Храбров Александр Игоревич

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ

$$\begin{array}{l|l} 1.00000 & 3 \\ \underline{\;9\;} & 0.3333\ldots \\ \;\;10 & \\ \;\;\underline{\;9\;} & \\ \;\;\;10 & \\ \;\;\;\underline{\;9\;} & \\ \;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\underline{\;9\;} & \\ \;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\underline{\;9\;} & \\ \;\;\;\;\;\;1 & \end{array}$$

С периодическими дробями школьники впервые встречаются достаточно рано. Почти каждый, научившись делить в столбик, делал маленькое открытие: если поделить единицу на тройку, то в частном будут последовательно возникать все новые и новые тройки и этот процесс никогда не закончится. Многим это удавалось как-нибудь для себя объяснить. Кто-то двигался дальше и делил единицу на шестерку и обнаруживал, что повторение начинается только со второй цифры. Вопросы, связанные с периодическими дробями даже входят в школьную программу, но на их обсуждение у учителей обычно не хватает ни времени, ни учебного материала. Надеюсь, что эта статья поможет лучше познакомиться с периодическими дробями и вообще с понятием периодичности. В ней мы расскажем о том, почему возникают периодические дроби, о свойствах, которыми они обладают, и об алгоритмах, помогающих научить машину работать с ними. Все приводимые программы записаны на Паскале с использованием лишь самых простых конструкций. С одной стороны, это позволяет использовать их просто как записи алгоритмов, с другой стороны, если их набрать на компьютере, добавив стандартное описание переменных, то можно будет сразу посмотреть на них в действии. В дальнейшем изложении нам понадобятся некоторые сведения из элементарной теории чисел. Приведем их кратко, без доказательств. Все подробности читатель может узнать из замечательной книжки И.М. Виноградова «Основы теории чисел».

...если поделить единицу на тройку...

Определение. Если разность целых чисел a и b делится на натуральное число m, то числа a и b называются *сравнимыми* по модулю m. Это записывается следующим образом: $a \equiv b \pmod{m}$.

Определение. *Функцией Эйлера* $\varphi(n)$ называется количество чисел из множества $0, 1, 2, \ldots, n-1$, взаимно простых с n.

Теорема Эйлера. Если $m > 1$ и числа a и m взаимно просты, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Теорема Ферма. Если p — простое число и a не делится на p, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Определение. Число n называется показателем, к которому принадлежит a по модулю m, если n является наименьшим натуральным числом, для которого имеет место сравнение

$$a^{n} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Легко показать, что показатель числа a всегда является делителем $\varphi(m)$.

ПОЧЕМУ ВОЗНИКАЮТ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Возьмем несократимую обыкновенную дробь $\frac{a}{b}$, у которой знаменатель не делится ни на 2, ни на 5, а числитель меньше знаменателя. Поделим в столбик числитель на знаменатель, то есть последовательно произведем действия

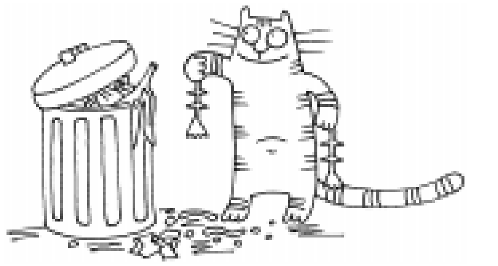
$$10a = bq_1 + r_1$$
$$10r_1 = bq_2 + r_2$$
$$\dots$$
$$10r_{n-1} = bq_n + r_n,$$

где r_k, это остатки от деления чисел на b, то есть числа, удовлетворяющие условию $0 \le r_k < b$. Далее, поскольку $a < b$ и $r_k < b$, то все q_k будут меньше 10 и, следовательно, являются цифрами частного от деления a на b.

Предположим, что числа r_n и b имеют общий делитель d. Заметим, что $d \ne 2$, $d \ne 5$, поскольку b не делится ни на 2 ни на 5. Тогда из равенства $10r_{n-1} = bq_n + r_n$ следует, что r_{n-1} делится на d, из равенства $10r_{n-2} = bq_{n-1} + r_{n-1} - r_{n-2}$ следует, что делится на d. Продолжая этот процесс дальше, получим, что и a делится на d, откуда $d = 1$. Таким образом, мы получили, что все остатки r_n взаимно просты с b, поэтому число различных остатков r_n не превосходит $\varphi(b)$.

