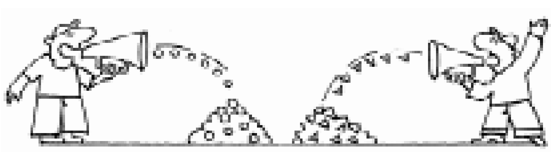
Иванов Сергей Георгиевич,
Мамаева Светлана Олеговна,
Поздняков Сергей Николаевич,
Степулёнок Денис Олегович,
Энтина Софья Борисовна

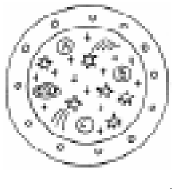
КОМПЬЮТЕРНАЯ ПОДДЕРЖКА ДИСТАНЦИОННОГО УЧЕБНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. КРИЗИС ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ



Дистанционное обучение математике, как и обучение другим предметам естественно-математического цикла, за последние 10 лет не получило сколько-нибудь значимого развития. Причина, на наш взгляд, заключается в том, что текстовые материалы, картинки, видео материалы, простейшие тесты, то есть практически все стандартные виды дидактической поддержки, встроенные в существующие системы дистанционного обучения, абсолютно неадекватны содержанию математики [1].

Традиционное обучение математике, как, впрочем, и другим предметам, происходит в условиях прямого общения преподавателя с учениками. Обратная связь позволяет в процессе обучения быстро изменить методику изложения нового материала, настроиться на данную аудиторию, а не на абстрактного ученика. Таким образом, эффективность очного обучения определяется глубокими традициями классического образования, развитыми формами взаимодействия и взаимовлияния участников образовательного процесса. По-другому эту мысль можно выразить так: у участников традиционного очного процесса обучения существует единый контекст. Благодаря этому богатому контексту, внешне несложные формы очного учебного взаимодействия преподавателя и ученика оказывают глубокое и планируемое влияние на процесс передачи знаний. В существующих же формах дистанционного обучения излишнее значение придается внешним носителям (тексты и гипертексты учебников, методические указания и пр.) и моделированию внешних форм очного обучения (видеозапись лекции или ее прямая трансляция) [2]. В то же время полностью игнорируется проблема конструирования форм для «материализации» общего контекста при дистанционных способах учебного общения. Невнимание к этой проблеме можно объяснить тем, что при успешном обучении наличие учебного контекста, как правило, плохо осознается его участниками.

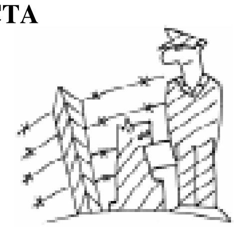


2. ОБЩЕЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Термин «информационное пространство» с развитием сети Интернет стал широко используемым и потерял понятийную нагрузку, которую имел в исследованиях по конструированию и использованию общего информационного пространства для организации совместной работы [3]. Общее информационное пространство может быть эффективным только для «практических сообществ» – групп людей, объединенных общей деятельностью и общими «неоглашаемыми» знаниями – контекстом.

Представление контекста является сложной проблемой. До последнего времени не рассматривалась проблема искусственного конструирования контекста. Эта проблема реально была осознана только в период развития сети Интернет и конструирования различных форм дистанционного общения.

3. ГРАНИЧНЫЕ ОБЪЕКТЫ – НОСИТЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КОНТЕКСТА



В работах по изучению общих информационных пространств рассматривается понятие «граничного объекта». Это носитель контекста. Граничный объект должен быть достаточно гибким, чтобы его можно было приспособить для выражения различных смыслов, и в то же время достаточно жестким, чтобы играть роль контекста.

Что же может играть роль такого контекста в дистанционном преподавании математики?

Понятно, что искомый граничный объект должен отражать существо самого предмета, то есть относиться к предметной области «математика» – этим и будет определена его «жесткость». В то же время он не должен фиксировать никаких педагогических или методических установок, чтобы отражать различные подходы к обучению, позволять «наращивать» на него, как на остов, педагогические, дидактические и методические аспекты процесса обучения.

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим одно быстро развивающееся направление в математических исследованиях – создание и использование компьютеризированного математического инструментария, моделирующего технический аппарат математики.

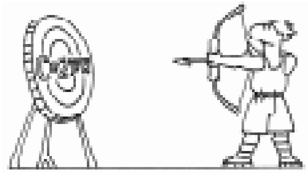
4. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА В МАТЕМАТИКЕ

Предшественницей компьютерной математики является вычислительная математика, точнее, вычислительные методы математики, которые обеспечили основу автоматизации приближенных вычислений. Однако при увеличении сложности задач, например, при расчетах движения частиц в ускорителях, потребовались символьные выкладки, аналогичные выводу самих формул. Такие системы были созданы и получили название систем для символьных вычислений или систем компьютерной алгебры. Эти системы позволяют в некоторых аспектах рассматривать математику как науку экспериментальную. С их помощью математик может исследовать области применимости различных математических моделей, строить примеры математических объектов с требуемыми свойствами. Такие системы, как Mathematica, Derive, Maple, прочно вошли в арсенал средств, которыми пользуется современный математик.

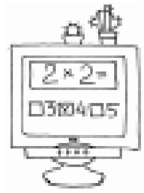
С развитием таких систем начались исследования по применению их в преподавании математики. И немедленно возникла проблема: эти системы решают автоматически многие школьные и вузовские задачи, подменяя умственный труд ученика простым нажатием нужной кнопки. Простое внедрение этих инструментов, не сопровождаемое изменением методов обучения и, в некоторой степени, его содержания, не только не поддерживает, но скорее разрушает систему обучения математике.

Одним из решений этой проблемы – целесообразного использования компьютерного математического инструментария – является использование манипуляторов. Манипуляторами мы называем инструментальные средства более узкого назначения, построенные специально для того, чтобы выделить сущность или структуру того иного понятия, либо того или иного метода.

