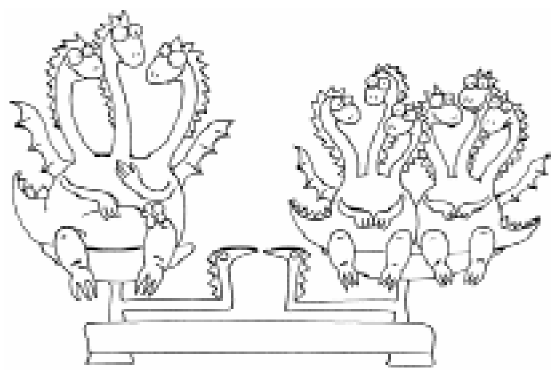


Таблица 3.

число взвешиваний n	2	3	4	5	6
число монет m_n	3	12	39	120	363
$(m_n)_{\bar{3}}$	10	110	1110	11110	111110

Набор гирь, таким образом, состоит из гирь весом 1, 3, 9, 27 и так далее килограммов, а количество используемых гирь зависит от N.

Например, запись $1\bar{1}\bar{1}0$ будет означать, что на правую чашу весов кладется гиря в 27 кг, а на левую гири в 9 и 3 кг. Гиря в 1 кг на весы не кладется. Таким образом, взвешен груз в 15 кг, что естественно, так как (см.выше) $15 = (1\bar{1}\bar{1}0)_{\bar{3}}$.

27 кг	9 кг	3 кг	1 кг
1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0

В уравновешенной троичной системе можно записать любое натуральное число и немедленно получить расположение гирь для груза соответствующего веса. Самый большой вес будет, как мы уже видели, равен $Q(n) = \dfrac{3^n - 1}{2}$, то есть $Q(1) = 1$, $Q(2) = 4$, $Q(3) = 13$, $Q(4) = 40$, $Q(5) = 121$, $Q(6) = 364$ и так далее.

Итак, для взвешивания грузов, например, от 1 до 300 кг достаточно 6 гирь весом в 1, 3, 9, 27, 81, 243 кг, а пяти гирь не хватит, так как $Q(5) < 300 < Q(6)$. Размещение гирь для веса q производится согласно троичному представлению числа q.

II. Задача об обнаружении фальшивой монеты.

Имеется N одинаковых с виду монет. Одна из них фальшивая, что можно определить по весу: она легче или тяжелее других. Требуется взвешиванием на двухчашевых весах (без гирь) выявить за минимальное число взвешиваний, какая из монет фальшивая и будет ли она легче или тяжелее остальных?

Эта задача известна в литературе как задача о 12 монетах. Названа она так потому, что, как мы увидим ниже, решается за 3 взвешивания, если монет 12 или меньше, и вообще за n взвешиваний, если число монет $N \le \dfrac{3^n - 3}{2}$. Чем больше N, тем сильнее впечатляет приведенный результат: достаточно, например, всего пяти взвешиваний, чтобы обнаружить фальшивую монету среди набора в 120 монет.

Обозначим $m_n = \dfrac{3^n - 3}{2}$ и взглянем на этот результат в свете троичной уравновешенной системы. Имеем следующее соответствие (таблица 3).

Из нижней строки таблицы видно: число m_n есть наибольшее из чисел, которые можно записать с помощью n разрядов троичной уравновешенной системы, если потребовать дополнительно, чтобы не все цифры в записи были одинаковыми.

Метод решения задачи II, использующий троичную нумерацию монет, назовем методом Дайсона, следуя [4].

Покажем, как работает этот метод при $N = 12$ (классический случай).

Припишем каждой из 12-ти монет номер, снабженный знаком и взятый из поразрядно уравновешенного набора $D_{12} = \{+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, -8, -9, -10, +11, -12\} = \{001, 01\bar{1}, 010, 011, 1\bar{1}\bar{1}, 1\bar{1}\bar{1}, 1\bar{1}0, 1\bar{1}1, \bar{1}01, \bar{1}00, \bar{1}0\bar{1}, 11\bar{1}, \bar{1}\bar{1}0\}_{\bar{3}}$.

Порядок взвешивания определяется троичными номерами монет. При i-м взвешивании ($i = 1, 2, 3$) на одну чашу весов (назовем ее чаша $\bar{1}$) кладутся монеты, номера которых имеют i-ю цифру $\bar{1}$, на пра-

вую, которую назовем чашей 1, – номера с i-й цифрой 1. Обратим внимание, что каждое из взвешиваний проводится независимо от результатов предыдущих.

Результат каждого взвешивания обозначим троичной цифрой $\alpha_i = \bar{1}$, если перевесила чаша $\bar{1}$, $\alpha_i = 1$, если перевесила чаша 1, и $\alpha_i = 0$, если весы остались в равновесии.

Цифры α_i, записанные в порядке взвешиваний, образуют троичное число

$$a = \alpha_1 \cdot 3^{n-1} + \alpha_2 \cdot 3^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot 3^1 + \alpha_n.$$

Число a – либо номер какой-то монеты, либо его инверсия (тогда номер будет $-a$). Эта монета фальшивая. Если ее номер a, то она тяжелее других, а если номер $-a$, то эта монета легче других .

Этот вывод сделан из следующих соображений.

- Результат $\alpha_i = 0$ говорит о том, что при i-м взвешивании фальшивой монеты на весах не было. В этом случае 0 – i-я цифра в номере монеты.
- Если фальшивая монета была тяжелее других, то результат $\alpha_i = 1$ говорит о том, что при i-м взвешивании она была на чаше 1, результат $\alpha_i = \bar{1}$ – о том, что при i-м взвешивании она была на чаше $\bar{1}$. Цифра α_i – i-я цифра в номере монеты.
- Если фальшивая монета была легче других, то результат $\alpha_i = 1$ говорит о том, что при i-м взвешивании она была на чаше $\bar{1}$, результат $\alpha_i = \bar{1}$ – о том, что при i-м взвешивании она была на чаше 1. Цифра α_i – инверсия i-й цифры в номере монеты.

