# КОМПЬЮТЕР ИЗ ТРЕХ ГИРЬ И МЫЛЬНОЙ ПЛЕНКИ ИЛИ КАК ФИЗИК РЕШАЕТ ЗАДАЧУ ШТЕЙНЕРА[1]

## 1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРИСПОСОБЛЕНИЙ

Простейший случай проблемы Штейнера можно сформулировать так: жители нескольких деревень хотят проложить дороги так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в любую другую, причем, общая длина дорог была бы минимальной.

Для решения задачи поступим так: положим на стол план местности и затем просверлим в столе отверстия в местах расположения деревень. Пропустим через эти отверстия три веревочки, верхние концы которых свяжем в один узел, а к нижним подвесим грузики массой по 1 кг (рисунок 1). Веревочки на столе займут положение с минимальной суммарной потенциальной энергией грузиков. Значит, общая длина веревочек под столом окажется максимально возможной, а веревочки на поверхности стола укажут искомое кратчайшее соединение данных трех точек. Остается только понять, почему узел при этом попадет в точку, из которой все стороны видны под углом в 120°[2]. Для этого достаточно заметить, что на узел действуют три одинаковые по величине силы (рисунок 2), а они могут уравновесить друг друга только в том случае, если все три угла, образованные ими, равны.

И в этом месте мы могли бы уже закончить рассуждение, если бы были уверены, что узел не попадет в отверстие. Но что это значит – узел попал в отверстие? Это означает, что сумма двух сил натяжения, направленных по сторонам треугольника (рисунок 3), не превышает 10 Н. А это возможно лишь в случае, когда угол, образованный этими силами, не менее 120°.

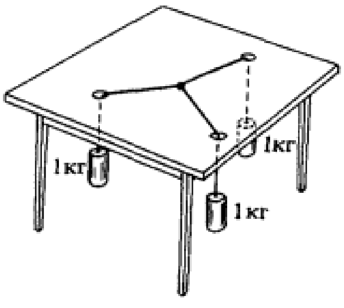



**Рисунок 1.**

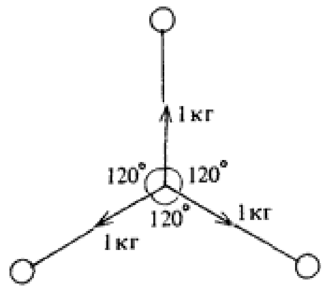



**Рисунок 2.**

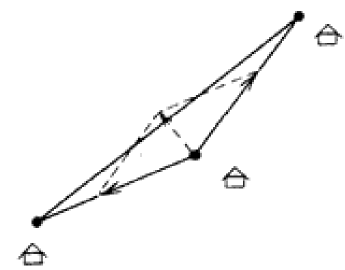


**Рисунок 3.**

[1] Материалы цитируются из следующих источников:
*Е. Абакумов, О. Ижболдин, Л. Курлядчик, Н. Нецветаев.* Кратчайшие сети // Квант, 1990, № 3.
*Р. Курант, Г. Роббинс.* Что такое математика? М.: Просвещение, 1967.

[2] Математическое доказательство этого утверждения приведено в первой статье настоящего журнала.

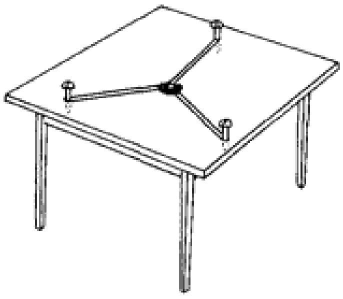
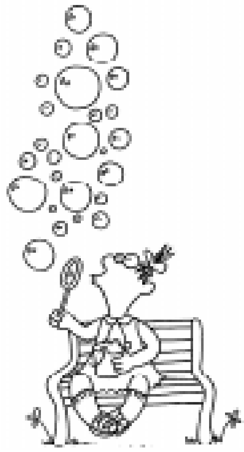


**Рисунок 4.**

Можно предложить другой способ построения кратчайшей сети дорог. Положим на стол план местности и затем вобьем три гвоздя в местах расположения деревень. После этого натянем резинку, используя маленькое колечко, так, как это показано на рисунке 4. При отсутствии сил трения резинка в натянутом состоянии займет такое положение, при котором ее длина будет минимальной, а это и даст нам кратчайшую сеть дорог.