5. МАНИПУЛЯТОРЫ – ГРАНИЧНЫЕ ОБЪЕКТЫ В ДИСТАНЦИОННОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ



Манипуляторы строятся на компьютерных инструментальных средствах и, по нашему мнению, могут играть роль граничных объектов – средств для представления математического контекста. Манипулятор создается не для научных математических исследований, а для учебных целей при изучении математики. Поэтому входящие в его состав инструменты ограничены целью, для которой манипулятор создается. Они позволяют автоматизировать действия, как правило, технического характера, которые не имеют отношения к изучаемой проблеме и в то же время оставляют свободу в выборе действий, которые объективно необходимы для овладения новым математическим понятием или методом. Например, изучение свойств тригонометрических функций естественно связать с манипулятором, позволяющим экспериментировать с поворотами точки на единичной окружности, изучение решений систем линейных уравнений – с манипулятором, позволяющим выполнять операции над строчками системы. Несмотря на то, что манипуляторы ориентированы на те или иные понятия или методы, они не содержат в себе конкретных заданий ученику. Они оставляют определенную свободу как ученику для самостоятельных экспериментов, так и учителю, который может использовать их в разных задачах, ставить различные учебные цели. Например, учитель может предложить лабораторную работу, жестко указав все действия, которые надо совершить для получения результата, или предложить исследовать некоторую проблему, в которой ученики сами выдвигают гипотезы и экспериментально подтверждают или опровергают их. Преподаватель на основе манипуляторов может реализовать различные методические и педагогические подходы. В то же время, манипуляторы своей структурой ограничивают свободу деятельности обучаемого ровно в той степени, в какой это необходимо для овладения понятиями, лежащими в основе манипулятора. Таким образом, управление познавательной свободой ученика позволяет реализовать и в определенной мере технологизировать продуктивное обучение математике [4].

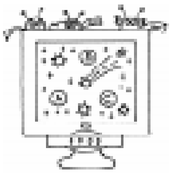


6. КОМПЬЮТЕР В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Изучение математики в школе, особенно в среднем звене, построено на изучении алгоритмов, которые полностью автоматизированы в современных компьютерных программах по математике. Например, программа UMS (Универсальный Математический Решатель) [5], позволяет продемонстрировать решение любой технической задачи школьного курса алгебры (упростить выражение, решить уравнение, доказать тождество). На такой подход к курсу математики толкает сама система оценки обученности математике, когда, вместо проверки готовности ученика к продолжению образования, владения общими приемами интеллектуальной деятельности (такими, как постановка задачи, организация поисков ее решения, анализ, обобщение, логические суждения), проверяется знание фиксированного набора стандартных технических приемов. Стремление унифицировать эту оценку в системе единого государственного экзамена еще больше усугубляет проблему.

В то же время остаются методически неосвоенными вопросы, связанные с существованием исчерпывающей (для школьного курса) инструментальной поддержки курса математики.

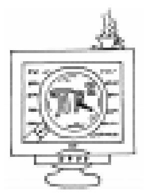
Таким образом, проблема использования компьютера в школьном курсе математики и проблема дистанционного обучения математике имеют много общего. В обоих случаях мы имеем дело с традициями обучения, обеспечивающими успешность учебного процесса, которые вступают в противоречие с новыми реалиями. Обратимся к анализу содержательных изменений среды обучения.



7. КОМПЬЮТЕР И ИНФОРМАЦИОННАЯ СРЕДА ОБУЧЕНИЯ

Контекст обучения в работе [6] называется средой обучения. Среда обучения включает в себя как формы обучения, так и способы представления предметных знаний. Компьютер позволяет использовать при построении среды обучения компьютерные инструменты. Отметим их влияние на построение среды обучения. При их использовании:

- Технические навыки более не рассматриваются как основная цель при конструировании среды обучения. Изучение более сложных понятий и теорий можно напрямую не привязывать к уровню владения техническими навыками. Роль навыков в методическом плане сводится в большей степени к пониманию того, как работают те или иные алгоритмы, а в педагогическом – к правильному отношению к организации умственного труда, в психологическом – к интериоризации (переводу во внутренний план) тех понятий, которые вызвали трудности у обучаемого.
- Большую роль, нежели раньше, может играть постановка математической задачи, создание плана ее решения, исследование свойств решения, построение аналогов и обобщений.
- Стало возможным введение в обучение задач, которые ранее отвергались из-за сложности математических идей, лежащих в их основе, а также продуктивных методик обучения, которые ранее отвергались из-за их нетехнологичности.



8. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ УЧЕБНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

Как использовать компьютерный инструментарий, чтобы поддержать интерес к содержательным математическим задачам, которые не сводятся к применению типовых формул, имеют различные вариации и обобщения, до сих пор иногда является предметом исследований профессиональных математиков?

Можно ли познакомить учеников с трудными математическими задачами в форме игры, конкурса, не требующего специальных математических знаний? Здесь компьютер может сыграть неоценимую роль. Даже сами математики говорят, что появление такого инструментария изменяет эмоциональную оценку занятий математикой. Один из них сказал: «Будучи студентом, я не захотел изучать теорию Галуа из-за того, что нельзя было привести ни одного примера, на котором можно было увидеть работу аппарата этой теории. Сейчас это легко было бы сделать, применив системы компьютерной алгебры, и, конечно, отношение к изучению этой теории было бы другим».