Отсюда мы можем заключить, что в бесконечной последовательности остатков r_n обязательно найдутся два равных, причем остатки начнут повторяться не позже чем через $\varphi(b)$ шагов. А исходя из формулы $10r_{k-1} = bq_k + r_k$, можно заключить, что ровно с этого же момента начнут повторяться и цифры q_k в десятичном разложении дроби $\frac{a}{b}$.

Выясним теперь чему равна длина периода. Для этого рассмотрим остатки, получающиеся при последовательном делении чисел $10a$, 10^2a, 10^3a, ..., 10^na на b. Несложно показать, что они равны r_1, r_2,



...в бесконечной последовательности остатков обязательно найдутся два равных.

r_3, ..., r_n. Когда в этой последовательности впервые получится остаток a, показатель n будет равен длине периода, а дальнейшие остатки будут повторяться:

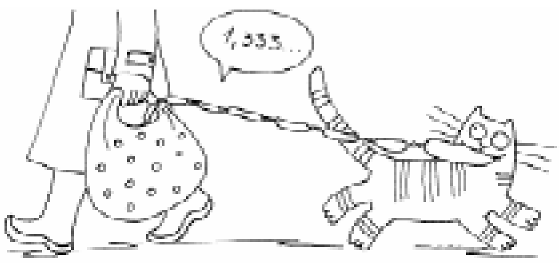
$$r_n = a,\ r_{n+1} = r_1,\ r_{n+2} = r_2,$$

и получившаяся десятичная дробь $0,q_1q_2q_{3\dots}q_n\,q_1q_2q_3\dots q_n$ будет периодической. Таким образом, число цифр в периоде дроби $\frac{a}{b}$ будет равна наименьшему показателю m, для которого $10^ma - a$ делится на b. Поскольку мы рассматриваем только несократимые дроби, то и число $10m - 1$ делится на b. Отсюда заключаем, что длина периода равна показателю, к которому принадлежит 10 по модулю b.

Итак, нами доказана

Теорема. Любая обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$, знаменатель которой не делится ни на 2 ни на 5, будет давать периодическую десятичную дробь. Длина периода этой дроби равна показателю, к которому принадлежит 10 по модулю b.

Эта теорема позволяет находить длины периодов дробей, знаменатель которых взаимно прост с 10.



...длины периодов дробей...

Упражнение 1. Напишите программу, вычисляющую длину периода дроби со знаменателем b. Обратите внимание на то, что вычисляемый показатель n может быть достаточно большим для прямого вычисления 10^n. Например, у дроби 1/19 длина периода составляет 18 цифр.

Решение:

```
k:=1;
r:=10;
while r <> 1 do
 begin
  r:=(10*r) mod b;
  k:=k+1;
 end;
write (k);
```

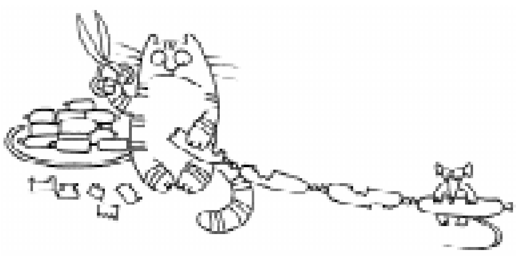
Упражнение 2. Напишите программу, последовательно выводящую на экран десятичные знаки дроби $\frac{a}{b}$.

Решение:

```
write ("0,");
l:=0;
r:=1;
while l <> k do
 begin
  write ((10*r) div b);
  r:=(10*r) mod b;
  l:=l+1;
 end;
```

Упражнение 3. Как нужно изменить алгоритмы из упражнений 1–2, если дроби считаются в системе счисления с основанием q?