Приведем пример, как за 3 взвешивания определить фальшивую монету среди 12-ти монет, которые пронумеруем числами из набора D_{12}.

1-е взвешивание: на чаше $\bar{1}$ монеты –8, –9, –10, –12, на чаше 1 монеты 5, 6, 7, 11.

2-е взвешивание: на чаше $\bar{1}$ монеты 5, 6, 7, –12, на чаше 1 монеты 2, 3, 4, 11.

3-е взвешивание: на чаше $\bar{1}$ монеты 2, 5, –10, 11 на чаше 1 монеты 1, 4, 7, 8.

а) Допустим, получилось, что в первый раз тяжелее чаша $\bar{1}$, во второй чаша 1, в третий наборы монет равны по весу.

Результат $\bar{1}\,1\,0$ дает число $(\bar{1}\,1\,0)_3 = -6$ и показывает, что фальшивой является монета с номером 6 и что эта монета легче других.

b) Допустим, получилось, что в первый раз тяжелее чаша 1, во второй и в третий наборы монет равны по весу.

Результат 1 0 0 дает число $(1\,0\,0)_3 = 9$ и показывает, что фальшивой является монета с номером –9 и что эта монета легче других.

НЕ ТОЛЬКО «ДА» И «НЕТ»

О троичной логике слышали многие. Это частный случай конечнозначной логики. Мы лишь слегка коснемся этой обширной темы, рассмотрев известные задачи о задуманном числе [5].

Некто задумал число от 1 до N. Вы должны отгадать это число, задав наименьшее количество вопросов, на которые задумавший обязан правдиво отвечать

1) «да» или «нет»;

2) «да», «нет» или «не знаю».

Решение первой задачи сводится к записи числа в двоичной системе счисления. Число вопросов зависит от N и для $N \le 2^m$ не превышает m. Например, для $N = 100 < 128 < 2^7$ достаточно семи вопросов, первым из которых может быть вопрос «Будет ли задуманное число больше 40?» Дальнейшие вопросы зависят от ранее полученных ответов и каждый раз делят область отгадывания пополам или почти пополам. Шести вопросов не хватит, так как $100 > 64 = 2^6$.

Можно построить схему вопросов и иначе. Двоичная запись числа $0 \le N < 2^m$ содержит не более m цифр. Дополнив, если нужно, эту запись нулями слева, получаем ровно m цифр, каждую из которых можно отгадать за 1 вопрос «Является ли эта цифра единицей?». Так как 0 не задумывается, то при $N = 2^m$ в двоичный код можно переводить $N-1$, чтобы и в этом случае хватило m вопросов, надо только не забыть прибавить 1 к ответу. Придется еще предоставить задумавшему табличку двоичных представлений всех чисел от 1 до N.

Нас больше интересует вторая задача, связанная с троичной системой счисления. При $N = 3$ ее можно решить за один вопрос, например, такой: «Если я задумал число, отличающееся от твоего, то будет ли оно меньше, чем твое?» Ответ «да» будет означать, что задумано число 3, ответ «нет» – что задумано число 1, а ответ «не знаю» соответствует числу 2.

В таком случае мы можем ожидать, что за один вопрос отгадывается один разряд троичного представления числа и что за m вопросов мы можем отгадать число из диапазона от 1 до 3^m (включая 3^m, если не забыть сделанное выше замечание и переводить в этом случае в троичный код не N, а $N-1$). Отрицательные числа не задумываются, так что уравновешенная система здесь не нужна. Число будет записываться в стандартной троичной системе с набором цифр {0, 1, 2}. Будут использоваться все m разрядов, слева при необходимости будут добавлены нули. Вопрос может звучать примерно так: «Если я задумал число, i-я цифра которого отличается от i-й цифры твоего числа, то будет ли она меньше, чем у тебя?» При ответе «да» записываем цифру 2, при ответе «нет» – цифру 0, при ответе «не знаю» – цифру 1.

Если, например, $N = 200$, то $m = 5$, так как $3^4 < 200 < 3^5$. Если на 5 вопросов получена последовательность ответов «не знаю», «да», «не знаю», «нет», «да», то задумано число $(12102)_3 = 146$.

Более естественной выглядит система вопросов, не так явно прибегающая к троичной системе. Ее можно связать с делением диапазона поиска на три части. Формулировки вопросов предоставляются читателю.

Литература

1. *Малиновский Б.Н.* История вычислительной техники в лицах. Киев: Фирма КИТ, ПТОО «АСК», 1995.

2. *Шауцукова Л.З.* Основы информатики в вопросах и ответах. Учебное пособие. Нальчик: Издательский центр «ЭЛЬ-ФА», 1994.

3. *Романовский И.В., Черкасова П.Г.* Наборы из нулей и единиц: Заочная школа современного программирования. Занятие 2: Учебное пособие. СПб.: Изд-во ЦПО «Информатизация образования», 1999.

4. *Шестопал Г.* Как обнаружить фальшивую монету. «Квант», № 10, 1979.

5. *Алфутова Н.Б., Устинов А.В.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002.

Агафонова Ирина Витальевна,
доцент кафедры математики Санкт-Петербургского Морского Технического университета,

Дмитриева Оксана Михайловна,
доцент кафедры математики Санкт-Петербургского государственного университета Телекоммуникаций.