Рассмотрим класс математических задач, который позволяет реализовать возможности компьютерного инструментария для поддержки исследовательской деятельности при изучении математики. Эти задачи обладают следующими свойствами:

1. Для задач этого класса не известны непереборные алгоритмы.
2. Для этих задач легко ищется неоптимальное решение, но для нахождения оптимального решения нужны идеи, которые сродни интеллектуальным действиям людей, совершающих математические открытия.
3. Для этих задач можно сконструировать программный инструмент. Инструмент берет на себя выполнение технических операций, что позволяет ученику проводить эксперименты в процессе решения задачи. Кроме того, инструмент выполняет некоторые вспомогательные математические операции, выполнение которых решающие не смогли бы сделать сами. Инструменты, осуществляющие эти операции должны быть «прозрачными» для ученика и не оставлять у решающего впечатление «черного ящика», выполняющего за них умственную работу.
4. Эти задачи допускают обобщение. Решения некоторых из них в общем виде могут быть не известны до сих пор. Предоставляемый инструмент должен давать возможность не только решения задач, но и конструирования новых, близких в идейном отношении.

9. КОНКУРС КИО (Конструируй, Изобретай, Оптимизируй)

Этот конкурс был организован Центром «Информатизация образования» ИПО РАО и прошел в марте этого года.

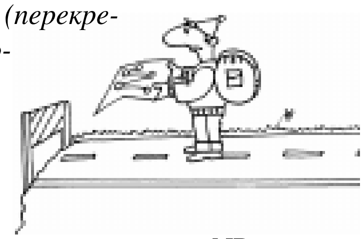
Всем участникам было предложено программное обеспечение для проведения компьютерных экспериментов с предложенными тремя моделями задач.

Задачи имели исследовательский характер, и в привычном смысле слова каждая задача имела множество решений, но нужно было постараться найти самое лучшее из них по указанному в задаче признаку. Таким образом**,** каждый участник конкурса мог предложить свое решение. Победители определялись по тому, насколько найденные ими решения лучше решений, присланных другими участниками.

Ниже описаны эти задачи.

Задача Штейнера.

На плоскости заданы N точек (пунктов). Требуется соединить их системой отрезков (дорог), введя, если надо, дополнительные точки (перекрестки) так, чтобы суммарная длина отрезков была наименьшей.



Известно, что эта задача NP-полная, то есть она равносильна по трудоемкости другим «трудным» задачам, таким, как задача коммивояжера.

Программа помогает быстро провести эксперимент: интерфейс построен так, что добавление и удаление точек и отрезков осуществляется максимально просто, а программа подсчитывает сумму длин отрезков.

В задаче Штейнера нетрудно провести рассуждения [7], которые обосновывают свойства локально оптимальных решений:

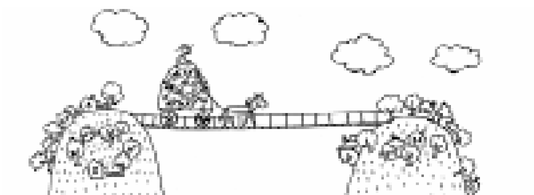
– в каждом перекрестке сходится ровно три дороги, образующие углы в 120°,

– количество перекрестков, по крайней мере, на два меньше количества исходных пунктов,

– если дорога проходит через один из исходных пунктов, то отрезки дорог образуют угол не меньше 120°.

Поэтому, если экспериментатор выбрал схему соединения, добавив перекрестки и соединив их с исходными пунктами должным образом, то далее, пользуясь этими правилами, можно «пошевелить» перекрестки так, чтобы дороги образовали нужные углы. Такой эксперимент обеспечен подвижностью вводимых точек. Главное достоинство программы состоит в том, что локальная оптимизация делается и автоматически методом наискорейшего спуска. Этот метод не предполагается известным участнику, так как связан с исследованием функции нескольких переменных. В то же время этот метод является формализацией идеи «шевеления» точек для улучшения результата, поэтому является «прозрачным» для тех, кто его использует. Кроме того, целью работы была не локальная оптимизация (которая, повторим, может быть достигнута и эмпирически шевелением промежуточных точек), а нахождение глобального экстремума (то есть самого лучшего решения). Эти две задачи принципиально различны по своему содержанию, поэтому «камуфлирование» методов решения одной из них не затемняет, а наоборот делают более ясными закономерности, присущие другой.

Замечание. Построение локально оптимизирующей сети дорог – тоже интересная задача и может стать предметом исследования, например, с помощью среды «The Geometer's Sketchpad» («Живая геометрия»).



Рассмотрим способы геометрического построения такой сети для двух частных случаев: кратчайшая сеть дорог для вершин треугольника и вершин четырехугольника [6].

Если один из углов треугольника больше или равен 120°, то искомая сеть дорог –

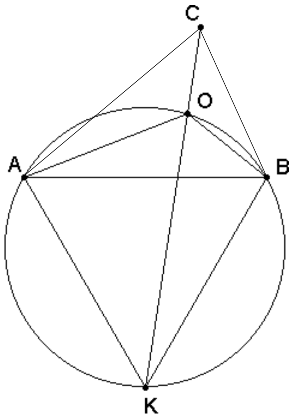
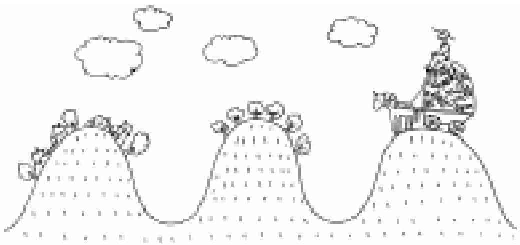


Рисунок 1.

объединение двух меньших сторон. Для построения кратчайшей сети дорог в треугольнике, все углы которого меньше 120°, достаточно соединить три вершины с точкой, из которой каждая сторона треугольника видна под углом 120°. Эту точку в различных источниках называют точкой Торричелли, точкой Ферма или точкой Штейнера. В процессе знакомства школьников с данным сюжетом полезно провести эксперимент в среде «The Geometer's Sketchpad». При этом, например, можно убедиться, что если три населенных пункта расположены в вершинах прямоугольного треугольника, то кратчайшей сетью дорог будет вовсе не объединение двух катетов, хотя на местности дороги скорее всего проложили бы именно по катетам.