Предположим теперь, что знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ произволен. Тогда b можно представить в виде $2^x \cdot 5^y \cdot B$. Обозначим наибольшее из чисел x и y через z и рассмотрим несократимую дробь



...длина предпериода равна наибольшему из чисел x и y.

$$\frac{10^z \cdot a}{b} = \frac{2^{z-x} \cdot 5^{z-y} \cdot a}{B} = \frac{A}{B},$$

знаменатель которой взаимно прост с 10. Тогда дробь $\frac{10^z \cdot a}{b} = \frac{A}{B}$ даст периодическую десятичную дробь

$$k_1\, k_2 \ldots k_z\, ,\, q_1\, q_2 \ldots q_n\, q_1\, q_2 \ldots q_n \ldots,$$

длина периода которой равна показателю, к которому принадлежит 10 по модулю B. При обращении дроби в десятичную получится

$$0\, ,\, k_1\, k_2 \ldots k_z\, q_1\, q_2 \ldots q_n\, q_1\, q_2 \ldots q_n\, ,$$

Таким образом, нами доказана

Теорема. Любая обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$, знаменатель которой имеет вид $2^x \cdot 5^y \cdot B$, будет давать периодическую десятичную дробь. Длина периода этой дроби равна показателю, к которому принадлежит 10 по модулю B, а длина предпериода равна наибольшему из чисел x и y.

Таким образом, для нахождения длины периода и предпериода произвольной несократимой дроби можно сначала выделить из ее знаменателя степени двойки и пятерки, (таким образом найти число B) и, согласно упражнению 1, вычислить показатель, к которому принадлежит 10 по модулю B.

Упражнение 4. Напишите программу, вычисляющую длины периода и предпериода согласно этой схеме.

Решение:

```
{Выделение из знаменателя дроби}
{наибольшей степени двойки }
s:=b mod 2;
l:=0;
while s = 0 do
 begin
  b:=b div 2;
  s:=b mod 2;
  l:=l+1;
 end;
{Выделение из знаменателя дроби}
{наибольшей степени пятерки}
s:=b mod 5;
l1:=0;
while s = 0 do
```

```
 begin
  b:=b div 5;
  s:=b mod 5;
  l1:=l1+1;
 end;
{Вычисление длины периода дроби}
{с новым знаменателем}
k:=1;
r:=10;
while r <> 1 do
 begin
  r:=(10*r) mod b;
  k:=k+1;
 end;
writeln (k); {Длина периода данной}
             {дроби}
if l1 > l
 then writeln (l1)
 else writeln (l); {Наибольшее из}
      {чисел l и l1 s длина}
      {предпериода данной дроби}
```

Однако получившаяся программа оказалась весьма большой. Попробуем придумать другой способ для нахождения длины периода в десятичной записи обыкновенной дроби. Для этого забудем про то, что он равен показателю 10 по модулю b и вспомним другие его свойства. Мы установили, что повторение остатков r_k влечет за собой повторение цифр в десятичном представлении обыкновенной дроби. Также мы выяснили, что в последовательности остатков все периодически повторяющиеся члены различны. Поэтому достаточно найти такое k, что $r_{n+k} = r_k$, где n – произвольное число, большее длины предпериода. Легко показать, что длина предпериода не может быть больше знаменателя (можно даже доказать, что она не превосходит $n = \log_2 b = \ln b / \ln 2$).

Программа, выполняющая требуемые действия, написанная на Паскале, будет выглядеть так:

```
r:=a;
for l:=0 to round (ln(b)/ln(2)) do
    r:=(10*r) mod b;
q:=r;
{ q – n-тый член последовательности}
{остатков, где n = log₂ b}
r:=(10*r) mod b;
k:=1;
{ r – (n+k)-тый член}
{последовательности остатков}
```

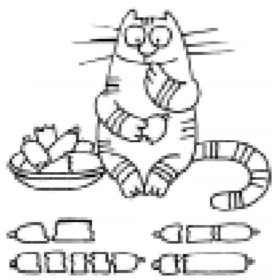

```
while r <> q do
 begin
  r:=(10*r) mod b;
  k:=k+1;
 end;
write (k);
```

ТЕОРЕМА О ПЕРИОДИЧНОСТИ И АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ДЛИНЫ ПЕРИОДА

Теорема. Предположим, что M – множество из конечного числа элементов, а f – функция из M в M. Тогда при всех x из M последовательность элементов x, $f(x)$, $f(f(x)), f(f(f(x)))$, начиная с некоторого момента, станет периодичной. Кроме того, если при различных x и y элементы $f(x)$ и $f(y)$ также различны, то период начинается с первого члена.