## 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЫЛЬНОЙ ПЛЕНКИ



Если замкнутый контур, сделанный из проволоки, погрузить в жидкость со слабым поверхностным натяжением и затем вынуть оттуда, то увидим пленку, натянутую на контур в форме минимальной поверхности с наименьшей площадью. (Предполагается, что можно пренебречь силой тяжести и другими силами, препятствующими стремлению пленки достигнуть устойчивого равновесия: последнее же наступает в том случае, если площадь пленки оказывается наименьшей, так как потенциальная энергия, возникающая вследствие поверхностного натяжения, при этом условии минимальна.) Вот хороший рецепт для получения такой жидкости: растворите 10 г чистого сухого олеата натрия в 500 г дистиллированной воды и затем смешайте 15 кубических единиц раствора с 11 кубическими единицами глицерина. Пленки, получаемые из указанной смеси на каркасах из латунной проволоки, сравнительно устойчивы».

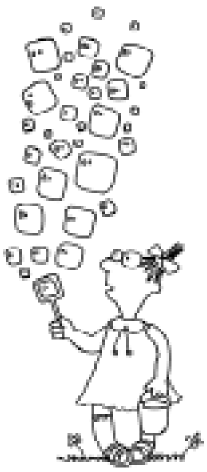
Описанная задача носит название проблемы Плато.

В простейшей формулировке содержание проблемы Плато таково: найти поверхность наименьшей площади, ограниченную данным замкнутым пространственным контуром.

С помощью пленок очень легко «решить» проблему Плато: достаточно придать проволочному каркасу нужную форму.

Опыты с пленкой не сводятся к демонстрации минимальной поверхности, натянутой на замкнутый контур (как у Плато); диапазон их гораздо шире.... проблема минимальных поверхностей была изучена не только для одного ограничивающего контура, но и для системы таких контуров; кроме того, было обращено внимание и на возможность образования минимальных поверхностей более сложной топологической структуры. Возникающие более общие проблемы порождают изумительное разнообразие геометрических явлений, которое может быть продемонстрировано с помощью мыльных пленок. Заметим в этой связи, что очень полезно проволочные каркасы делать гибкими и изучать изменение формы поверхности пленки под влиянием непрерывной деформации каркаса. Дадим описание некоторых опытов.

1. Если граничный контур представляет собой окружность, то получается поверхность в виде кругового диска. Можно было бы ожидать, что при непрерывной деформации контура минимальная поверхность всегда будет сохранять тот же топологический характер. Но это неверно. Если изогнуть контур так, как показано на рисунке 5, то вместо поверхности, полученной непрерывной деформацией диска, получим одностороннюю поверхность – Мёбиуса. Для осуществления непрерывной



деформации следует припаять к каркасу рукоятки (см. тот же рисунок).

2. Можно натянуть минимальную поверхность на систему контуров, состоящую из двух окружностей. Вынув каркас из раствора, мы получаем не одну поверхность, а структуру, состоящую из трех поверхностей, смыкающихся под углом в 120°; одна из них – обыкновенный круговой диск, плоскость которого параллельна плоскостям граничных окружностей (рисунок 6). Уничтожая этот диск, мы получим, далее, классический катеноид (поверхность, образуемую вращением цепной линии). При раздвигании граничных контуров наступает момент, когда двусвязный катеноид лопается и превращается в два отдельных диска.

3. Еще один замечательный пример доставляется каркасом, изображенным на рисунках 7–9: на этот каркас могут быть натянуты три различные минимальные поверхности.