Построим точку Ферма для треугольника (рисунок 1).



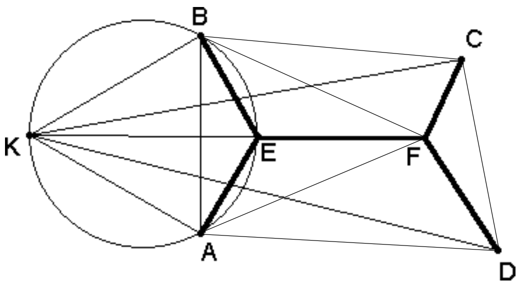


Рисунок 3.

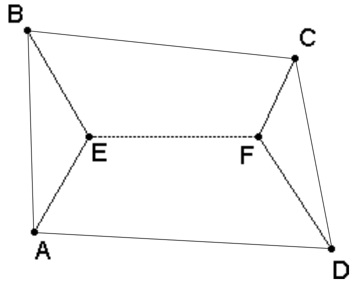


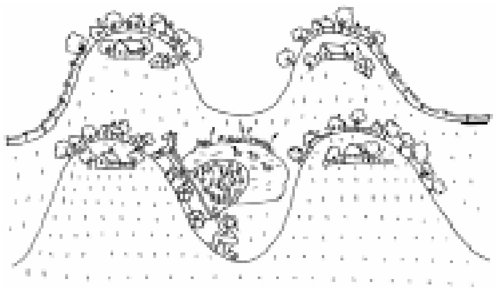
Рисунок 2.

Построим внешним образом равносторонний треугольник AKB на стороне AB и опишем около него окружность. Проведем отрезок CK и обозначим через O точку пересечения отрезка CK и окружности.

Тогда $\angle AOB = 120°$, поскольку угол опирается на дугу в 240°.

$\angle BOK = \angle AOK$, поскольку углы опираются на равные хорды, следовательно, $\angle COB = \angle COA$. Сумма этих двух углов равна $360° - \angle AOB = 360° - 120° = 240°$, откуда $\angle COB = \angle COA = 120°$.

Перейдем к построению кратчайшей сети дорог для четырехугольника. Свойства ло-



кально оптимальных решений позволяют предположить, что кратчайшая сеть дорог для четырехугольника $ABCD$ имеет вид, показанный на рисунке 2, причем отрезки сходятся в точках E и F под углами 120°.

Для построения такой сети дорог заметим, что точка E является точкой Ферма для треугольника ABF. Построим равносторонний треугольник ABK на стороне AB (рисунок 3). Из предыдущего пункта известно, что точку Ферма можно построить как пересечение окружности и отрезка KF. Следовательно, точки K, E и F лежат на одной прямой. Учитывая свойства локально оптимальных решений, получим, что $\angle KFC = \angle CFD = \angle DFK = 120°$, поэтому F – точка Ферма для треугольника KCD.

Аналогичным образом можно осуществить индукционный переход от N точек к $N - 1$. При построении на отрезке AB правильного треугольника ABK мы можем заменить две точки одной точкой K и воспользоваться построением сети для $N - 1$ точки. Заинтересованный читатель может проверить переход от пяти точек к четырем на примере рисунков, иллюстрирующих решение проблемы Штейнера в рубрике «И в шутку и всерьез».

Рисунок 4.

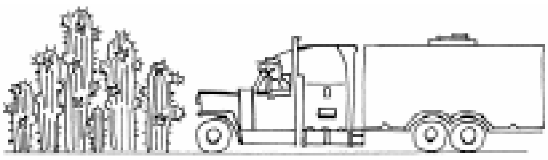
Данный метод построения предполагает, что мы уже знаем конфигурацию сети и лишь уточняем ее количественные характеристики. Но при неудачно выбранной конфигурации можно найти локальный минимум, не реализующий кратчайшую сеть дорог. Образно говоря, можно оказаться не на самой высокой вершине, а на другой, находящейся неподалеку. В качестве примера такой ситуации рассмотрим прямоугольник и две сети дорог (рисунок 4).

Обе сети дорог удовлетворяют свойствам локально оптимальных решений, но длина второй сети на 11% превосходит длину первой сети.

В среде «The Geometer's Sketchpad» подготовлен манипулятор, размещенный на диске к журналу. На этом примере можно изменять вид сети дорог, причем она всегда остается локально кратчайшей, но не всегда является кратчайшей.

Задача о пересечении пустыни с ограниченным ресурсом.

Бензобак машины вмещает не более



N литров бензина. На один километр пути расходуется один литр бензина. Путь через пустыню равен L километрам ($L > N$). По ходу движения можно оставлять запасы бензина. Как пересечь пустыню, израсходовав как можно меньше топлива (проехав наименьшее суммарное расстояние)?

Программа помогает вести эксперимент, сохраняя удобным образом сведения о пройденном пути, остатках топлива в бензобаке и запасах, сделанных по ходу движения. Программа также сохраняет «рекорд» – лучший результат и позволяет сохранять файлы-решения задачи, которые в любой момент можно вызвать для анализа. В этой задаче не было никаких вспомогательных математических инструментов, кроме тех, которые следили за выполнением всех естественных ограничений задачи (наличие достаточного количества топлива, преодоление требуемого расстояния и пр.)

Задача о расстановке шахматных фигур.

На шахматной доске надо поставить

два ферзя и как можно больше коней так, чтобы никакие две фигуры не били друг друга.

Программа помогает быстро расставлять и снимать фигуры, следит за тем, чтобы фигуры не били друга, позволяет сохранять позиции, запоминает рекорды.

10. РАЗБОР ЗАДАЧ КОНКУРСА

Задача о расстановке шахматных фигур

В этой задаче рекорд (максимальное количество коней) определяется тем, сколько клеток «бьют» два ферзя. То есть, должно остаться как можно больше клеток для расстановки коней.