Давайте докажем это утверждение. Для краткости обозначим $x_0 = x$, $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(f(x))$ и т. д., n-ый член последовательности будет определяться по формуле $x_n = f(x_{n-1})$. Заметим, что совпадение членов последовательности вызывает совпадение и следующих за ними, а значит, и всех последующих. Таким образом, достаточно показать, что когда-нибудь очередной член последовательности станет равным одному из предыдущих. Но иначе и быть не может, поскольку различных членов последовательности может быть только конечное число, а сама последовательность бесконечна. Здесь мы воспользовались принципом Дирихле. Заодно мы доказали, что последовательность начнет повторяться не позже члена, номер которого равен числу элементов множества M.

Предположим, что при различных x и y элементы $f(x)$ и $f(y)$ различны, но за-



Рассмотрим пары последовательных остатков...

цикливание началось с члена x_k, где $k > 1$, иными словами, $x_k = x_{k+n}$, но $x_{k-1} \neq x_{k+n-1}$. Тогда если взять различные элементы $x = x_{k-1}$ и $y = x_{k+n-1}$, то получим, что элементы $f(x) = x_k$ и $f(y) = x_{k+n}$ также различны. Противоречие. Теорема о периодичности полностью доказана.

Обычно при использовании теоремы о периодичности для некоторой последовательности x_k в качестве множества M приходится использовать не множество возможных значений последовательности x_k, а некоторое большее вспомогательное множество. Например, множество остатков при доказательстве периодичности десятичных дробей или пар остатков как в упражнении 6.

Упражнение 5. Выведите из теоремы о периодичности периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби.

Упражнение 6. Докажите, что последовательность остатков от деления чисел Фибоначчи на натуральное число n периодична и длина ее периода не превосходит n^2. Напишите программу, вычисляющую длину периода. Напомним, что числа Фибоначчи определяются, исходя из формул: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Решение: Рассмотрим пары (u_n, u_{n+1}) последовательных остатков от деления чисел Фибоначчи на n и функцию f, заданную на множестве всех пар чисел от 1 до $n-1$ и определяемую формулой $f(u, v) = (v, w)$, где число w равно остатку от деления суммы $u + v$ на n. Тогда $(u_n, u_{n+1}) = f(u_{n-1}, u_n)$. По теореме о периодичности мы заключаем, что, начиная с некоторого момента, пары чисел (u_n, u_{n+1}) начнут повторяться, причем последовательность будет чисто периодической.

```
q:=1;
p:=2;
k:=1;
while (p <> 1) or (q <> 1) do
 {Пара p, q s n-тый член}
 {последовательности пар остатков}
 begin
  r:=p;
  p:=(q+r) mod n;
  q:=r;
  {Вычисление новой пары остатков p,q}
  k:=k+1;
 end;
write (k);
```

Предположим, что множество M из теоремы о периодичности является подмножеством множества целых чисел. Построим алгоритм для определения длины периода в последовательности чисел x_n. Для этого заметим, что все числа из периода и предпериода последовательности различны. Поэтому, если мы найдем в последовательности равные числа, то расстояние между ними будет кратно периоду. Будем последовательно вычислять пары чисел x_k и x_{2k} исходя из формул $x_{k+1} = f(x_k)$ и $x_{2k+2} = f(f(x_{2k}))$. Когда окажется $x_k = x_{2k}$, число k будет кратно периоду. (Приведите пример функции, для которой найденное число k не будет равно периоду). Далее, последовательно вычисляя числа x_{k+1}, x_{k+2}, найдем наименьшее m, для которого $x_k = x_{k+1}$, оно и будет длиной периода последовательности x_k.

```
k := 1;
p := f(a);
q := f(f(a));
{ p = xk; q =x2k }
while p <> q do
 begin
  p := f(p);
  q := f(f(q));
  k := k+1;
 end;
{Мы нашли k, такое, что p = xk = x2k,}
{поэтому xk входит в периодическую}
{часть и длина периода не больше k}
m := 1;
q := f(p);
while p <> q do
 begin
  q := f(q);
  {q = xk+m}
```

```
  m:=m+1;
 end;
{Мы нашли наибольшее m, такое, что}
{числа x_k, x_k+1, …, x_k+m-1 различны,}
{поэтому период равен m }
```

Упражнение 7. Приведите пример функции f, позволяющей вычислять при помощи описанного алгоритма длину периода дроби $\frac{a}{b}$.