4. Интересное явление – возникновение минимальных поверхностей, ограниченных двумя или большим числом взаимно зацепленных замкнутых контуров. В случае двух круговых контуров получается поверхность, изображенная на рисунке 10.

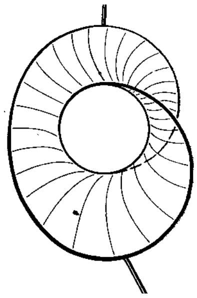


**Рисунок 5.**

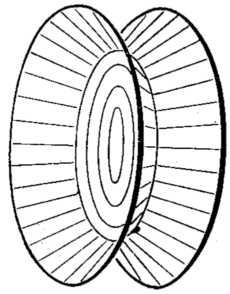


**Рисунок 6.**

### Как же использовать метод мыльных пленок для решения задачи Штейнера?

Благодаря действию поверхностного натяжения жидкая пленка только при том условии может находиться в состоянии устойчивого равновесия, если площадь образуемой поверхности минимальна. Это обстоятельство является неистощимым источником экспериментов серьезной математической ценности. Если некоторые части пленки могут свободно перемещаться по заданным поверхностям (например, плоскостям), то на этих частях границы пленка будет стоять перпендикулярно к заданной поверхности.

Мы можем использовать последнее отмеченное обстоятельство для наглядного решения проблемы Штейнера. Пусть две параллельно расположенные стеклянные поверхности (или гладкие плитки) соединены тремя или большим числом перпендикулярно стоящих стержней. Если погрузить всю такого рода систему в мыльный раствор, затем вынуть, то пленка образует между плоскими поверхнос-

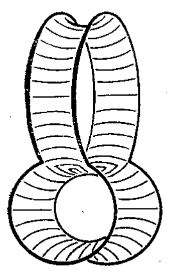


**Рисунок 7.**

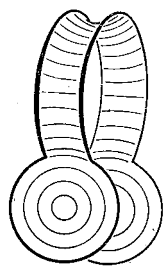


**Рисунок 8.**

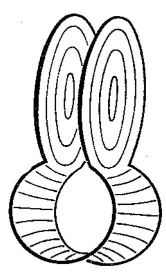


**Рисунок 9.**

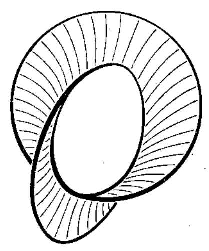


**Рисунок 10.**

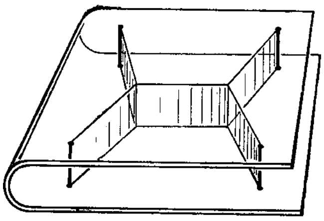


Рисунок 11.

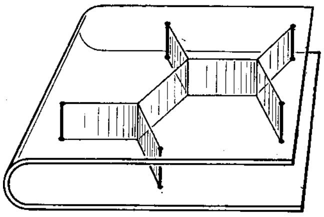


Рисунок 12.

тями ряд вертикальных полос, связывающих между собой эти стержни. Проекция этих полос на горизонтальные плоскости есть не что иное как решение проблемы Штейнера (рисунки 11, 12).

*Если Вас заинтересовали эксперименты с мыльными пленками, прочтите брошюру из серии «Математическое просвещение»: Вып. 6. А. Б. Сосинский. Мыльные пленки и случайные блуждания. Изд-во МЦНМО: Москва, 2000.*

***От редакции:***

*В предыдущем номере журнала «Компьютерные инструменты в образовании» напечатана статья «Разбор задач второй Всероссийской олимпиады по информатике ЗАТО».*

*По вине редакции допущена ошибка: автором статьи является Павел Маврин, студент 2 курса СПбГУ ИТМО, а не А. Станкевич, как указано в статье.*

*Редакция приносит извинения П. Маврину и А. Станкевичу.*