Если поставить в центр поля двух ферзей, то они будут «бить» большую часть поля. В результате мы можем поставить небольшое количество (примерно 8–10) коней.

Рисунок 5.

Рисунок 6.

Пример 1

Поставим 2-х ферзей в «центре» поля, как показано на рисунке 5. При этом мы можем поставить 8 коней.

Предложим эвристический алгоритм[1]: попробуем расставить ферзей так, чтобы они били минимум клеток.

Пример 2

Поставим ферзей на две верхние линии, как показано на рисунке 6. В этом случае мы получаем 14 коней.

Попробуем улучшить решение.

Пример 3

Очевидно, что ферзи будут «бить» наименьшее количество клеток, если их поставить в один угол. Но мы этого не можем сделать – ферзи будут «бить» друг друга. Также мы не можем поставить ферзей в соседние углы – они тоже будут «бить» друг друга. Поставим одного из них в угол шахматной доски, а другого – напротив него, как изображено на рисунке 7. Ферзи «бьют» 38 клеток.

Интуитивно понятно, что ферзи «бьют» немного клеток.

Итак, мы оставили максимум клеток для коней. Расставив коней, получим наиболее распространенную среди решений участников расстановку из 15 коней, как показано на рисунке 8.

15 коней – рекорд для этой задачи. Следует отметить, что мы не доказывали невозможность постановки 16 коней.

Попробуем добиться, чтобы ферзи «били» еще меньше клеток.

Рисунок 7.

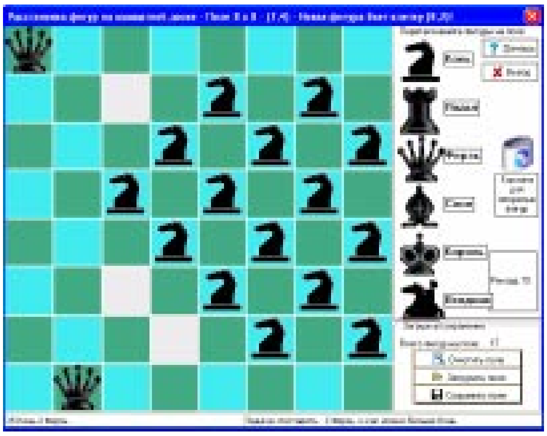


Рисунок 8.

[1] Эвристический алгоритм – алгоритм, основанный на интуитивных рассуждениях. Он не гарантирует получение оптимального решения, но его результат всегда близок к оптимальному (в нашем случае под оптимальностью понимается максимальное количество коней, которые можно расставить на шахматной доске).

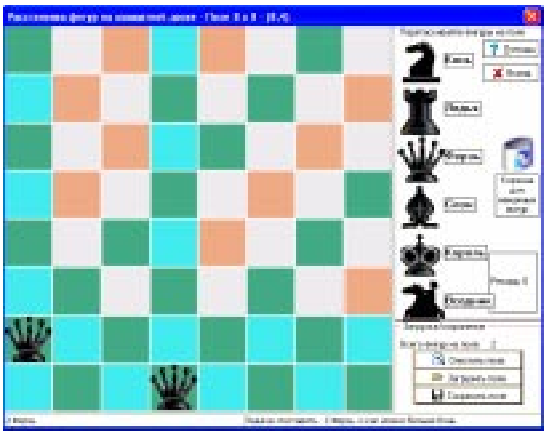


Рисунок 9.

Рисунок 10.

Пример 4

При комбинации, приведенной на рисунке 9, получаем, что ферзи бьют 37 клеток.

Видно, что комбинация не дает нам возможности поставить 16 коней рисунок 10).

Таким образом, мы опробовали различные «эвристические» методы и сравнили их результаты.

Разбор задачи о пересечении пустыни

Задача о пересечении пустыни гораздо проще решается с конца, то есть будем рассматривать некоторое конечное состояние игры и выяснять, из какого предыдущего состояния можно достичь данного состояния. Таким образом, мы «движемся» от финиша к старту.

Для начала ограничим себя следующим условием: будем делать остановки только на отметках, кратных 100 км.

Примем стратегию: каждый раз будем «двигаться» назад и выяснять требуемый запас топлива. Это значит, что мы сначала будем рассчитывать необходимый запас топлива на 300-м км, затем на 200-м, затем на 100-м.

Итак, очевидно, что перед последним ходом (на расстоянии 500 км от финиша) мы должны быть на 300-м км с полным бензобаком, как показано на рисунке 11.

Для этого необходимо на предыдущем ходу на старте заправиться по максимуму, потом доехать до 300-го км и заправить там еще 300 единиц топлива, как показано на рисунке 12.

Формирование запаса на 300-м км

Теперь задача свелась к следующему: как доставить 300 единиц топлива на 300-й км и вернуться обратно на старт?

Даже если на 200-м км у нас было максимум топлива – 500 единиц, то мы потратим 100 единиц, чтобы доехать до 300-го км. На 300-м км нам необходимо оставить 300 единиц, и у нас останется 100 единиц, что-

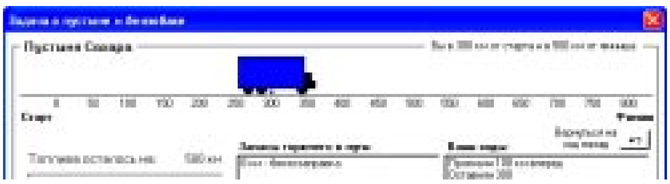


Рисунок 11.

Рисунок 12.

Рисунок 13.

Рисунок 14.

бы вернуться на 200-й км. Соответственно, на 200-м км и 100-м км должно быть еще по 100 единиц топлива, чтобы мы могли доехать до старта. Смотри рисунки 13 и 14.

Задача свелась к более простой – как добиться следующей ситуации: мы находимся на 200-м км с запасом 500 единиц; в то же время запасы на 100-м км и 200-м км по 100 единиц.