Решение: Например, подходит функция f, переводящая число x в остаток от деления числа $10x$ на b.

Упражнение 8. Обозначим через $f(n)$ сумму k-тых степеней цифр числа n.

а) Докажите, что для любого натурального числа n бесконечная последовательность $n, f(n), f(f(n)), f(f(f(n)))$... периодична.

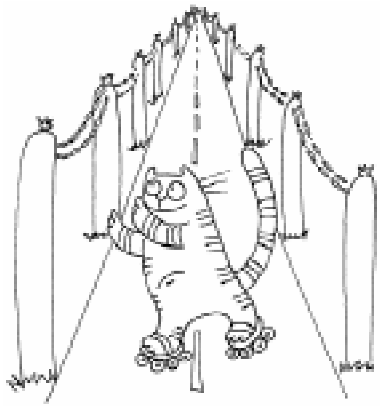
б) Докажите, что у этой последовательности может быть сколь угодно длинный предпериод.

в) Напишите программу, при фиксированных k и n вычисляющую длину периода данной последовательности.

Подсказка. Покажите, что для любого k найдется такое m, что сумма k-тых степеней цифр любого m-значного числа будет состоять из не более чем m знаков.

Упражнение 9. Докажите, что остатки от деления чисел n^n на простое число p образуют чисто периодическую последовательность. Напишите программу, вычисляющую длину периода этой последовательности.

Подсказка. Из теоремы Ферма следует, что $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, откуда $n^n \equiv n^m \equiv k^m \pmod p$, где k – остаток от деления n на p, а m – остаток от деления n на $p-1$. Отсюда следует, что в качестве множества M из теоремы о периодичности можно взять множество пар (k, m), где k принимает значения от 1 до p, а m от 0 до $p-2$.



Приведите пример функции f, позволяющей вычислять при помощи описанного алгоритма длину периода дроби...

КВАДРАТИЧНЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Определение. Иррациональный корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами называется *квадратичной иррациональностью.* Иными словами квадратичная иррациональность – число, имеющее вид

$$\frac{p+\sqrt{D}}{q},$$

где числа p и q – целые, а D – натуральное число, не являющееся точным квадратом.

Определение. *Бесконечной цепной дробью* называется выражение вида

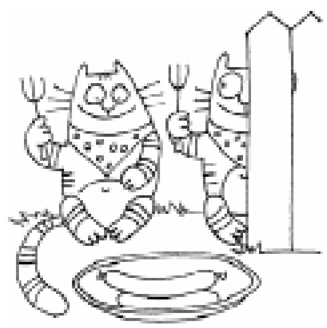
$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$$

где a_0 – целое число, а все остальные a_n – натуральные числа.

Теорема. Для любого иррационального числа x_0 существует разложение в бесконечную цепную дробь.

Мы не будем доказывать эту теорему, а лишь опишем алгоритм построения цепных дробей, отвечающих заданному числу x_0. Читатели, интересующиеся доказательством этой теоремы, могут обратиться к книге Хинчина «Цепные дроби» или к книге Бухштаба «Теория чисел».

Для простоты предположим, что $x_0 > 1$. Обозначим через a_0 целую часть x и возьмем $x_1 = \dfrac{1}{x_0 - a_0} > 1$. Поскольку x_0 иррационально, то x_1 также будет иррацио-



Бесконечной цепной дробью называется выражение вида...