Формирование запаса на 200-м км

Если мы находимся на 200-м км с 500 единицами топлива, то на предыдущем ходе мы заправили 100 единиц топлива, так как смогли приехать на 200-й км, отправляясь с 100-го км.

На предыдущем ходу ситуация была такой, как показана на рисунке 15.

Видно, что 100 единиц топлива мы заправили на 100-м км.

Тогда еще ход назад ситуация была такой, как показана на рисунке 16.

Мы могли сделать запас из 200 единиц топлива на 200-м км так: выехать с 500 единицами топлива со старта, заправить на 100-м км еще 100 единиц топлива и выгрузить 200 единиц топлива на 200-м км. Затем вернуться назад.

То есть на предыдущем ходе ситуация должна была бы выглядеть, как показано на рисунке 17.

Формирование запаса на 100-м км (рисунок 18)

300 единиц топлива завезти на 100-й км можно так: заправляем полный бак на старте, едем вперед до 100-го км, выгружаем 300 единиц и возвращаемся на старт.

Суммируя пройденный путь, получаем 2000 км – наиболее распространенный среди решений участников результат.

Попробуем оптимизировать решение за счет изменения расположения запасов топлива.

Рисунок 15.

Рисунок 16.

Рисунок 17.

Рисунок 18.

1736 км

Достичь суммарного пробега в 1736 км можно, расположив по-другому места, где мы будем оставлять топливо. Последовательность ходов та же, отличается только расположением запасов топлива в пути.

Ситуация перед последним ходом изображена на рисунке 19.

Ходы до этого изображены на рисунке 20.

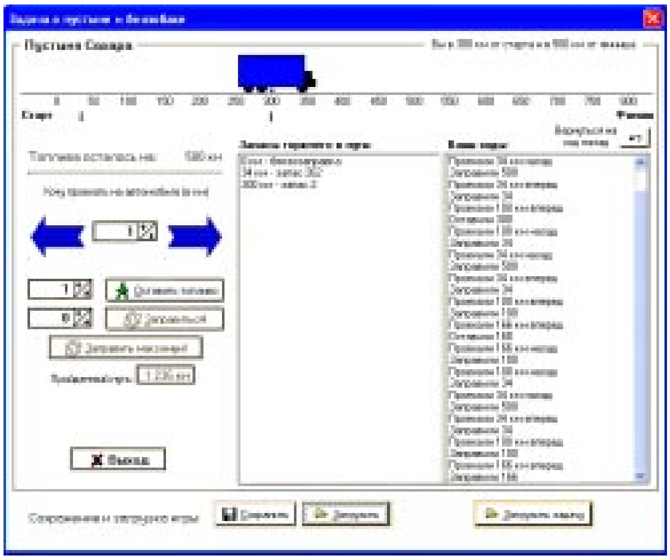


Рисунок 19.

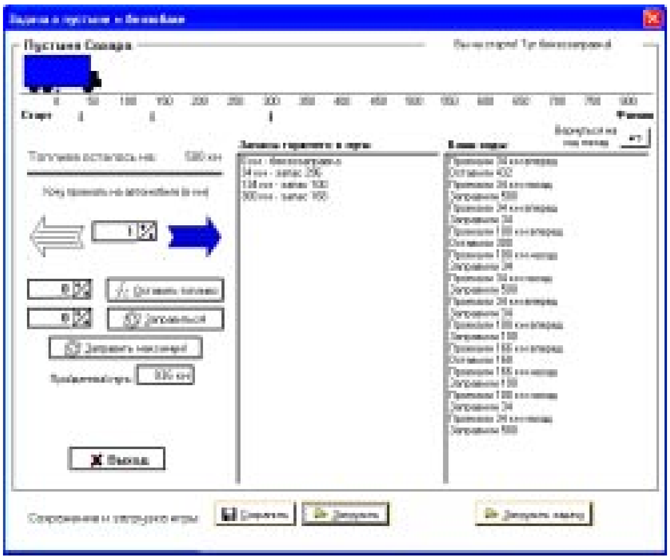


Рисунок 20.

В книге [8] показано, каким образом две заправки позволяют пройти максимальное расстояние в 4/3 единицы (одной заправкой считаем количество бензина на N км, а единицей расстояния – путь в N км), три заправки – 4/3 + 1/5 единицы, четыре заправки – 4/3 + + 1/5 + 1/7 единицы и так далее. Интересно, что сумма вида 1 + 1/3 + +1/5 + 1/7 + 1/9 + ... может быть сделана сколь угодно большой, если взять достаточно много (очень много!) слагаемых, поэтому в условиях задачи можно пересечь пустыню любой наперед заданной ширины.

Осталось выяснить, сколько потребуется топлива. В [8] приводится следующее решение для случая $N = 500$ и $L = 800$.

Три заправки позволяют проехать $766\frac{2}{3}$ км ($1\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ единицы), поэтому на расстоянии $33\frac{1}{3}$ км от точки старта необходимо построить еще одно бензохранилище. За пять рейсов можно построить это хранилище и завезти в него столько горючего, что, когда в конце седьмого рейса грузовик поравняется с третьим хранилищем, общее количество бензина в его баках и в хранилище составит три заправки. Как мы уже знаем, этого количества топлива достаточно для того, чтобы грузовик мог пройти оставшееся расстояние в $766\frac{2}{3}$ км. На семь рейсов, совершенных между пунктом отправления и вновь построенным бензохранилищем, израсходовано $\frac{7}{15}$ заправки. Трех оставшихся заправок достаточно, чтобы проехать необходимую часть пути. Таким образом, на весь путь будет израсходовано $3\frac{7}{15}$ заправки. Для $N = 500$ это означает, что придется проехать примерно 1733,3 километра.

Лучшее из решений, найденных участниками конкурса, уступает решению, приведенному в [8], менее 3 км!

Разбор задачи Штейнера

Некоторые участники стремились обойти все точки «путем» – то есть соединить все пункты одной дорогой. Эта задача известна как «Задача коммивояжера». Для ее решения неизвестны непереборные алгоритмы (рисунок 21).

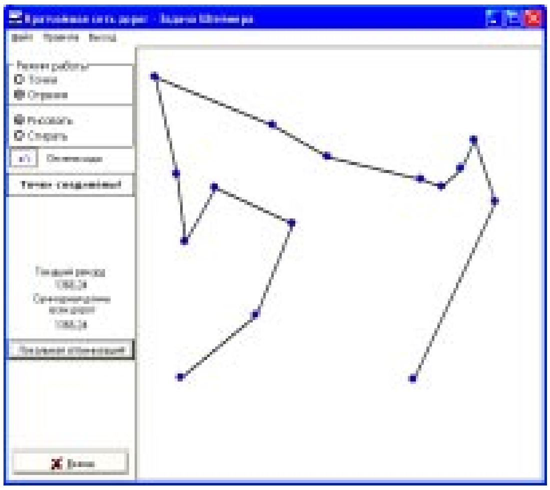


Рисунок 21.

Почему-то некоторые участники не использовали промежуточные точки. Может быть, они просто не заметили того, что можно переключить программу в другой режим. Возможно, они решили, что оптимальный вариант получается без промежуточных точек.

Если не использовать промежуточные точки, то оптимальный вариант дают алгоритмы построения минимального остовного дерева в графе, например, алгоритм Краскала. Идея алгоритма Краскала очень простая: на каждом шаге соединяют 2 ближайшие вершины и проверяют, не образовалось ли

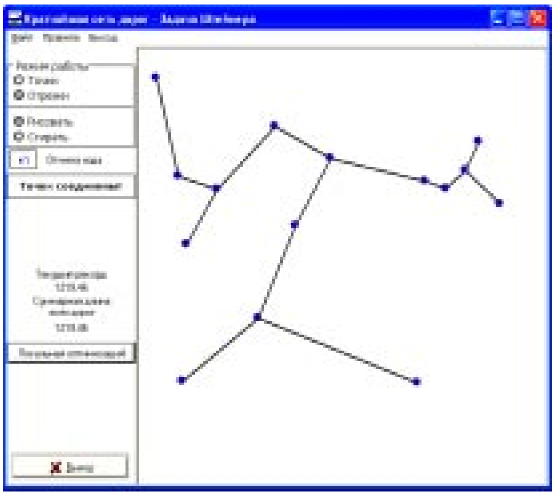


Рисунок 22.

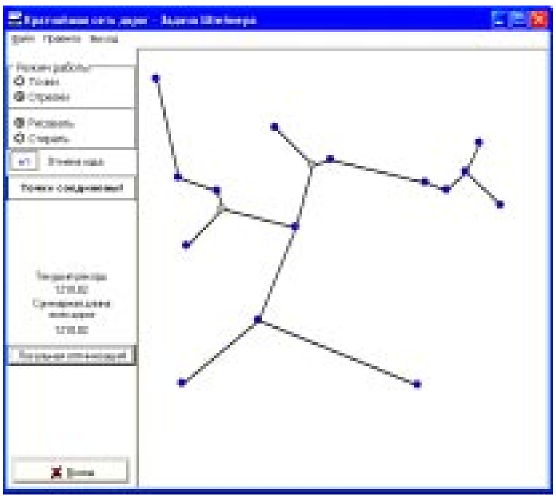


Рисунок 23.

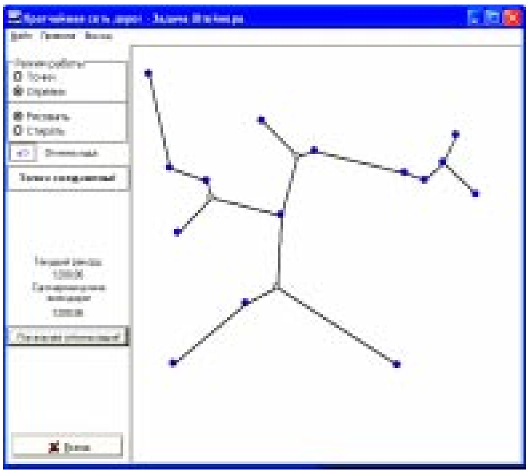


Рисунок 24.

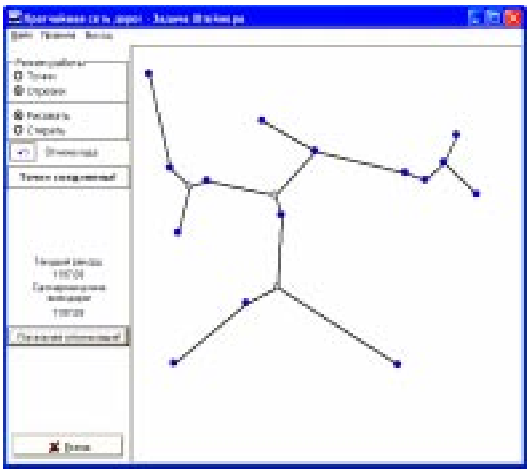


Рисунок 25.

циклов, если не образуется цикл – ребро сохраняют.

Итак, лучший вариант без промежуточных точек изображен на рисунке 22.

Добавив две промежуточные точки и нажав кнопку «Локальная оптимизация», получим вариант лучше (рисунок 23).

Экспериментируя с тремя промежуточными точками, получаем результат порядка 1200 (рисунок 24).

Заметим, что все углы с вершинами в добавленных точках по 120°. В каждой такой точке сходятся ровно три отрезка.

Попробуем другую конфигурацию из 3-х точек и преодолеем рубеж 1200 (рисунок 25).

Заметим, что улучшает результат добавление промежуточных точек там, где есть углы меньше 120°.