нальным числом, большим 1. Положим $a_1 = [x_1]$* и $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1}$, тогда x_2 — иррациональное число, большее 1. Продолжим этот процесс далее, то есть выполним последовательно операции

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad a_0 = [\ x_0\ ];$$

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad a_1 = [\ x_1\ ];$$

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \qquad a_2 = [\ x_2\ ];$$

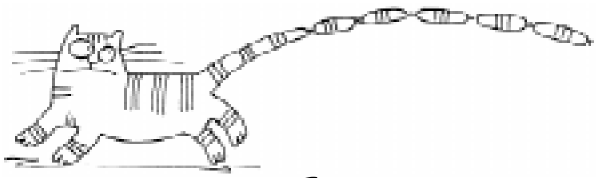
...

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \qquad a_n = [\ x_n\ ].$$

Если при помощи полученной последовательности натуральных чисел a_0, a_1, a_2, ... составить цепную дробь

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}, \qquad (1)$$

то она будет равна x_0.



Напишите программу, вычисляющую длину периода

Теорема Лагранжа. Всякая квадратичная иррациональность дает в разложении периодическую цепную дробь. И обратно, всякая периодическая цепная дробь является разложением некоторой квадратичной иррациональности.

Упражнение 10.** Выведите теорему Лагранжа из теоремы о периодичности.

Подсказка. Предположим, что x_0 является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Покажите, что числа x_k из алгоритма разложения являются корнями квадратных уравнений вида $A_k x^2 + B_k x + C_k = 0$, где все A_k и C_k не превосходят $2|a\,x_0| + |a| + |b|$ и удовлетворяют тождеству $B_k^2 - 4A_kC_k = b^2 - 4ac$. Откуда следует, что различных чисел в последовательности $\{x_k\}$ — конечное число.

Упражнение 11*. Напишите программу, вычисляющую длину периода и находящую сам этот период для цепной дроби, построенной для квадратичной иррациональности вида $\sqrt{D}$, где D — натуральное число, не являющееся точным квадратом.

Подсказка. Числа a_k и x_k, участвующие в алгоритме построения цепной дроби можно определить исходя из формул (докажите это!):

$$a_k = [x_k], \quad x_k = \frac{b_k + \sqrt{D}}{c_k},$$

где первые два члена последовательностей $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$ определяются по формулам $b_1 = a_0$, $b_2 = a_1c_1 - b_1$ и $c_1 = D - b_1^2$, $c_2 = 1 - a_1^2c_1 + 2a_1b_1$, а остальные удовлетворяют соотношениям $b_{n+1} = a_nc_n - b_n$ и $c_{n+1} = c_{n-1} - a_n^2c_n + 2\,a_nb_n$.

Вывод этих формул, разнообразные примеры разложений чисел в цепные дроби и нахождение этих разложений для чисел специального вида, а также множество интересных вопросов, близких к настоящей статье рассматривается в книге Вацлава Серпинского «Элементарная теория чисел» (Waclaw Sierpicski «Elementary

* Квадратные скобки, как обычно, обозначают целую часть числа.

theory of numbers»), к сожалению, не переведенной на русский язык.

Упражнение 12.** Напишите программу, вычисляющую длину периода цепной дроби, построенной для данной квадратичной иррациональности, заданной при помощи трех натуральных чисел p, q и D по формуле

$$\frac{p+\sqrt{D}}{q}.$$

Проверить правильность разложений квадратичных иррациональностей в цепную дробь уже не так просто, как правильность разложений рациональных чисел в десятичную дробь, поэтому приведем несколько таких разложений. Они могут пригодиться для проверки правильности работы программы.

$\sqrt{7}=(2;\overline{1,1,1,4})$ длина периода 4;

$\sqrt{41}=(6;\overline{2,2,12})$ длина периода 3;

$\sqrt{925}=(30;\overline{2,2,2,2,60})$ длина периода 5;

$\sqrt{2081}=(45;\overline{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,90})$ длина периода 11;

$\dfrac{1+\sqrt{13}}{4}=(1;\overline{1,6,1,1,1})$ длина периода 5;

Запись $x=(b_0;\overline{b_1,b_2,b_3,b_4,\ldots,b_n})$ соответствует цепной дроби (1), где числа a_m при $m > n$ определяются по периодичности, то есть $a_{k+tn} = a_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Храбров Александр Игоревич, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры анализа СПбГУ.