Справа мы видим как раз такое соединение отрезков – добавим четвертую промежуточную точку и еще немного улучшим результат (рисунок 26).

Мы видим место, где линии соединяются под острым углом. Соединив немного по-другому точки, получим очень распространенный среди решений участников вариант (рисунок 27).

Очень любопытно, что образовалась промежуточная точка, в которой сходятся 4 линии и все углы по 90° – это второй вариант промежуточной точки.

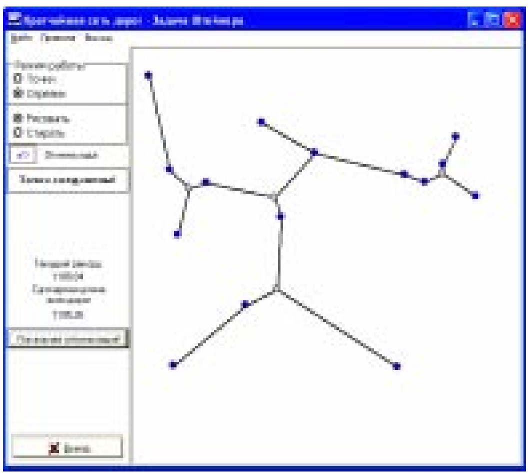


Рисунок 26.

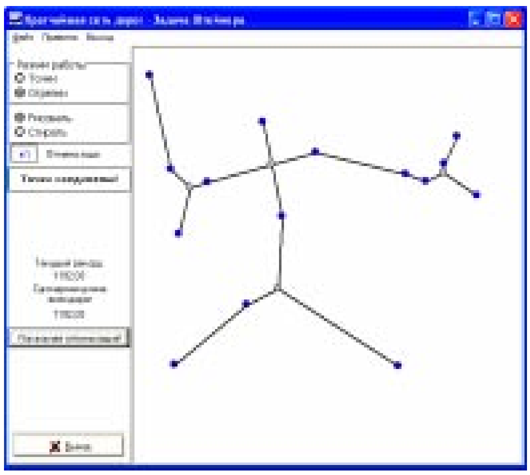


Рисунок 27.

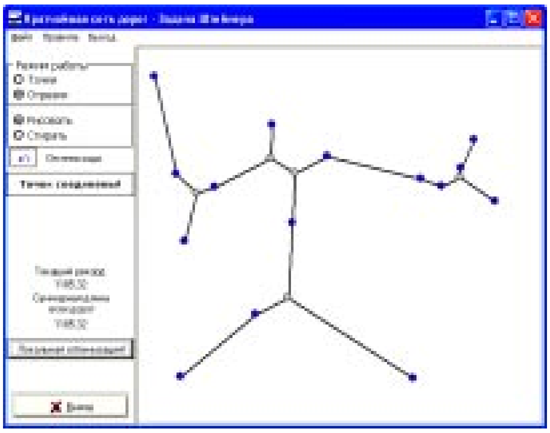


Рисунок 28.

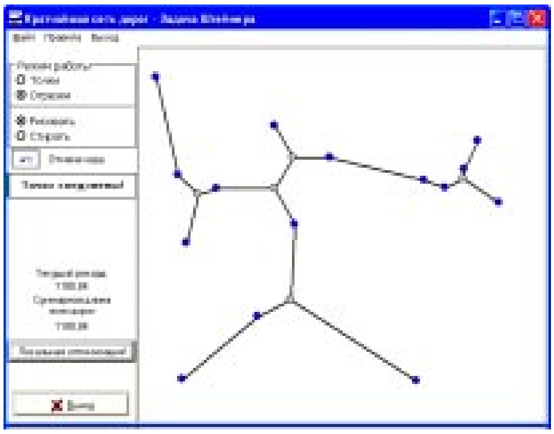


Рисунок 29.

Давайте разделим эту промежуточную точку на две. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ (рисунок 28): перешли еще один рубеж – 1190.

Второй способ (рисунок 29): получили лучший результат – 1180,84.

Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда. Проект № 03-06-00042а.

Литература

1. *С. Поздняков, С. Энтина.* Границы дистанционного обучения. Международный конгресс конференций «Информационные технологии в образовании». XIII Международная конференция «Информационные технологии в образовании»: сборник трудов участников конференции. Часть V. М.: Просвещение, 2003. С. 107.

2. *Юрков А.* Обзор отечественных систем дистанционного обучения // «Компьютерные инструменты в образовании», 2003, № 1. С. 8–15.

3. *Bannon L., Budker S.* Constructing Common Information Spaces. Computer Science and Information Systems Department, University of imerick, IRELAND, Department of Computer Science, University of Aarhus, DENMARK.

4. *Иванов С., Поздняков С.* Компьютер в продуктивном обучении математике // «Компьютерные инструменты в образовании», 2003, № 5. С. 10–20.

5. *Матиясевич Ю.В., Кублановский С.А.* Искусственный интеллект в математике – универсальный математический решатель // «Компьютерные инструменты в образовании», 2003, № 2. С. 49–55.

6. *Башмаков М., Поздняков С., Резник Н.* Информационная среда обучения. Монография. СПб: СВЕТ, 1997.

7. *Абакумов Е., Ижболдин О., Курлядчик Л., Нецветаев Н.* Кратчайшие сети // Квант, 1990, № 3.

8. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. М., Мир, 1971.

Иванов Сергей Георгиевич,
сотрудник лаборатории продуктивного обучения ИОСО РАО,

Мамаева Светлана Олеговна,
студентка 5 курса СПбГЭТУ,

Поздняков Сергей Николаевич,
профессор кафедры высшей математики № 2 СПбГЭТУ,

Степулёнок Денис Олегович,
студент 5 курса СПбГЭТУ,

Энтина Софья Борисовна,
доцент кафедры высшей математики № 2 СПбГЭТУ.